

ANALYSE
ALGÉBRIQUE.

ANALYSE
ALGÉBRIQUE,

FAISANT SUITE

A LA PREMIÈRE SECTION DE L'ALGÈBRE;

DEUXIÈME ÉDITION,

REVUE ET CONSIDÉRABLEMENT AUGMENTÉE;

PAR J.-G. GARNIER,

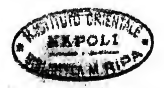
ancien Professeur à l'École Polytechnique, Docteur ès-Sciences, et Instituteur à Paris.



PARIS,

Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Lib. pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.

1814.



OUVRAGES DU MÊME AUTEUR,

QUI SE TROUVENT A LA MÊME ADRESSE.

TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE, à l'usage des Élèves de tout âge, comprenant l'Arithmétique des Grecs, seconde édition, 1 vol. in-8°.

ÉLÉMENS D'ALGÈBRE, à l'usage des Aspirans à l'École Impériale Polytechnique, première section, troisième édition, 1 vol. in-8°.

SECONDE SECTION DE L'ALGÈBRE, secondè édition, 1 vol. in-8°.

ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE, avec les deux Trigonométries, suivies d'une introduction à la Géométrie descriptive, et de notions sur la Polygonométrie et le levé des Plans, 1 vol. in-8°, avec 12 planches.

LES RÉCIPROQUES DE LA GÉOMÉTRIE, suivies d'un recueil très-étendu de théorèmes et de problèmes, seconde édition, 1 vol. in-8°, avec 9 planches.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, on application de l'Algèbre à la Géométrie, seconde édition, 1 vol. in-8°, avec 14 planches.

LEÇONS DE STATIQUE, 1 vol. in-8°, avec 12 planches.

LEÇONS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL, troisième édition, 1 vol. in-8°, avec 4 planches.

LEÇONS DE CALCUL INTÉGRAL, troisième édition, 1 vol. in-8°, avec 2 planches.

OUVRAGE SUR LE COMPAS DE PROPORTION, suivi d'un Traité de la division des champs, in-12.

RECHERCHES ANALYTIQUES consignées dans un ouvrage sur la Courbe trisectrice, faisant avec l'ouvrage 1 vol. in-8°, contenant 3 planches.

NOTES sur l'Algèbre de Bezout, faisant avec l'Algèbre 1 vol. in-8°.

NOTES sur le premier volume de l'Algèbre d'Euler; le second volume contient les Notes du sénateur Lagrange.

TABLE DES CHAPITRES

CONTENUS DANS L'ANALYSE ALGÉBRIQUE.

FIN DE LA TABLE.



AVERTISSEMENT.

J'ai transporté dans la troisième Édition de la première Section de l'Algèbre, quelques Chapitres de la seconde Section, qui en faisaient naturellement partie; ensorte qu'on ne trouvera ici que des choses absolument étrangères au programme d'admission à l'École Polytechnique : une refonte totale de la première Édition et des additions considérables font de ce second volume un ouvrage entièrement neuf, dont je vais rendre compte le plus succinctement possible.

Ce Traité se compose de vingt-neuf chapitres. Le premier sert d'introduction au second, qui a pour titre : *des Racines imaginaires*, et qui est, à quelques développemens près, extrait de *la Résolution des Équations numériques* de l'illustre *Lagrange*. Dans le troisième chapitre, on trouve la suite et le complément de l'importante doctrine des fractions continues dont j'ai reporté les élémens dans la première Section, où ils devenaient nécessaires à l'effet d'estimer le degré précis d'approximation sous lequel on obtient chaque racine incommensurable, en ne prenant qu'une portion de la fraction continue et infinie qui la représente exactement. Le quatrième chapitre, qui est très-étendu, contient, 1° la suite de l'Analyse indéterminée déjà ébauchée dans la première Section;

2° la résolution de ce problème général de l'Analyse indéterminée qui a pour énoncé : *Étant données entre des inconnues des équations du premier degré en moindre nombre que ces inconnues, trouver pour ces inconnues, les valeurs entières et rationnelles les plus générales qui puissent satisfaire aux proposées;* 3° assigner tous les nombres entiers qui peuvent satisfaire à l'équation la plus générale du second degré entre deux inconnues x et y, et les plus petits nombres qui, substitués pour ces mêmes lettres x et y, rendent la même fonction la plus petite possible. Le chapitre cinquième, qui a pour objet l'évaluation des sommes des puissances entières positives et négatives des racines d'une équation, prépare au suivant où l'on démontre que toute fonction symétrique ou invariable des racines d'une équation, peut toujours être exprimée en coefficiens de cette équation. Le huitième chapitre a pour titre : *du degré de l'équation finale donnée par l'élimination de toutes les inconnues, moins une, entre un nombre quelconque d'équations de degrés quelconques et le même nombre d'inconnues* : il contient, outre la démonstration du théorème énoncé, due à M. *Poisson*, une méthode donnée par *Lagrange*, qui a l'avantage de réduire l'élimination des inconnues à des formules générales et très-simples, et une autre méthode pour le même objet, de M. *Kramp*, Professeur-Doyen de la Faculté des Sciences de Strasbourg. Le chapitre neuvième offre quelques théorèmes sur les racines de l'équation $y^m - 1 = 0$, auxquels nous parvenons

par une autre voie dans le onzième chapitre, et ce théorème de *Fermat* démontré par *Euler*, savoir, que p étant un nombre premier, et a un nombre moindre que p, le nombre $a^{p-1} - 1$ est nécessairement divisible par p. Les théorèmes établis dans ce chapitre étant nécessaires et même indispensables pour l'intelligence des chapitres suivans, nous avons cru devoir plutôt les réunir en un corps de doctrine, que de les donner à mesure que le besoin l'exigerait. Le dixième chapitre, l'un des plus étendus de l'ouvrage, moins peut-être pour l'utilité que pour la dignité de la Science, est consacré à la résolution générale des équations. *Lagrange*, après avoir examiné et comparé les différentes méthodes connues et relatées dans ce chapitre, pour la résolution des équations des quatre premiers degrés, a trouvé que ces méthodes se réduisent toutes, en dernière analyse, à employer une équation secondaire qu'il a appelée *équation résolvante*, et dont il a cherché, *à priori*, le degré et les diviseurs qu'elle peut avoir, et il a fait voir pourquoi cette équation d'un degré plus élevé que la proposée, est toujours susceptible d'abaissement pour les équations des troisième et quatrième degrés, et peut servir à les résoudre. On trouve plus loin une application de cette méthode à la résolution des équations binomes. Je donne dans le chapitre onzième, la résolution par les lignes trigonométriques des équations $x^m \pm a^m = 0$, $x^m - 2px^m + q = 0$, la construction des racines de ces équations, due aux géomètres *Cotes* et *Moivre*,

et une démonstration du théorème de *Cotes*, uniquement fondée sur des principes connus à l'époque où ce Géomètre écrivait. Ainsi que je l'ai annoncé plus haut, je reviens ici sur quelques théorèmes déjà démontrés dans le neuvième chapitre. La résolution trigonométrique des équations des second et troisième degrés, et la trisection de l'angle, font le sujet du douzième chapitre, qui offre les moyens les plus simples de réduire en nombres, avec le secours des tables trigonométriques, les racines des équations, et même celles du troisième degré, lorsqu'elles tombent dans le cas irréductible ; ce qui ne peut se faire autrement, à moins de développer les formules générales qui les représentent, en séries infinies, pour les avoir sous forme réelle et convergentes, à l'effet de les calculer avec l'approximation désirable. Il est remarquable que les équations du troisième degré, lorsqu'elles tombent dans le cas irréductible, peuvent toujours être ramenées à une forme telle qu'elles deviennent comparables à l'équation que fournit le problème de la trisection de l'angle. J'ai repris dans le treizième chapitre, l'équation $x^m - 1 = 0$, pour la traiter par la méthode de *Lagrange*, déjà employée dans le dixième, et qui peut être regardée, dit ce Géomètre, comme une simplification de celle que M. *Gauss* a indiquée d'une manière générale dans l'article 360 de ses *Disquisitiones Arithmeticæ* : puis j'ai décomposé immédiatement, et de diverses manières, en facteurs qu'on sache résoudre, les quotiens de la division de

$x^m - 1$ par $x - 1$, depuis $m = 2$ jusqu'à $m = 15$. Cependant il sera toujours plus avantageux d'employer, pour la résolution de toutes les équations de ce genre, les formules en sinus et cosinus, comme on l'a fait dans le onzième chapitre. Dans le quatorzième chapitre, j'ai exposé quelques procédés de décomposition des polynomes en facteurs réels d'un degré supérieur au premier; décomposition dont la possibilité a été démontrée dans le premier chapitre de cet Ouvrage. Ceux qui veulent approfondir cette matière, doivent consulter la note X de la résolution des équations numériques, note que *Lagrange* termine par cette observation : « Il faut avouer qu'à » l'exception de quelques cas particuliers où la dé» composition de l'équation est facile, la méthode » que je viens d'exposer est impraticable par la » multiplicité et la longueur des opérations qu'elle » peut exiger. » On voit donc que de quelque manière qu'on ait attaqué la résolution des équations, les efforts ont été infructueux. J'ai généralisé dans le quinzième chapitre, la question de l'extraction des racines des quantités en partie commensurables et en partie incommensurables, qui, dans la première Section, avait été restreinte à la racine carrée de ces sortes de quantités. Dans le seizième, il est question de l'évanouissement des radicaux dans les équations, quels que soient leur nombre et leurs indices : quelques exemples montrent que les opérations par lesquelles on fait disparaître ces radicaux, introduisent des racines étrangères à l'équation

proposée. Le chapitre dix-septième, consacré à la résolution des équations littérales, est enrichi d'un mémoire de *Lagrange*, dont le nom s'attache à toutes les théories importantes. Le chapitre dix-huitième, où je donne les développemens en séries des quantités exponentielles et logarithmiques, offre l'ensemble des moyens que fournit l'Algèbre pour calculer les logarithmes des nombres premiers, avec une approximation qui dépasse tous les besoins. Entre autres applications de ces développemens, une des plus utiles est celle qui a pour objet le calcul d'un terme quelconque d'une puissance définie d'un infinitinome ordonné suivant x; et comme cette question est d'un grand intérêt, j'en ai fait la matière d'un chapitre de cet Ouvrage. Dans le chapitre dix-neuvième, qui fait naturellement suite au précédent, on trouve les séries qui expriment le sinus, le cosinus, etc. par l'arc, et réciproquement l'arc par le sinus, la tangente, etc.; j'y donne aussi les développemens suivant l'arc, des logarithmes du sinus, du cosinus et de la tangente; et, à la suite, un aperçu des moyens employés à l'ancien Bureau du Cadastre pour obtenir les sinus et tangentes naturels avec une très-grande approximation. Un des plus grands avantages de l'emploi de ces méthodes que les Géomètres de ce Bureau ont étendues aux logarithmes des nombres et des lignes trigonométriques, était de pouvoir mettre à la fois en œuvre un grand nombre de calculateurs de la plupart desquels on ne pouvait attendre que la pratique des

premières opérations de l'Arithmétique : suivent enfin plusieurs conséquences curieuses des formules démontrées dans ce chapitre et dans le précédent. Nous avions prouvé dans le chapitre premier, que toute fonction algébrique de la forme $a \pm b \sqrt{-1}$, est de la forme $P \pm Q \sqrt{-1}$; dans le chapitre vingtième, nous étendons cette proposition aux fonctions transcendantes. Le chapitre vingt-unième qui a pour titre, *Formules diverses*, a le double avantage d'exercer au calcul trigonométrique, et d'offrir sous forme finie, les logarithmes de binomes élevés à des puissances fractionnaires, ou de fonctions de ces binomes, ce qui, dans plusieurs cas, favorise des réductions et donne lieu à des transformées précieuses, en ce qu'elles se prêtent à des évaluations numériques qui deviendraient laborieuses sans leur secours. Le chapitre vingt-deuxième offre diverses formes de développemens du sinus et du cosinus du multiple d'un arc, démontrées dans le *Calcul des Fonctions* par *Lagrange;* le développement de la tangente du multiple d'un arc suivant les puissances de la tangente de l'arc simple, ceux de la puissance $m^{ième}$ du cosinus et du sinus d'un arc suivant les cosinus et sinus des multiples de cet arc, et les réciproques de ces séries ; la décomposition des séries du sinus et du cosinus suivant les puissances de l'arc en facteurs binomes, d'où l'on déduit l'expression singulière de la demi-circonférence trouvée par *Wallis:* viennent ensuite des formules trigonométriques nou-

velles ou peu connues, dues à M. *Dubourguet*, et enfin la démonstration d'une série curieuse, due à *Euler*, et qui donne l'arc suivant les sinus des multiples de cet arc. Il s'agit dans le chapitre vingt-troisième, de la sommation des termes d'une progression par équi-différences; de celle des nombres figurés et des inverses de ces nombres; de la formule sommatoire des produits de la forme $1.2.3\ldots p$, $1.2.3\ldots\ldots p\,(p+1)$, etc., qui, indépendamment de l'emploi que nous en ferons dans le dernier chapitre, peut avoir d'autres applications utiles, ainsi qu'il arrive de plusieurs recherches analytiques que l'on est quelquefois tenté de regarder comme de simple curiosité; et enfin de l'évaluation des sommes des produits différens 2 à 2, 3 à 3, etc. qu'on peut faire avec tous les termes d'une suite par différences constantes, d'où l'on déduit la résolution des équations dont les racines forment une pareille suite. Le chapitre vingt-quatrième, où il est question de la décomposition des fractions rationnelles, est une introduction au suivant: j'expose les méthodes algébriques les plus simples pour opérer cette décomposition, en renvoyant d'ailleurs au Calcul différentiel qui fournit des procédés plus expéditifs. Le chapitre vingt-cinquième offre la solution de ces quatre questions dans lesquelles consiste la doctrine des suites récurrentes: 1° étant donnée une suite récurrente et l'échelle de relation, assigner la fraction génératrice et la somme d'un nombre quelconque de termes d'une telle suite; 2° une fraction rationnelle étant donnée,

trouver le terme général de la série récurrente à laquelle elle donne lieu ; 3° étant donnée une série, découvrir si elle est récurrente ; 4° le terme général d'une série récurrente étant donné, trouver la fraction génératrice. Quelques exemples choisis servent à familiariser le lecteur avec les méthodes exposées dans ces deux derniers chapitres. Le chapitre vingt-sixième qui a pour titre: *Transformation des fractions*, est extrait d'un mémoire fort curieux du célèbre *Lagrange*, mémoire consigné dans le cinquième cahier du *Journal de l'École Polytechnique :* en partant d'une conclusion de l'auteur, je démontre d'après *Haros*, l'un de mes collégues à l'ancien Bureau du Cadastre, l'importante proposition de l'incommensurabilité de la circonférence avec le diamètre. On trouve dans le vingt-septième chapitre, le développement de la théorie donnée par M. *Laplace*, pour l'élimination au premier degré. Il paraît que *Cramer* est le premier qui ait remarqué la loi que suivent les valeurs des inconnues dans les équations du premier degré, et qui ait indiqué des méthodes pour construire ces valeurs, sans passer par le calcul de l'élimination. Postérieurement, *Bezout*, dans sa *Théorie générale des équations algébriques*, a apporté quelques modifications à ces méthodes; mais elles sont demeurées entre ses mains, comme entre celles de *Cramer*, le résultat d'une simple induction. Ce n'est seulement qu'en 1772 que M. *Laplace*, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, a démontré pour la première fois, d'une manière générale et

rigoureuse, l'exactitude de ces formules. Nous rapportons ici les démonstrations de MM. *Gergonne* et *Laplace*, dont la première n'est que le développement de la seconde. Le chapitre vingt-huitième a pour titre : *Théorie élémentaire des probabilités*, matière qui jusqu'ici n'a pas trouvé place dans les élémens. Après avoir résumé le plus succinctement possible, le discours qu'on trouve en tête de *la Théorie analytique des probabilités*, par M. *Laplace*, et la notice historique qui termine l'*Essai philosophique des probabilités*, par le même Géomètre, je pose les dix principes qui servent de fondement à cette partie de la science, et après avoir éclairci immédiatement chacun d'eux par la résolution de quelques questions simples, je passe à une série d'applications qui ne supposent cependant que les méthodes exposées dans ce volume, et particulièrement les développemens d'une puissance quelconque entière d'un binome et d'un polynome, et l'interprétation de chacun de leurs termes. En reprenant cette importante matière dans un ouvrage particulier, je lui donnerai des développemens qui ne pouvaient entrer dans le cadre de celui-ci, qu'il était plus difficile de resserrer que d'étendre.

ANALYSE ALGÉBRIQUE.

CHAPITRE PREMIER.

Une équation de degré quelconque, ne peut avoir que des racines réelles ou des racines imaginaires de la forme

$$\mathrm{a} \pm \mathrm{b}\sqrt{-1},$$

a *et* b *étant des quantités réelles.*

1. On sait (Ire sect., ch. XXVIII) que toute équation de degré impair, est divisible par un facteur réel du premier degré. Il suffit donc de prouver que toute équation de degré pair, est décomposable en facteurs du second degré de la forme

$$x^2 + mx + n,$$

m et n étant des quantités réelles.

2. Nous ferons précéder la démonstration de cette proposition, de quelques théorèmes préliminaires.

Si une équation algébrique a pour racine une quantité de la forme $\mathrm{a}+\mathrm{b}\sqrt{-1}$, *elle en aura nécessairement une autre de la forme* $\mathrm{a}-\mathrm{b}\sqrt{-1}$.

Soit l'équation

$$x^m - \mathrm{A}x^{m-1} + \mathrm{B}x^{m-2} - \mathrm{C}x^{m-3} \ldots + \mathrm{T}x - \mathrm{V} = 0 \ldots (\mathrm{M});$$

$a+b\sqrt{-1}$ étant, par hypothèse, une des racines de cette

équation, le premier membre s'évanouira en écrivant $a+b\sqrt{-1}$ pour x dans (M) ; on aura donc

$$(a+b\sqrt{-1})^m - A(a+b\sqrt{-1})^{m-1} + B(a+b\sqrt{-1})^{m-2}\ldots\ldots - V = 0\ldots\ldots(N):$$

I faut donc prouver qu'on a en même temps,

$$(a-b\sqrt{-1})^m - A(a-b\sqrt{-1})^{m-1} + B(a-b\sqrt{-1})^{m-2}\ldots\ldots - V = 0\ldots\ldots(N').$$

Or en effectuant les développemens indiqués dans (N), le résultat sera composé de deux espèces de termes, les uns réels donnés par les premiers termes de chaque binome, et par les puissances paires de $+b\sqrt{-1}$; les autres imaginaires provenant des puissances impaires de $+b\sqrt{-1}$; ensorte que le premier membre de (N) sera de la forme $P+Q\sqrt{-1}$, en représentant par P la somme des termes réels, et par Q la somme des coefficiens aussi reels de $\sqrt{-1}$. On aura donc

$$P+Q\sqrt{-1}=0; \text{ d'où } P=0, \quad Q=0,$$

parce qu'il ne peut y avoir destruction entre des termes réels et des termes imaginaires.

Maintenant qu'on effectue les opérations indiquées par (N'): le résultat sera, comme le précédent, composé de termes réels et de termes imaginaires ; les puissances paires de $-b\sqrt{-1}$ étant les mêmes que celles de $+b\sqrt{-1}$, et les premiers termes des binomes étant en outre égaux dans (N) et (N'), on aura de part et d'autre P pour la somme des termes réels : les puissances impaires de $-b\sqrt{-1}$ ne différant que par le signe de celles de $+b\sqrt{-1}$, on aura $-Q\sqrt{-1}$ pour la somme des termes imaginaires : ensorte que le résultat de la substitution sera $P-Q\sqrt{-1}$. Mais on a trouvé

$$P=0, \quad Q=0, \quad \text{donc} \quad P-Q\sqrt{-1}=0,$$

donc la quantité $a - b\sqrt{-1}$ substituée au lieu de x dans la proposée, réduit aussi le premier membre à zéro.

Toute fonction algébrique de $a \pm b\sqrt{-1}$, *peut être ramenée à la forme* $P \pm Q\sqrt{-1}$, *P et Q étant des quantités réelles* (*).

On a

1°. $$a \pm b\sqrt{-1} + a' \pm b'\sqrt{-1} + \text{etc.}$$
$$= (a + a' + \text{etc.}) \pm (b + b' + \text{etc.})\sqrt{-1},$$
donc $P = a + a' + \text{etc.}$, $Q = b + b' + \text{etc.}$;

2°. $$(a \pm b\sqrt{-1})(a' \pm b'\sqrt{-1})$$
$$= (aa' - bb') \pm (a'b + ab')\sqrt{-1},$$
donc $P = aa' - bb'$, $Q = a'b + ab'$,

3°. $$\frac{a \pm b\sqrt{-1}}{a' \pm b'\sqrt{-1}} = \frac{(a \pm b\sqrt{-1})(a' \mp b'\sqrt{-1})}{(a' \pm b'\sqrt{-1})(a' \mp b'\sqrt{-1})}$$
$$= \frac{(aa' + bb') \pm (a'b - ab')\sqrt{-1})}{a'^2 + b'^2},$$
donc $P = \dfrac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2}$, $Q = \dfrac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2}$.

Les calculs faits pour démontrer le premier théorème de ce titre, prouvent que la fonction $(a \pm b\sqrt{-1})^m$ est de la forme $P \pm Q\sqrt{-1}$.

Nous ferons voir dans l'un des chapitres suivans que $\sqrt[n]{-1}$ n'admet, dans le cas de n nombre pair, que des racines imaginaires, et que, pour n nombre impair, elle comporte une seule racine réelle. Celà posé, si dans l'expression

(*) Un radical imaginaire peut excéder le second degré, comme $\sqrt[2a]{-A^2}$; mais on sait que $\sqrt[2a]{-A^2} = \sqrt[a]{A\sqrt{-1}}$.

$N(p+q\sqrt{-1})^m$, où N est un polynome réel, on remplace $\sqrt{-1}$ par $a+b\sqrt{-1}$, et qu'on pose

$$N(p+qa)=\alpha,\quad Nqb=\beta\,;$$

on aura

$$(\alpha+\beta\sqrt{-1})^m=P+Q\sqrt{-1}=N(p+q\sqrt{-1})^m,$$

P et Q étant des quantités réelles. On prouverait de même que

$$\frac{N}{(p+q\sqrt[n]{-1})^m}=P'+Q'\sqrt{-1}),$$

P' et Q' étant pareillement des quantités réelles.

Considérons la fonction $\sqrt{a+b\sqrt{-1}}$, et posons

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}+\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=u\ldots(1)\,;$$

élevant au carré, il vient

$$2a+2\sqrt{a^2+b^2}=u^2,$$

quantité nécessairement positive; donc u sera une quantité réelle : élevant ensuite au carré la différence

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}-\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=t\ldots(2),$$

ce qui donne

$$2a-2\sqrt{a^2+b^2}=t^2,$$

t^2 sera une quantité essentiellement négative : donc on pourra poser

$$t^2=-V^2,\quad \text{d'où}\quad t=\pm V\sqrt{-1},$$

V étant une quantité réelle : ajoutant les résultats (1) et (2), il viendra

$$2\sqrt{a+b\sqrt{-1}}=u\pm V\sqrt{-1},$$

et retranchant (2) de (1), on aura

$$2\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=u\mp V\sqrt{-1};$$

ainsi le double signe de $V\sqrt{-1}$ répond au double signe de $b\sqrt{-1}$, et on a

$$\sqrt{a\pm b\sqrt{-1}}=\tfrac{1}{2}(u\pm V\sqrt{-1})=P\pm Q\sqrt{-1}.$$

Considérons encore la quantité

$$\sqrt[4]{a+b\sqrt{-1}}+\sqrt[4]{a-b\sqrt{-1}}=z\ldots\ldots(3),$$

on obtiendra par l'élévation au carré,

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}+2\sqrt[4]{a^2+b^2}$$
$$+\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=u+2\sqrt[4]{a^2+b^2}=z^2,$$

quantité essentiellement positive : donc z sera une quantité réelle. Si on élève au carré les deux membres de

$$\sqrt[4]{a+b\sqrt{-1}}-\sqrt[4]{a-b\sqrt{-1}}=v\ldots\ldots(4),$$

on aura

$$\sqrt{a+b\sqrt{-1}}-2\sqrt[4]{a^2+b^2}$$
$$+\sqrt{a-b\sqrt{-1}}=u-2\sqrt[4]{a^2+b^2}=v^2,$$

quantité essentiellement négative; car on a fait plus haut

$$u=\sqrt{a+b\sqrt{-1}}+\sqrt{a-b\sqrt{-1}},$$

ensorte que

$$u^2=2a+2\sqrt{a^2+b^2}<4\sqrt{a^2+b^2};$$

donc

$$u<2\sqrt[4]{a^2+b^2}.$$

Soit

$$v^2=-X^2 \quad \text{d'où} \quad v=\pm X\sqrt{-1},$$

X étant une quantité réelle : combinant les équations (3) et (4) par addition et par soustraction, il viendra

$$\sqrt[4]{a+b\sqrt{-1}}=\tfrac{1}{2}(z+X\sqrt{-1}),$$

c'est-à-dire,

$$\sqrt[4]{a\pm b\sqrt{-1}}=\tfrac{1}{2}(z\pm X\sqrt{-1})=P\pm Q\sqrt{-1},$$

où P et Q sont des quantités réelles.

3. Nous passerons maintenant à la démonstration du théorème annoncé. Soit, à cet effet, l'équation

$$x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+\ldots\ldots+Tx+V=0,$$

m étant de la forme 2μ, μ étant un nombre impair, et conséquemment m un nombre pair une fois seulement divisible par 2. Quoique les racines a, b, c, etc. de cette équation, ne soient pas connues, on pourra néanmoins exprimer, au moyen des coefficiens A, B.....T et V, ceux d'une autre équation qui aurait pour racines toutes les combinaisons, telles que $a+b$; ab, et même $a+b+kab$, k étant un nombre quelconque (*). Une équation ainsi formée sera du degré $m\frac{m-1}{2}$, nombre impair, puisque, par hypothèse, m est une seule fois divisible par 2; donc elle aura, au moins, une racine réelle. Mais pour que la proposée soit divisible par un facteur réel tel que x^2+mx+n, il faut que, dans la combinaison de la forme $a+b+kab$, la somme et le produit aient lieu entre les mêmes racines. Tout se réduit donc à démontrer que cette condition peut toujours être satisfaite. En effet, puisqu'on peut assigner à k une infinité de valeurs différentes, on pourra donc former une infinité de ces équations dont chacune aura, au moins, une racine réelle;

(*) Cette question sera résolue dans l'un des chapitres suivans, qui ne suppose en aucune manière la doctrine exposée dans celui-ci.

et si, par exemple, la proposée est du sixième degré, on ne pourra nier que quinze fois de suite que la racine réelle obtenue, soit la même, à la différence du nombre k, que l'une des racines réelles déjà trouvées : conséquemment, il existera deux racines réelles telles que

$$a + b + kab,$$
$$a + b + k'ab,$$

qui se composeront des mêmes lettres, ensorte qu'on aura

$$a + b + kab = \alpha,$$
$$a + b + k'ab = \beta,$$

α et β étant des quantités réelles : on déduit de là

$$ab = \frac{\alpha - \beta}{k - k'}, \quad a + b = \frac{k'\alpha - k\beta}{k' - k}.$$

Donc *l'équation du degré 2μ, μ étant un nombre impair quelconque, admet un facteur réel du second degré.*

Si la proposée est du degré 4μ, μ étant un nombre impair quelconque, l'équation d'où dépendra la fonction des racines $a + b + kab$, sera du degré 2ν, ν étant un nombre impair ; cette équation aura, d'après ce qui vient d'être démontré, un facteur réel de la forme

$$u^2 + m'u + n',$$

qui, par sa résolution, donnera l'une des fonctions

$$a + b + kab, \quad a + c + kac, \quad \text{etc.}$$

Parmi toutes ces racines, il y en aura une de la forme

$$A + B\sqrt{-1},$$

et donnant à k une infinité de valeurs successives, chacune des équations résultantes admettra un facteur réel du second degré qui donnera une racine de la même forme : on retrouvera donc nécessairement deux combinaisons entre les

mêmes lettres

$$a + b + kab = A + B\sqrt{-1},$$
$$a + b + k'ab = A' + B'\sqrt{-1},$$

d'où on déduit

$$a + b = M + N\sqrt{-1}, \quad ab = M' + N'\sqrt{-1};$$

donc la proposée aura un facteur du second degré de la forme

$$x^2 - (M + N\sqrt{-1})\,x + (M' + N'\sqrt{-1});$$

d'où

$$x = \frac{M+N\sqrt{-1}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{M+N\sqrt{-1}}{2}\right)^2 - (M'+N'\sqrt{-1})},$$

réductible à la forme

$$x = P + Q\sqrt{-1}.$$

Mais une racine de cette forme a toujours, d'après ce qui a été démontré précédemment, une conjuguée telle que

$$x = P - Q\sqrt{-1},$$

et le produit des facteurs correspondans est $x^2 + mx + n$, m et n étant des quantités réelles.

Donc *une équation du degré 4μ, μ étant impair, admet un facteur réel du second degré.*

On étendrait facilement cette analyse à une équation d'un degré trois, quatre, etc. fois divisible par 2, et on en conclurait,

1°. *Qu'une équation de degré pair, est décomposable en facteurs réels du second degré;*

2°. *Qu'une équation ne peut avoir que des racines réelles ou des racines imaginaires de même forme que celles du second degré.*

Cette démonstration, observe M. *Lagrange*, ne laisse rien

à desirer comme simple démonstration : mais si on voulait résoudre effectivement une équation en ses facteurs réels de deux dimensions, il serait comme impossible de suivre le procédé indiqué par cette analyse. (Voyez *résol. des équat. numér.*, *note X sur la décomposition des polynomes d'un degré quelconque en facteurs réels.*)

4. On peut déduire de la proposition précédente que *toute fonction algébrique de* $a + b\sqrt{-1}$ *est de même forme* : car égalant la fonction que l'on considère à une inconnue, et faisant disparaître les radicaux qu'elle contient par l'élévation aux puissances, on aura pour déterminer l'inconnue, une équation de degré pair, dont les racines imaginaires seront de la forme $P \pm Q\sqrt{-1}$. Si la fonction est transcendante, mais développable en une suite de termes qui soient algébriques, ou du moins développables eux-mêmes en séries, jusqu'à ce qu'on n'ait plus qu'une suite de termes algébriques, ces termes seront tous de la forme $P \pm Q\sqrt{-1}$; donc leur somme sera aussi de la même forme. Il resterait donc à prouver que toute fonction algébrique est développable en série.

CHAPITRE II.

Des racines imaginaires.

5. Nous allons assigner des caractères qui servent à reconnaître si une équation a des racines imaginaires et des règles pour déterminer, dans certains cas, le nombre de ces racines.

6. Lorsque toutes les racines d'une équation sont réelles, les carrés de leurs différences sont tous positifs; par conséquent l'équation dont ces carrés seront les racines, n'ayant que des racines positives, aura nécessairement les signes de ces termes alternativement positifs et négatifs (Ire sect., chap. XXVIII); de sorte que si cette condition n'a pas lieu, on sera assuré que l'équation proposée comporte nécessairement des racines imaginaires.

Réciproquement, si l'équation aux carrés des différences, n'a que des variations de signes, la proposée n'admettra que des racines réelles; car si les racines n'étaient pas toutes réelles, il y en aurait au moins deux imaginaires, que nous désignerons par $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ et $\alpha - \beta\sqrt{-1}$; le carré de leur différence serait $-4\beta^2$: donc l'équation aux carrés des différences aurait, au moins, une racine réelle négative, et par conséquent, au moins, une permanence (Ire sect., chap. XXIX), ce qui est contre la supposition.

Puisque chaque couple de racines imaginaires de l'équation proposée, introduit, au moins, une racine réelle négative dans l'équation aux carrés des différences, et qu'une racine réelle négative introduit, au moins, une permanence dans les signes, l'équation proposée ne pourra donc avoir un nombre de racines

imaginaires, plus grand que le double du nombre de permanences qui se trouvent dans l'équation aux carrés des différences. Ainsi on pourra toujours reconnaître à l'inspection des signes de cette équation, si toutes les racines de l'équation proposée sont réelles, et le plus grand nombre de racines imaginaires que cette dernière peut admettre.

Appliquons ces théorèmes à quelques équations, et soit d'abord celle du second degré

$$x^2 - Ax + B = 0:$$

l'équation aux carrés des différences est

$$y - A' = 0,$$

dans laquelle

$$A' = A^2 - 4B:$$

or pour que les racines de la proposée soient réelles, il faut que les signes de l'équation aux carrés des différences, soient alternatifs, ou qu'on ait

$$A' > 0 \quad \text{ou} \quad \frac{A^2}{4} - B > 0:$$

elles seront imaginaires dans le cas de

$$A' < 0 \quad \text{ou} \quad \frac{A^2}{4} - B < 0:$$

pour qu'elles soient égales, il faut qu'on ait

$$A' = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{A^2}{4} - B = 0,$$

conclusions que nous avons déduites immédiatement de l'examen des racines (Ire sect., chap. XIX).

Pour que les racines de l'équation

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0,$$

soient toutes réelles, il faut que l'équation aux carrés des

différences des racines, savoir,

$$y^3 - A'y^2 + B'y - C' = 0,$$

ne contienne que des variations de signes, ou qu'on ait

$$A' > 0, \quad B' > 0, \quad C' > 0;$$

si l'une de ces conditions manque, la proposée ne pourra avoir toutes ses racines réelles; elle en aura donc deux imaginaires.

Nous avons trouvé (Ire sect., chap. XXVIII) que l'équation

$$x^3 - 2x - 5 = 0,$$

avait pour équation aux carrés des différences,

$$y^3 - 12y^2 + 36y + 643 = 0;$$

comme cette équation n'a pas les signes alternativement positifs et négatifs, on en conclut sur-le-champ que la proposée a nécessairement deux racines imaginaires, et par conséquent une seule racine réelle.

7. On peut, dans certains cas, déterminer le nombre des racines réelles et celui des racines imaginaires. Soient a, b, c, etc. les racines réelles d'une équation;

$$\alpha \pm \beta \sqrt{-1}, \quad \gamma \pm \delta \sqrt{-1}, \quad \text{etc.}$$

les racines imaginaires : les carrés des différences seront,

1°. entre les racines réelles,

$$\begin{array}{llll} (a-b)^2, & (a-c)^2, & (a-d)^2, & \text{etc.}, \\ (b-c)^2, & (b-d)^2, & (c-d)^2, & \text{etc.}; \end{array}$$

2°. entre les racines imaginaires conjuguées,

$$-4\beta^2, \quad -4\delta^2, \quad \text{etc.};$$

3°. entre les racines réelles et les racines imaginaires,

$$[(\alpha-a)+\beta\sqrt{-1}]^2, \quad [(\alpha-a)-\beta\sqrt{-1}]^2,$$
$$[(\alpha-b)+\beta\sqrt{-1}]^2, \quad [(\alpha-b)-\beta\sqrt{-1}]^2,$$
$$[(\alpha-c)+\beta\sqrt{-1}]^2, \quad [(\alpha-c)-\beta\sqrt{-1}]^2,$$
$$[(\alpha-d)+\beta\sqrt{-1}]^2, \quad [(\alpha-d)-\beta\sqrt{-1}]^2,$$
etc. etc.;

4°. entre les racines imaginaires non conjuguées,

$$[(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)\sqrt{-1}]^2, \quad [(\alpha-\gamma)-(\beta-\delta)\sqrt{-1}]^2,$$
$$[(\alpha-\gamma)+(\beta+\delta)\sqrt{-1}]^2, \quad [(\alpha-\gamma)-(\beta+\delta)\sqrt{-1}]^2.$$
etc. etc.

Soit m le degré de l'équation proposée : on sait que celui de l'équation aux carrés des différences des racines, est $\frac{m(m-1)}{2}=n$; soient p le nombre des racines réelles, $2q$ celui des imaginaires, ensorte que

$$m=p+2q:$$

il est facile de voir que parmi les n racines de l'équation aux carrés des différences, il y en aura nécessairement $\frac{p(p-1)}{2}$ réelles et positives, q réelles et négatives, $2pq$ imaginaires de la troisième espèce distinguée ci-dessus, et $2q(q-1)$ imaginaires de la quatrième espèce, parce que du nombre $\frac{2q(2q-1)}{2}$ des différences entre toutes les racines imaginaires, on doit retrancher q différences déjà prises : on aura donc en total, $2q(p+q-1$ racines imaginaires.

Qu'on effectue partiellement les produits des facteurs correspondans à chacune des classes de racines ci-dessus; le dernier terme de l'équation aux carrés des différences des racines, sera le produit de tous les derniers termes des produits ainsi formés, et il est clair,

1°. Que le produit des facteurs dus aux $\frac{p(p-1)}{2}$ racines réelles et positives, aura son dernier terme positif ou négatif, suivant que le nombre de ces racines, sera pair ou impair.

2°. Que celui des facteurs résultans des racines de la seconde classe, aura toujours son dernier terme positif, quel que soit le nombre des racines;

3°. Que celui des facteurs correspondans à toutes les racines imaginaires, aura toujours le dernier terme positif, puisque ces racines étant deux à deux de la forme $(M+N\sqrt{-1})^2$ et $(M-N\sqrt{-1})^2$, les produits des seconds termes des facteurs conjugués, seront de la forme $(M^2+N^2)^2$, ensorte que le dernier terme sera essentiellement positif.

D'où on conclura que le dernier terme de l'équation aux carrés des différences, sera positif ou négatif, suivant que le nombre $\frac{p(p-1)}{2}$ sera pair ou impair.

Supposons 1°. que ce dernier terme soit positif, auquel cas le nombre $\frac{p(p-1)}{2}$ doit être pair: l'un des deux facteurs sera nécessairement pair, et on aura

$$\frac{p}{2}=2\lambda, \quad \text{d'où} \quad p=4\lambda,$$

ou

$$\frac{p-1}{2}=2\lambda, \quad \text{d'où} \quad p=4\lambda+1;$$

d'où il suit que le nombre des racines réelles de la proposée, sera multiple de 4, s'il doit être pair, c'est-à-dire, si le degré de l'équation est pair; ou multiple de 4 augmenté de l'unité, si le degré de l'équation est impair. Il sera donc impossible que le nombre des racines réelles, soit 2, 3, 6, etc. ou de l'une des formes $4\lambda+2$ ou $4\lambda+3$.

Supposons 2°. que le dernier terme de l'équation aux carrés

des différences, soit négatif, auquel cas $\frac{p(p-1)}{2}$ sera un nombre impair donc alors ou

$$\frac{p}{2} = 2\lambda + 1\,, \quad \text{d'où} \quad p = 4\lambda + 2\,,$$

ou

$$\frac{p-1}{2} = 2\lambda + 1\,, \quad \text{d'où} \quad p = 4\lambda + 3;$$

d'où il suit que le nombre des racines réelles de la proposée, sera nécessairement un multiple de 4 augmenté de 2, si le degré de la proposée est pair, ou qu'il sera un multiple de 4 augmenté de 3, si le degré de la proposée est impair; de sorte qu'il sera impossible que le nombre des racines réelles soit 1, 4, 5, 8, 9, etc., ou, en général, de l'une des formes 4λ et $4\lambda+1$.

Supposons maintenant que l'on sache d'avance que le nombre des racines imaginaires d'une équation, ne peut être plus grand que quatre, et que cette équation soit de degré pair $=2k$: on pourra d'abord reconnaître, d'après l'inspection des signes de l'équation aux carrés des différences, si toutes les racines sont réelles; si elles ne le sont pas, l'équation doit donc avoir deux ou quatre racines imaginaires, ensorte que le nombre des racines réelles est $2k-2$ ou $2k-4$; ces nombres sont pairs, et ils diffèrent de deux unités : donc l'un des deux sera compris dans la formule 4λ, et l'autre dans celle-ci $4\lambda+2$; mais le nombre des racines réelles est de l'une de ces formes 4λ ou $4\lambda+2$, suivant que le dernier terme de l'équation aux carrés des différences, est positif ou négatif; on saura donc lequel de ces deux nombres représente celui des racines réelles.

Si l'équation proposée est de degré impair $=2k+1$, on reconnaîtra de même si toutes les racines sont réelles, en examinant si les signes de l'équation aux carrés des différences, sont alternativement positifs et négatifs : si cette condition n'est pas satisfaite, la proposée aura, d'après ce qu'on sait, *à priori*,

deux ou quatre racines imaginaires ; donc le nombre des racines réelles, sera ou $2k-1$, ou $2k-3$; l'un de ces nombres sera de la forme $4\lambda+1$, et l'autre de la forme $4\lambda+3$: le signe du dernier terme de l'équation aux carrés des différences, fera connaître alors celle de ces deux formules dans laquelle le nombre des racines réelles de la proposée, se trouve compris.

Ainsi, à la seule inspection des signes de l'équation aux carrés des différences, on pourra juger, 1°. si toutes les racines de l'équation proposée sont réelles ou non ; 2°. si le nombre des racines réelles est un de ceux-ci, 1, 4, 5, 8, 9, 12, 13, etc., compris dans les formules 4λ et $4\lambda+1$, ou s'il est de la suite 2, 3, 6, 7, 10, 11, etc. donnée par $4\lambda+2$ et $4\lambda+3$, ce qui suffira pour déterminer le nombre des racines réelles et celui des racines imaginaires dans les équations qui ne passent pas le cinquième degré, et dans toutes celles à l'égard desquelles on saura, *à priori*, que le nombre des racines imaginaires ne peut excéder quatre.

8. Nous allons passer à la recherche des racines imaginaires des équations.

On a prouvé que ces racines sont toujours de la forme $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, α et β étant des quantités réelles, et on a démontré que la substitution de $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ pour x, donnait un résultat de la forme $P+Q\sqrt{-1}$, P et Q étant des quantités réelles, résultat qui ne peut être égal à zéro, à moins qu'on ne pose séparément

$$P=0,\quad Q=0.$$

Mais

$$P=\alpha^m \quad + P'\alpha^{m-1}+P''\alpha^{m-2}+\text{etc.}=0\ldots\ldots(1),$$
$$Q=m\beta\alpha^{m-1}+Q'\alpha^{m-2}+Q''\alpha^{m-3}+\text{etc.}=0\ldots\ldots(2),$$

P', P'', etc., Q', Q'', etc. étant des fonctions connues de β et des coefficiens de la proposée : la question se réduit donc à trouver tous les systèmes de valeurs réelles de α et β qui

satisfont aux deux équations (1) et (2). On y parviendrait en éliminant α suivant la méthode connue (Ire sect., ch. XXV), et cherchant les racines réelles de l'équation en β, et les valeurs correspondantes de α.

Or, on sait que chaque couple de racines imaginaires conjuguées $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$, donne nécessairement dans l'équation aux carrés des différences, une racine réelle négative $-4\beta^2$, d'où il suit qu'en changeant dans celle-ci les signes des puissances impaires de l'inconnue, puis cherchant les racines réelles et positives y', y'', y''', etc., on aura

$$y'=4\beta^2,\qquad y''=4\delta^2,\qquad \text{etc.},$$

d'où

$$\beta=\frac{\sqrt{y'}}{2},\qquad \delta=\frac{\sqrt{y''}}{2},\qquad \text{etc.}$$

Les valeurs de β ainsi connues, on opérera sur les équations (1) et (2), comme pour obtenir l'équation finale en β, qui donnerait les valeurs de β, δ, etc.; mais avant d'arriver à cette équation, on parviendra à un reste du premier degré, de la forme $A\alpha-B$, A et B étant des fonctions de β : ce reste étant égalé à zéro, fournira une équation

$$A\alpha-B=0,$$

qui donnera une valeur de α, correspondante à la valeur substituée pour β.

Lorsque les parties réelles α, γ, etc. des racines imaginaires, seront inégales entr'elles et différeront aussi des racines réelles a, b, c, etc., il est évident que l'équation aux carrés des différences, n'aura d'autres racines négatives que celles-ci $-4\beta^2$, $-4\delta^2$, etc.; de sorte que le nombre de ces racines sera précisément le même que celui des couples de racines imaginaires de la proposée, et, dans ce cas, les équations (1) et (2) ne pourront avoir qu'une seule valeur de α, correspondante à chacune des valeurs de β, et par conséquent le plus grand commun diviseur ne pourra être que du premier degré.

Mais s'il arrive que, parmi les quantités α, γ, etc., il s'en trouve d'égales entr'elles et aux racines réelles a, b, c, etc., alors l'équation aux carrés des différences aura nécessairement plus de racines négatives que la proposée n'aura de couples de racines imaginaires. En effet, soit $a=\alpha$, les deux racines imaginaires $[(\alpha-a)+\beta\sqrt{-1}]^2$, $[(\alpha-a)-\beta\sqrt{-1}]^2$ deviendront $-\beta^2$, $-\beta^2$, et par conséquent réelles négatives : de sorte que si la proposée ne contient que les deux imaginaires $\alpha+\beta\sqrt{-1}$, $\alpha-\beta\sqrt{-1}$, l'équation aux carrés des différences contiendra, dans le cas de $\alpha=a$, outre la racine réelle négative $-4\beta^2$, ces deux autres $-\beta^2$, $-\beta^2$, égales entr'elles ; d'où l'on voit que lorsque l'équation aux carrés des différences a trois racines réelles négatives dont deux sont égales entr'elles, alors la proposée peut avoir ou deux racines imaginaires, ou six, savoir,

$$(\alpha\pm\beta\sqrt{-1}),\quad (\gamma\pm\frac{\beta}{2}\sqrt{-1}),\quad (\epsilon\pm\frac{\beta}{2}\sqrt{-1}).$$

Si la proposée contient quatre racines imaginaires

$$(\alpha\pm\beta\sqrt{-1}),\quad (\gamma\pm\delta\sqrt{-1}),$$

alors l'équation aux carrés des différences contiendra les deux racines réelles négatives $-4\beta^2$, $-4\delta^2$; mais si $a=\alpha$, elle aura encore les deux suivantes $-\beta^2$, $-\beta^2$; si de plus $b=\gamma$, elle en aura deux autres $-\delta^2$, $-\delta^2$; enfin si on avait $\alpha=\gamma$, alors les quatre racines imaginaires

$$[(\alpha-\gamma)+(\beta-\delta)\sqrt{-1}]^2,\quad [(\alpha-\gamma)-(\beta-\delta)\sqrt{-1}]^2,$$
$$[(\alpha-\gamma)+(\beta+\delta)\sqrt{-1}]^2,\quad [(\alpha-\gamma)-(\beta+\delta)\sqrt{-1}]^2,$$

deviendraient

$$-(\beta-\delta)^2,\quad -(\beta-\delta)^2,\quad -(\beta+\delta)^2,\quad -(\beta+\delta)^2,$$

c'est-à-dire, réelles négatives et égales deux à deux.

D'où il est aisé de conclure,

1°. Que lorsque toutes les racines réelles négatives de l'équation aux carrés des différences, sont inégales entr'elles, alors la proposée a nécessairement autant de couples de racines imaginaires qu'il y a de ces racines ;

2°. Que si, parmi les racines réelles négatives de l'équation aux carrés des différences, il s'en trouve d'égales entr'elles, alors chaque racine inégale, s'il y en a, donnera toujours, comme on vient de le voir, deux racines imaginaires conjuguées ; mais chaque couple de racines négatives égales, telles que $-4\beta^2$, $-4\beta^2$ qui résultent de $\delta=\beta$, indiquent quatre racines imaginaires

$$\alpha\pm\beta\sqrt{-1}, \qquad \gamma\pm\beta\sqrt{-1},$$

tandis que celles-ci, $-\beta^2, -\beta^2, -(\beta-\delta)^2, -(\beta-\delta)^2$, etc. qui viennent, par exemple, de $a=\alpha$ et de $\alpha=\gamma$, n'en donnent aucune. Trois racines négatives égales fourniront six racines imaginaires

$$\alpha\pm\beta\sqrt{-1}, \qquad \gamma\pm\delta\sqrt{-1}, \qquad \epsilon\pm\lambda\sqrt{-1},$$

si on a $\beta=\delta=\lambda$; ou deux seulement, lorsque, par exemple, $a=\gamma$ et $\delta=2\beta$, auquel cas on a encore trois racines égales chacune à $-4\beta^2$. Quatre racines négatives égales donneront huit racines imaginaires

$$\alpha\pm\zeta\sqrt{-1}, \quad \gamma\pm\delta\sqrt{-1}, \quad \epsilon\pm\lambda\sqrt{-1}, \quad \mu\pm\nu\sqrt{-1},$$

si on a $\zeta=\delta=\lambda=\nu$; ou quatre racines imaginaires, si $\alpha=\gamma=\epsilon$, $\delta=2\zeta$, $\lambda=2\zeta$; ou enfin elles n'en donneront aucune, si, par exemple, les coefficiens β, δ de $\sqrt{-1}$ étant égaux, on a de plus $a=\alpha$, $b=\gamma$, α, γ étant les termes réels dans les racines imaginaires.

Or soient $-y'$, $-y'$ deux racines égales négatives de l'équation aux carrés des différences ; on fera, comme ci-dessus,

$$\beta=\frac{\sqrt{y'}}{2};$$

2..

mais il ne faudra plus substituer cette valeur dans l'équation

$$A\alpha - B = o,$$

parce que (Ire sect.) on en déduirait $\alpha = \frac{o}{o}$, ce qui ne ferait rien connaître : on fera donc les substitutions dans le reste précédent qui sera du second degré en α ; ce reste étant égalé à zéro, donnera ou deux racines réelles, ou deux racines imaginaires. Dans le premier cas, nommant α' et α'' ces deux racines, on aura les quatre racines imaginaires

$$\alpha' \pm \beta\sqrt{-1}, \quad \alpha'' \pm \beta\sqrt{-1}.$$

Dans le second cas, les valeurs de α étant imaginaires, contre l'hypothèse, on en conclura que les deux racines $-y'$, $-y'$ ne donneront pas de racines imaginaires dans la proposée. Si l'équation aux carrés des différences comportait trois racines négatives égales $-y'$, $-y'$, $-y'$, à la valeur

$$\beta = \frac{\sqrt{y'}}{2},$$

correspondraient trois valeurs de α ; d'où il suit que si l'on substituait la valeur de β dans le reste du premier ou du second degré, on aurait deux équations qui se réduiraient à zéro, indépendamment de α : on fera donc la substitution dans le reste du troisième degré en α ; ce reste égalé à zéro, donnera, pour α, ou trois valeurs réelles, ou une réelle et deux imaginaires : dans le premier cas, on aura six racines imaginaires, et deux seulement dans le second, les valeurs imaginaires de α devant toujours être rejetées.

9. Appliquons ce qui vient d'être dit, 1°. à la recherche des deux racines imaginaires de l'équation

$$x^3 - 2x - 5 = o,$$

traitée (Ire sect.), et pour laquelle nous avons trouvé l'équation aux carrés des différences

$$y^3 - 12y^2 + 36y + 643 = o :$$

changeant y en $-y$, puis les signes, on aura

$$y^3 + 12y^2 + 36y - 643 = 0;$$

et il ne s'agira plus que de chercher une racine réelle et positive de cette équation qui comporte bien une telle racine : sa partie entière sera 5, et par la méthode donnée (Ire sect., chap. XXX), on trouvera

$$y' = 5 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{6 + \text{etc.}}}}$$

d'où l'on tire ces fractions

$$\frac{5}{1}, \quad \frac{31}{6}, \quad \frac{160}{31}, \quad \frac{991}{192}, \quad \text{etc.}$$

Connaissant ainsi y', on aura

$$\beta = \frac{\sqrt{y'}}{2}:$$

substituant $\alpha + \beta\sqrt{-1}$ pour x dans la proposée, et faisant deux équations séparées l'une avec les termes réels, l'autre avec les coefficiens de $\sqrt{-1}$, on aura

$$\alpha^3 - (3\beta^2 + 2)\alpha - 5 = 0,$$
$$3\alpha^2 - \beta^2 - 2 = 0;$$

si l'on cherche le plus grand commun diviseur de ces deux polynomes, et qu'on ne pousse la division que jusqu'au reste du premier degré en α, on déduira de ce reste égalé à zéro (Ire sect.)

$$\alpha = -\frac{15}{4(2\beta^2 + 1)}:$$

ainsi on aura en nombre les deux racines imaginaires $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, $\alpha - \beta\sqrt{-1}$ de l'équation proposée.

2°. Soit l'équation proposée

$$x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0:$$

composée avec les facteurs $x-1$, $x-1-\sqrt{-1}$, $x-1+\sqrt{-1}$, et dont les racines sont $x=1$, $x=1+\sqrt{-1}$, $x=1-\sqrt{-1}$; si l'on y substitue $\alpha+\beta\sqrt{-1}$ pour x, on aura à éliminer entre les deux équations

$$3(\alpha-1)\beta^2+\alpha^3-3\alpha^2+4\alpha-2=0,$$
$$\beta^2-3\alpha^2+6\alpha-4=0,$$

et on trouvera pour équation finale en α,

$$4\alpha^3-12\alpha^2+13\alpha-5=0,$$

et pour reste en β,

$$\beta^2-3\alpha^2+6\alpha-4:$$

de l'équation finale qui est du troisième degré, quoique la proposée ne donne que deux racines imaginaires, on tire ces trois racines

$$\alpha=1, \quad \alpha=1\pm\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}:$$

à la première répond $\beta=\pm1$, et conséquemment,

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=1\pm\sqrt{-1}:$$

pour la seconde racine $\alpha=1+\frac{1}{2}\sqrt{-1}$, on trouve

$$\beta=\pm\tfrac{1}{2};$$

d'où l'on conclut

$$\alpha+\beta\sqrt{-1}=1+\sqrt{-1}, \quad \alpha+\beta\sqrt{-1}=1:$$

enfin pour $\alpha=1-\frac{1}{2}\sqrt{-1}$, on obtient

$$\beta=\pm\tfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad \alpha+\beta\sqrt{-1}=1, \quad \alpha+\beta\sqrt{-1}=1-\sqrt{-1}.$$

Ainsi, en définitif, les valeurs mêmes imaginaires de α et β ramènent à des racines de la proposée, mais il est inutile d'en tenir compte. Remarquons qu'en posant $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, on n'exprime pas essentiellement une racine imaginaire, puisqu'elle devient réelle par $\beta=0$, et par β imaginaire ou de la forme $\beta'\sqrt{-1}$: lorsqu'on ne veut que les racines imaginaires

de la proposée, il ne faut prendre pour α et β que des valeurs réelles.

3°. Soit l'équation

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 5 = 0:$$

en posant toujours $x = \alpha + \beta\sqrt{-1}$, et égalant toujours à zéro la partie réelle et la partie imaginaire, on obtient ces deux équations

$$\alpha^4 + 4\alpha^3 + (6 - 6\beta^2)\alpha^2 + (4 - 12\beta^2)\alpha + \beta^4 - 6\beta^2 + 5 = 0,$$
$$\alpha^3 + 3\alpha^2 + (3 - \beta^2)\alpha + 1 - \beta^2 = 0:$$

on déduit de la dernière,

$$\beta^2 = 1 + 2\alpha + \alpha^2 = (1 + \alpha)^2;$$

cette valeur substituée dans la première équation, donnera la suivante,

$$4\alpha^4 + 16\alpha^3 + 24\alpha^2 + 16\alpha = 0,$$

qui a pour deux de ses racines 0 et -2. Ces deux valeurs de α, reportées dans l'expression de β, donnent l'une et l'autre,

$$\beta^2 = 1, \quad \text{d'où} \quad \beta = \pm 1;$$

donc

$$x = -2 \pm \sqrt{-1}, \quad x = \pm\sqrt{-1}.$$

Or,

$$(x + 2 - \sqrt{-1})(x + 2 + \sqrt{-1}) = x^2 + 4x + 5,$$
$$(x - \sqrt{-1})(x + \sqrt{-1}) = x^2 + 1;$$

et ces deux facteurs doubles, multipliés entr'eux, donnent la proposée : on remarquera que les deux autres racines de α, étant imaginaires, doivent être rejetées.

On peut aussi parvenir au même résultat par les considérations suivantes : le facteur double résultant du produit des facteurs imaginaires

$$x = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \quad x = \alpha - \beta\sqrt{-1}$$

sera

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2;$$

la proposée devant être divisible par ce facteur double, si on exécute la division, et qu'on la pousse jusqu'au reste du premier degré en x, il faudra dire que ce reste est nul, indépendamment de toute valeur de x; donc, ce reste étant de la forme $Ax - B$, on devra poser

$$A = 0, \quad B = 0,$$

équation au moyen desquelles on évaluera α et β.

Soit, pour exemple, l'équation traitée précédemment,

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 5 = 0:$$

en la divisant par

$$x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2,$$

on aura pour quotient

$$x^2 + (4 + 2\alpha)\, x + 6 + 8\alpha + 3\alpha^2 - \beta^2,$$

et pour reste du premier degré,

$$(4 + 12\alpha + 12\alpha^2 + 4\alpha^3 - 4\alpha\beta^2 - 4\beta^2)\, x$$
$$- (\alpha^2 + \beta^2)(6 + 8\alpha + 3\alpha^2 - \beta^2) + 5;$$

d'où résultent les deux équations

$$(1 + \alpha)^2 = \beta^2,$$
$$(\alpha^2 + \beta^2)(6 + 8\alpha + 3\alpha^2 - \beta^2) + 5 = 0.$$

La valeur de β^2 tirée de la première et substituée dans la seconde, donne

$$4\alpha^4 + 16\alpha^3 + 24\alpha^2 + 16\alpha = 0,$$

d'où on déduira les valeurs de α et β trouvées ci-dessus.

4°. Soit enfin l'équation

$$x^3 - x^2 + 3x + 5 = 0,$$

laquelle divisée par $x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$, donne pour quotient

$$x + 2\alpha - 1,$$

et pour reste ;

$$(3+3\alpha^2-2\alpha-\beta^2)x+5-2\alpha^3+\alpha^2+(1-2\alpha)\beta^2,$$

d'où l'on déduit, d'après ce qu'on dit plus haut,

$$3+3\alpha^2-2\alpha-\beta^2=0,$$
$$5-2\alpha^3+\alpha^2+(1-2\alpha)\beta^2=0.$$

Substituant dans la seconde équation la valeur de β^2, prise dans la première, on trouve une équation en α qui donne

$$\alpha=1,$$

racine à laquelle correspond

$$\beta=2.$$

Le facteur double est donc

$$x^2-2x+5=0,$$

qui donne

$$x=1\pm 2\sqrt{-1}$$

pour les deux racines imaginaires de la proposée.

Lorsque l'équation dont on cherche les racines imaginaires, est d'un degré plus élevé que le quatrième, les équations qui donnent α et β, sont, pour l'ordinaire, d'un degré tellement élevé, qu'elles ne sont d'aucune utilité dans la pratique.

CHAPITRE III.

Suite des fractions continues.

10. Nous avons donné (Ire sect., chap. XXXI) les élémens des fractions continues; nous allons continuer et compléter l'exposition de cette importante doctrine.

11. Nous appliquerons d'abord la règle donnée (chap. XXXI), au développement de la fraction

$$\frac{b+b'+b''+b'''+\text{etc.}}{a+a'+a''+a'''+\text{etc.}},$$

dont les deux termes sont des suites infinies : divisant le dénominateur par le numérateur, et ne prenant qu'un terme au quotient, on aura

$$\frac{a+a'+a''+\text{etc.}}{b+b'+b''+\text{etc.}}$$

$$=\frac{a}{b}+\frac{\left(a'-\frac{ab'}{b}\right)+\left(a''-\frac{ab''}{b}\right)+\left(a'''-\frac{ab'''}{b}\right)+\text{etc.}}{b+b'+b''+\text{etc.}}.$$

Posant

$$a'-\frac{ab'}{b}=c,\quad a''-\frac{ab''}{b}=c',\quad a'''-\frac{ab'''}{b}=c'',\quad \text{etc.},$$

on aura le second quotient

$$\frac{b+b'+b''+b'''+\text{etc.}}{c+c'+c''+c'''+\text{etc.}}$$

$$=\frac{b}{c}+\frac{\left(b'-\frac{bc'}{c}\right)+\left(b''-\frac{bc''}{c}\right)+\left(b'''-\frac{bc'''}{c}\right)+\text{etc.}}{c+c'+c''+\text{etc.}}.$$

Faisant de nouveau

$$b' - \frac{bc'}{c} = d, \quad b'' - \frac{bc''}{c} = d', \quad b''' - \frac{bc'''}{c} = d'', \quad \text{etc.};$$

on aura le troisième quotient

$$\frac{c + c' + c'' + c''' + \text{etc.}}{d + d' + d'' + d''' + \text{etc.}} = \frac{c}{d} + \frac{\left(c' - \frac{cd'}{d}\right) + \left(c'' - \frac{cd''}{d}\right) + \left(c''' - \frac{cd'''}{d}\right) + \text{etc.}}{d + d' + d'' + \text{etc.}},$$

et ainsi de suite. De ces quotiens, on conclut

$$\frac{b + b' + b'' + b''' + \text{etc.}}{a + a' + a'' + a''' + \text{etc.}} = \cfrac{1}{\cfrac{a}{b} + \cfrac{1}{\cfrac{b}{c} + \cfrac{1}{\cfrac{c}{d} + \cfrac{1}{\cfrac{d}{e} + \cfrac{1}{\cfrac{e}{f} + \text{etc.}}}}}}$$

et on aura pour déterminer les quantités c, d, e, f, etc.; ces équations

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|l}
c = a' - \frac{ab'}{b} & & & & & \\
c' = a'' - \frac{ab''}{b} & d = b' - \frac{bc'}{c} & & & & \\
c'' = a''' - \frac{ab'''}{b} & d' = b'' - \frac{bc''}{c} & e = c' - \frac{cd'}{d} & & & \\
c''' = a^{\text{iv}} - \frac{ab^{\text{iv}}}{b} & d'' = b''' - \frac{bc'''}{c} & e' = c'' - \frac{cd''}{d} & f = d' - \frac{de'}{e} & & \\
c^{\text{iv}} = a^{\text{v}} - \frac{ab^{\text{v}}}{b} & d''' = b^{\text{iv}} - \frac{bc^{\text{iv}}}{c} & e'' = c''' - \frac{cd'''}{d} & f = d'' - \frac{de''}{e} & g = e' - \frac{ef'}{f} & \text{etc.} \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} &
\end{array}$$

Soit l'expression $\sqrt{\frac{x^2}{y^2-1}}$ à réduire en fraction continue : on trouvera après avoir développé $(y^2-1)^{\frac{1}{2}}$, et comparé avec la proposée,

$$b=x,\quad b'=0,\qquad b''=0,\qquad b'''=0,\quad \text{etc.}$$
$$a=y,\quad a'=-\tfrac{1}{2}y^{-1},\quad a''=-\tfrac{1}{8}y^{-3},\quad a'''=-\tfrac{1}{16}y^{-5};$$
$$a^{\text{IV}}=-\tfrac{5}{128}y^{-7},\quad a^{\text{V}}=-\tfrac{7}{256}y^{-9},\quad \text{etc.},$$

d'où résultent, d'après les relations ci-dessus,

$$c=-\tfrac{1}{2}y^{-1},\quad d=-\tfrac{1}{4}xy^{-2},\quad e=\tfrac{1}{8}y^{-3},\quad f=\tfrac{1}{16}xy^{-4},\quad \text{etc.}:$$

faisant ces substitutions dans l'expression générale de la fraction continue, on trouve d'abord

$$\sqrt{\frac{x^2}{y^2-1}}=\cfrac{1}{\cfrac{y}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{x}{-\frac{1}{2}y^{-1}}+\cfrac{1}{\cfrac{-\frac{1}{2}y^{-1}}{-\frac{1}{4}xy^{-2}}+\cfrac{1}{\cfrac{-\frac{1}{4}xy^{-2}}{\frac{1}{8}y^{-3}}+\cfrac{1}{\cfrac{\frac{1}{8}y^{-3}}{\frac{1}{16}xy^{-4}}+\text{etc.}}}}}}$$

et, toutes réductions faites, en donnant la plus grande attention aux signes, on obtient

$$\sqrt{\frac{x^2}{y^2-1}}=\cfrac{x}{y-\cfrac{1}{2y-\cfrac{1}{2y-\cfrac{1}{2y-\cfrac{1}{2y}}}}},\ \text{etc.}$$

Prenons pour seconde application la série

$$\frac{x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{7}x^7+\text{etc.}}{1+0+0+0+\text{etc.}};$$

qui représente (Ire sect., chap. XX) le développement de $\frac{1}{2}l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$, l désignant ici *logarithme néperien*, développement que nous démontrerons autrement dans ce Traité : on a dans ce cas,

$$\begin{array}{lllll} a=1, & a'=0, & a''=0, & a'''=0, & \text{etc.}, \\ b=x, & b'=\frac{1}{3}x^3, & b''=\frac{1}{5}x^5, & b'''=\frac{1}{7}x^7, & \text{etc.}, \end{array}$$

$$c=-\tfrac{1}{3}x^2,\ d=-\tfrac{1}{15}x^3,\ e=+\tfrac{7}{7.5}x^4,\ f=+\tfrac{64}{3.5.7.9}x^5,\ \text{etc.};$$

donc

$$\frac{1}{2}l\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

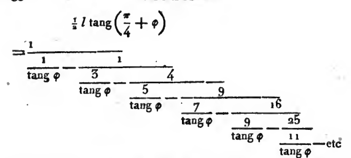
$$=\cfrac{1}{\cfrac{1}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{x}{-\frac{1}{3}x^2}+\cfrac{1}{\cfrac{-\frac{1}{3}x^2}{-\frac{4}{15}x^3}+\cfrac{1}{\cfrac{-\frac{4}{15}x^3}{\frac{8}{7.5}x^4}+\cfrac{1}{\cfrac{\frac{3}{7.5}x^4}{\frac{64}{3.5.7.9}x^5}+\text{etc.}}}}}}$$

$$=\cfrac{1}{\cfrac{1}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{3}{x}-\cfrac{4}{\cfrac{5}{x}-\cfrac{9}{\cfrac{7}{x}-\cfrac{16}{\cfrac{9}{x}-\cfrac{25}{\cfrac{11}{x}-\text{etc.}}}}}}}$$

Lorsque $x=\text{tang}\,\varphi$, on a (Trig.)

$$\frac{1}{2}l\left(\frac{1+\text{tang}\,\varphi}{1-\text{tang}\,\varphi}\right)=\frac{1}{2}l\,\text{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right),$$

π désignant la demi-circonférence ; donc



$$\tfrac{1}{2}\, l \,\text{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right) = \cfrac{1}{\cfrac{1}{\text{tang}\,\varphi} - \cfrac{1}{\cfrac{3}{\text{tang}\,\varphi} - \cfrac{4}{\cfrac{5}{\text{tang}\,\varphi} - \cfrac{9}{\cfrac{7}{\text{tang}\,\varphi} - \cfrac{16}{\cfrac{9}{\text{tang}\,\varphi} - \cfrac{25}{\cfrac{11}{\text{tang}\,\varphi} - \text{etc}}}}}}}$$

Nous démontrerons aussi par la suite que x étant un arc dont la tangente $= t$, on a

$$x = t - \tfrac{1}{3}\, t^3 + \tfrac{1}{5}\, t^5 - \tfrac{1}{7}\, t^7 + \tfrac{1}{9}\, t^9 - \text{etc.};$$

donc

$$a = 1, \quad a' = 0, \quad a'' = 0, \quad a''' = 0,$$
$$b = t, \; b' = -\tfrac{1}{3} t^3, \; b'' = \tfrac{1}{5} t^5, \; b''' = -\tfrac{1}{7} t^7, \; b^{\text{IV}} = \tfrac{1}{9} t^9, \; \text{etc.},$$
$$c = \tfrac{1}{3} t^2, \quad d = \tfrac{4}{15} t^3, \quad e = \tfrac{3}{35} t^4; \quad \text{etc.};$$

d'où l'on conclut, après les réductions,

$$x = \cfrac{1}{\cfrac{2}{\text{tang}\,x} + \cfrac{1}{\cfrac{3}{\text{tang}\,x} + \cfrac{4}{\cfrac{5}{\text{tang}\,x} + \cfrac{9}{\cfrac{7}{\text{tang}\,x} + \cfrac{16}{\cfrac{9}{\text{tang}\,x} + \text{etc.}}}}}}$$

Dans l'un des chapitres suivans, nous développerons la tangente en fraction continue, suivant les puissances de l'arc.

On voit donc, par ce qui précède, qu'on pourra résoudre en fraction continue toute expression qu'on saura développer en une série.

12. *Soit* $\frac{m}{m'}$ *une fraction dont le dénominateur* m' *soit*

moindre que le dénominateur Q′ d'une des fractions convergentes $\frac{Q}{Q'}$, *je dis que la fraction* $\frac{Q}{Q'}$ *exprimera plus exactement que* $\frac{m}{m'}$, *la valeur totale a de la fraction continue.*

Pour que la fraction $\frac{m}{m'}$ tombât entre $\frac{Q}{Q'}$ et a, il faudrait qu'on eût

$$\frac{Q}{Q'} - \frac{m}{m'} < \frac{Q}{Q'} - a,$$

et, *à fortiori*,

$$\frac{Q}{Q'} - \frac{m}{m'} < \frac{1}{Q'Q'},$$

abstraction faite du signe (Iʳᵉ sect., chap. XXXI) : cette inégalité revient à

$$\frac{Qm' - Q'm}{Q'm'} < \frac{1}{Q'Q'};$$

or Q, Q′, m, m' étant des nombres entiers, le numérateur $Qm' - Q'm$ ne peut être, abstraction faite du signe, un nombre moindre que l'unité : on a d'ailleurs, par hypothèse,

$$m' < Q', \quad \text{d'où} \quad m'Q' < Q'^2;$$

donc on aurait, au contraire,

$$\frac{Qm' - Q'm}{Q'm'} > \frac{1}{Q'Q'};$$

donc la fraction $\frac{m}{m'}$ ne peut tomber, comme on l'a supposé, entre $\frac{Q}{Q'}$ et a.

13. Il résulte de cette proposition que *la différence entre deux fractions consécutives, est aussi petite qu'il est possible, ensorte qu'entre ces fractions, il ne peut tomber aucune autre fraction quelconque, à moins qu'elle n'ait un dénominateur plus grand que ceux de ces fractions.*

En effet, soient les deux fractions consécutives $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$; on aura

$$\frac{P}{P'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{1}{Q'R'};$$

mais la différence

$$\frac{m}{m'} - \frac{Q}{Q'} = \frac{mQ' - m'Q}{m'Q'} > \frac{1}{m'Q'},$$

et la différence

$$\frac{m}{m'} - \frac{R}{R'} = \frac{mR' - m''R}{m'R'} > \frac{1}{m'R'};$$

donc la première différence ne peut devenir $< \frac{1}{Q'R'}$, qu'autant que m' sera $> R'$, et la seconde ne peut être $< \frac{1}{Q'R'}$, que sous la condition $m' > Q'$.

14. Les fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B}{B'}$.... $\frac{O}{O'}$, $\frac{P}{P'}$, $\frac{Q}{Q'}$, etc. ont été appelées *fractions principales*, parce qu'elles convergent le plus qu'il est possible vers la valeur totale a de la fraction continue : on a vu (Ire sect.) que ces fractions principales sont alternativement plus petites et plus grandes que a; d'où il résulte qu'on pourra les séparer en deux classes,

$$\frac{A}{A'},\quad \frac{C}{C'},\quad \frac{E}{E'},\quad \text{etc.},$$

$$\frac{B}{B'},\quad \frac{D}{D'},\quad \frac{F}{F'},\quad \text{etc.};$$

la première composée de fractions toutes plus petites que a, et qui iront en augmentant vers a, et la seconde de fractions toutes plus grandes que a, et qui reviendront en diminuant vers a.

Examinons maintenant chacune de ces deux séries en particulier.

Dans la première, on aura (Ire sect.)

$$\frac{C}{C'}-\frac{A}{A'}=\frac{CA'-AC'}{A'C'}=\frac{A'(B\gamma+A)-A(B'\gamma+A')}{A'C'}=\frac{\gamma}{A'C'},$$

$$\frac{E}{E'}-\frac{C}{C'}=\frac{EC'-CE'}{E'C'}=\frac{C'(D\epsilon+C)-C(D'\epsilon+C')}{C'E'}=\frac{\epsilon}{C'E'}.$$

etc.

Dans la seconde, on aura

$$\frac{B}{B'}-\frac{D}{D'}=\frac{BD'-DB'}{B'D'}=\frac{B(C'\delta+B')-B'(C\delta+B)}{B'D'}=\frac{\delta}{B'D'},$$

$$\frac{D}{D'}-\frac{F}{F'}=\frac{DF'-FD'}{D'F'}=\frac{D(E'\xi+D')-D'(E\xi+D)}{F'D'}=\frac{\xi}{F'D'},$$

etc.

Si les nombres γ, δ, ϵ, etc. sont égaux à l'unité, il sera impossible, comme on l'a démontré ci-dessus (13), qu'entre deux fractions consécutives quelconques de l'une ou de l'autre des deux séries précédentes, il se trouve aucune autre fraction dont le dénominateur tombe entre ceux de ces fractions, ou, en général, dont le dénominateur soit moindre que le plus grand des deux dénominateurs. Mais il n'en sera plus ainsi lorsque les nombres γ, δ, ϵ, etc. seront différens de l'unité ; supposons, par exemple, que γ soit 4 : on aura

$$C = 4B + A,$$
$$C' = 4B' + A',$$

et on pourra, entre les fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{C}{C'}$, insérer les *trois fractions intermédiaires*

$$\frac{B+A}{B'+A'},\quad \frac{2B+A}{2B'+A'},\quad \frac{3B+A}{3B'+A'}:$$

or il est clair que les dénominateurs de ces fractions forment une suite croissante par différences égales depuis A' jusqu'à C', et les numérateurs depuis A jusqu'à C, et nous allons voir

que les fractions elles-mêmes croissent aussi continuellement depuis $\frac{A}{A'}$ jusqu'à $\frac{C}{C'}$, ensorte qu'il serait maintenant impossible d'insérer dans la série

$$\frac{A}{A'},\ \frac{B+A}{B'+A'},\ \frac{2B+A}{2B'+A'},\ \frac{3B+A}{3B'+A'},\ \frac{4B+A}{4B'+A'}=\frac{C}{C'},$$

aucune fraction dont la valeur tombât entre celles de deux fractions consécutives, et dont le dénominateur se trouvât aussi entre ceux des mêmes fractions ; car si l'on prend les différences entre les fractions précédentes, on aura, à cause de $BA'-AB'=1$,

$$\frac{A+B}{B'+A'}-\frac{A}{A'}=\frac{1}{A'(B'+A')},$$
$$\frac{2B+A}{2B'+A'}-\frac{B+A}{B'+A'}=\frac{1}{(B'+A')(2B'+A')},$$
$$\frac{3B+A}{3B'+A'}-\frac{2B+A}{2B'+A'}=\frac{1}{(2B'+A')(3B'+A')},$$
$$\frac{C}{C'}-\frac{3B+A}{3B'+A'}=\frac{1}{(3B'+A')C'}:$$

d'où l'on voit d'abord que les fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B+A}{B'+A'}$, etc. vont en augmentant, puisque leurs différences sont toutes positives ; ensuite, comme ces différences sont égales à l'unité divisée par le produit des deux dénominateurs, il est impossible qu'entre deux fractions consécutives de la série précédente, il puisse tomber une fraction quelconque $\frac{m}{m'}$, si le dénominateur m' tombe entre les dénominateurs de ces fractions, ou, en général, s'il est plus petit que le plus grand des deux dénominateurs, comme nous l'avons démontré précédemment. De plus, les fractions dont il s'agit sont toutes plus petites que la vraie valeur de a : en effet, (Ire sect., chap. XXXI)

$$\frac{B}{B'}-a=\frac{1}{B'(B'y+A')},$$

la valeur de y étant définie (*idem*) : en divisant $B+A$ par $B'+A'$, on trouve

$$\frac{B+A}{B'+A'}=\frac{B}{B'}-\frac{1}{B'(B'+A')},$$

d'où

$$\frac{B}{B'}-\frac{B+A}{B'+A'}=\frac{1}{B'(B'+A')};$$

donc

$$\frac{B}{B'}-a<\frac{B}{B'}-\frac{B+A}{B'+A'},$$

et comme ces différences sont de même signe, on doit conclure que $\frac{B}{B'}$ étant $>a$, on a, au contraire, $\frac{B+A}{B'+A'}<a$, ce qui est vrai des autres fractions $\frac{2B+A}{2B'+A'}$, etc. : donc chacune des fractions $\frac{B+A}{B'+A'}$, $\frac{2B+A}{2B'+A'}$, $\frac{3B+A}{3B'+A'}$, etc., d'ailleurs croissantes, approchera plus de a que de $\frac{B}{B'}$. Or on trouve

$$\frac{A}{A'}-\frac{B}{B'}=\frac{-1}{A'B'},$$

$$\frac{B+A}{B'+A'}-\frac{B}{B'}=\frac{-1}{(B'+A')B'},$$

$$\frac{2B+A}{2B'+A'}-\frac{B}{B'}=\frac{-1}{(2B'+A')B'},$$

$$\frac{3B+A}{3B'+A'}-\frac{B}{B'}=\frac{-1}{(3B'+A')B'},$$

$$\frac{C}{C'}-\frac{B}{B'}=\frac{-1}{C'B'};$$

donc, puisque ces différences sont aussi égales à l'unité divisée par le produit des dénominateurs, on pourra prouver de la même manière que ci-dessus, qu'aucune fraction $\frac{m}{m'}$ ne pourra

tomber entre l'une quelconque des fractions $\frac{A}{A'}$, $\frac{B+A}{B'+A'}$, $\frac{2B+A}{2B'+A'}$, etc. et la fraction $\frac{B}{B'}$, si le dénominateur m' est plus petit que celui de la même fraction; d'où il suit que *chacune de ces fractions approche plus de la valeur* a *que ne pourrait en approcher toute autre fraction moindre que* a, *et qui aurait un dénominateur plus petit, c'est-à-dire, qui serait conçue en termes plus simples.*

Nous n'avons considéré que les fractions intermédiaires entre $\frac{A}{A'}$ et $\frac{C}{C'}$: il en sera de même des fractions intermédiaires entre $\frac{C}{C'}$ et $\frac{E}{E'}$, entre $\frac{E}{E'}$ et $\frac{G}{G'}$, si ε, η, etc. sont des nombres plus grands que l'unité.

On peut aussi appliquer à l'autre série $\frac{B}{B'}$, $\frac{D}{D'}$, $\frac{F}{F'}$, etc. tout ce que nous venons de dire relativement à la première série $\frac{A}{A'}$, $\frac{C}{C'}$, etc., de sorte que si les nombres δ, ζ, etc. sont plus grands que l'unité, on pourra insérer entre $\frac{B}{B'}$ et $\frac{D}{D'}$, entre $\frac{D}{D'}$ et $\frac{F}{F'}$, etc., différentes fractions intermédiaires, toutes plus grandes que a, mais qui iront continuellement en diminuant, et qui seront telles qu'elles exprimeront la quantité a plus exactement que ne pourrait faire toute autre fraction plus grande que a, et qui serait conçue en termes plus simples.

De plus, si β est aussi un nombre plus grand que l'unité, on pourra pareillement placer avant la fraction $\frac{B}{B'}$, les fractions $\frac{A+1}{1}$, $\frac{2A+1}{2}$, $\frac{3A+1}{3}$, etc. jusqu'à $\frac{\beta A+1}{\beta}=\frac{B}{B'}$, et ces fractions auront les mêmes propriétés que les autres fractions

intermédiaires. De cette manière, on aura ces deux suites complètes de fractions convergentes vers la quantité a :

Fractions croissantes et plus petites que a.

$$\frac{A}{A'},\ \frac{B+A}{B'+A'},\ \frac{2B+A}{2B'+A'} \cdots\cdots \frac{(\gamma-1)B+A}{(\gamma-1)B'+A'},$$

$$\frac{C}{C'},\ \frac{D+C}{D'+C'},\ \frac{2D+C}{2D'+C'} \cdots\cdots \frac{(\varepsilon-1)D+C}{(\varepsilon-1)D'+C'},$$

$$\frac{E}{E'},\ \frac{F+E}{F'+E'},\ \text{etc.}$$

Fractions décroissantes et plus grandes que a.

$$\frac{A+1}{1},\ \frac{2A+1}{2},\ \frac{3A+1}{3} \cdots\cdots \frac{(\beta-1)A+1}{\beta-1},$$

$$\frac{B}{B'},\ \frac{C+B}{C'+B'},\ \frac{2C+B}{2C'+B'} \cdots\cdots \frac{(\delta-1)C+B}{(\delta-1)C'+B'},$$

$$\frac{D}{D'},\ \frac{E+D}{E'+D'},\ \text{etc.}$$

Si la quantité a est irrationnelle, les deux séries précédentes iront à l'infini, puisque la série des fractions principales $\frac{A}{A'}$; $\frac{B}{B'}$, etc. va d'elle-même à l'infini.

Les fractions intermédiaires sont appelées *fractions secondaires.*

15. Mais le nombre a étant rationnel et égal à une fraction quelconque $\frac{V}{V'}$, on sait que la série des fractions principales est terminée, et que la dernière fraction de cette série, est la fraction $\frac{V}{V'}$; donc cette fraction terminera nécessairement aussi l'une des deux séries ci-dessus, mais l'autre série pourra toujours aller à l'infini.

En effet, supposons que δ soit le dernier dénominateur de la fraction continue, $\frac{D}{D'}$ sera la dernière des fractions principales, et la série des fractions plus grandes que a, se trouvera terminée par cette même fraction $\frac{D}{D'}$; or l'autre série des fractions plus petites que a, se trouvera naturellement arrêtée à la fraction $\frac{C}{C'}$ qui précède $\frac{D}{D'}$; mais pour la continuer, il n'y aura qu'à prendre l'infini pour le dénominateur ϵ qui doit suivre δ (I[re] sect.), de sorte que la fraction $\frac{E}{E'}$ qui suivrait $\frac{D}{D'}$ dans la série des fractions principales, serait

$$\frac{E}{E'} = \frac{\infty D + C}{\infty D' + C'} = \frac{D}{D'};$$

or par la loi des fractions intermédiaires, il est clair qu'à cause de $\epsilon = \infty$, on pourra entre les fractions $\frac{C}{C'}, \frac{E}{E'}$, insérer les fractions intermédiaires

$$\frac{D+C}{D'+C'}, \quad \frac{2D+C}{2D'+C'}, \quad \frac{3D+C}{3D'+C'}, \quad \text{etc.}:$$

ainsi on pourra, à la suite de la fraction $\frac{C}{C'}$, placer les fractions dont nous parlons.

16. On peut donc résoudre cette question : *Une fraction exprimée par de très-grands nombres, étant donnée, trouver toutes les fractions en moindres termes, qui approchent si près de la vérité, qu'il soit impossible d'en approcher davantage par des fractions plus simples.*

D'après la théorie précédente, le problème sera résolu en réduisant la fraction proposée en fraction continue, puis formant les fractions convergentes, et intercalant les fractions secondaires (Voyez les additions par l'illustre *Lagrange*, au second volume de l'Algèbre d'*Euler*).

17. Représentons, pour plus de commodité, par p°, p', p'', etc. les numérateurs, et par q°, q', q'', etc. les dénominateurs des fractions principales convergentes vers la quantité a résolue dans cette fraction continue,

$$a = \lambda + \cfrac{1}{\lambda' + \cfrac{1}{\lambda'' + \cfrac{1}{\lambda''' + \text{etc:}}}}$$

nous avons démontré cette loi de formation des fractions convergentes

$$\begin{array}{llll} & p' = \lambda & q' = 1, & \\ (1)\ldots\ldots & p'' = \lambda' p' + p^{\circ}, & q'' = \lambda' q' + q^{\circ} & \ldots\ldots(2), \\ (3)\ldots\ldots & p''' = \lambda'' q'' + p', & q''' = \lambda'' q'' + q' & \ldots\ldots(4), \\ (5)\ldots\ldots & p^{\text{IV}} = \lambda''' p''' + p'', & q^{\text{IV}} = \lambda''' q''' + q'' & \ldots\ldots(6), \\ & \text{etc.} & \text{etc.}, & \end{array}$$

où $p^{\circ} = 1$ et $q^{\circ} = 0$. Si l'on multiplie (2) par a, et qu'on retranche (1) de ce produit, on trouvera

$$\lambda' = \frac{p^{\circ} - aq^{\circ}}{aq' - p'} - \frac{p'' - aq''}{aq' - p'};$$

en opérant de la même manière sur (3) et (4), (5) et (6), etc., on aura

$$\lambda'' = \frac{p' - aq'}{aq'' - p''} - \frac{p''' - aq'''}{aq'' - p''},$$

$$\lambda''' = \frac{p'' - aq''}{aq''' - p'''} - \frac{p^{\text{IV}} - aq^{\text{IV}}}{aq''' - p'''},$$

etc.

Mais on a vu (Ire sect.) que la différence entre la fraction totale a et une fraction quelconque, est moindre que la différence entre a et la fraction qui précède immédiatement celle-là; d'où il résulte que les quantités

$$\frac{p^{\circ}}{q^{\circ}} - a, \quad \frac{p'}{q'} - a, \quad \frac{p''}{q''} - a, \quad \frac{p'''}{q'''} - a, \quad \text{etc.}$$

c'est-à-dire (*),

$$p^\circ - aq^\circ,\quad p' - aq',\quad p'' - aq'',\quad p''' - aq''',\quad \text{etc.};$$

forment une suite de termes qui vont en diminuant, et qui sont alternativement positifs et négatifs : donc

$$\frac{p'' - aq''}{aq' - p'} > 0 \text{ et } < 1,\qquad \frac{p''' - aq'''}{aq''' - p''} > 0 \text{ et } < 1,$$
$$\frac{p^{\text{IV}} - aq^{\text{IV}}}{aq''' - p'''} > 0 \text{ et } < 1,\qquad \text{etc.},$$

et conséquemment,

$$\lambda' < \frac{p^\circ - aq^\circ}{aq' - p'} > \frac{p^\circ - aq^\circ}{aq' - p'} - 1,$$
$$\lambda'' < \frac{p' - aq'}{aq'' - p^\circ} > \frac{p' - aq'}{aq'' - p''} - 1,$$
$$\lambda''' < \frac{p'' - aq''}{aq''' - p'''} > \frac{p'' - aq''}{aq''' - p'''} - 1,$$
$$\text{etc.},$$

ou bien

$$\lambda < a,$$
$$\lambda' < \frac{p^\circ - aq^\circ}{aq' - p'} < \frac{1}{a - \lambda},$$
$$\lambda'' < \frac{aq' - p'}{p'' - aq''},$$
$$\lambda''' < \frac{p'' - aq''}{aq''' - p'''},$$
$$\lambda^{\text{IV}} < \frac{aq''' - p'''}{p^{\text{IV}} - aq^{\text{IV}}},$$
$$\text{etc.}$$

(*) En effet, ayant, par exemple, les inégalités $p' - aq' < p^\circ - aq^\circ$ et $q' > q^\circ$, on aura aussi $\frac{p' - aq'}{q'} < \frac{p^\circ - aq^\circ}{q^\circ}$, c'est-à-dire, $\frac{p'}{q'} - a < \frac{p^\circ}{q^\circ} - a$.

où le signe $<$ dénote le nombre entier immédiatement moindre que la valeur de la quantité placée à la droite de ce signe.

On observera que q° étant $=0$, il est indifférent d'écrire $-aq^\circ$ ou $-q^\circ$.

Ainsi connaissant déjà $p^\circ=1$, $q^\circ=0$, $p'=\lambda$, nombre entier immédiatement au-dessous de a, $q'=1$, et conséquemment λ' quotient de 1 par $a-\lambda$, on déduira des relations (1) et (2) p'' et q'', et des relations (3) et (4) les valeurs de p''' et q'''; puis le quotient de p'' aq'' par $aq'''-p'''$ donnera λ''', et au moyen de (5) et (6), on connaîtra p^{IV} et q^{IV}, et ainsi de suite.

Qu'on ait $a<1$, toutes les relations précédentes ont encore lieu, ainsi qu'il est facile de s'en assurer : car d'abord $\lambda=0$, et conséquemment,

$$\lambda < a;$$

d'autre part, dans ce cas,

$$p^\circ=1,\quad q^\circ=0,\quad p'=0,\quad q'=1,\quad p''=1,\quad q''=\lambda';$$

donc

$$\lambda' < \frac{p^\circ-q^\circ}{aq'-p'} < \frac{1}{a},\qquad \text{d'où}\qquad a < \frac{1}{\lambda'};$$

La troisième inégalité devient

$$\lambda'' < \frac{a}{1-a\lambda'},\qquad \text{d'où}\qquad a > \frac{1}{\lambda'+\frac{1}{\lambda''}};$$

La quatrième donne

$$\lambda''' < \frac{p''+\lambda''p'''}{q''+\lambda''q'''},\quad \text{d'où}\quad a < \cfrac{1}{\lambda'+\cfrac{1}{\lambda''+\cfrac{1}{\lambda'''}}},$$

et ainsi de suite.

18. Mais on peut avoir la fraction continue

$$a = \alpha \pm \cfrac{1}{\beta \pm \cfrac{1}{\gamma \pm \cfrac{1}{\delta \pm \text{etc.}}}}:$$

ces sortes de fractions qui procèdent ainsi par addition et par soustraction, peuvent toujours se changer en d'autres qui ne soient formées que par addition.

Supposons, en effet,

$$p - \frac{1}{t} = \mathrm{P} + \frac{1}{\mathrm{T}},$$

p et P devant être des nombres entiers, et t et T des nombres plus grands que l'unité : on aura donc

$$p - \mathrm{P} = \frac{1}{t} + \frac{1}{\mathrm{T}};$$

donc, à cause de $\frac{1}{t} < 1$, $\frac{1}{\mathrm{T}} < 1$, on aura

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{\mathrm{T}} < 2;$$

conséquemment on ne pourra faire que l'hypothèse

$$p - \mathrm{P} = 1, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{P} = p - 1;$$

donc

$$p - \frac{1}{t} = p - 1 + \frac{1}{\mathrm{T}},$$

de là

$$\frac{1}{\mathrm{T}} = 1 - \frac{1}{t}, \quad \mathrm{T} = \frac{t}{t-1} = 1 + \frac{1}{t-1},$$

et cette transformation

$$p - \frac{1}{t} = p - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{t-1}},$$

qui servira à faire disparaître les signes moins dans une fraction continue quelconque.

Soit, par exemple, la fraction

$$\alpha - \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \text{etc.}}}:$$

en faisant $p = \alpha$, $t = \beta + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \text{etc.}}}$, cette fraction devient

$$p - \frac{1}{t} = p - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{t - 1}},$$

et substituant pour t sa valeur, on a cette transformée

$$\alpha - \cfrac{1}{\beta + \cfrac{1}{\gamma + \text{etc.}}} = \alpha - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\beta - 1 + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta + \text{etc.}}}}} \quad \ldots\ldots\ldots(1).$$

La fraction continue

$$\alpha - \cfrac{1}{\beta - \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\delta - \text{etc.}}}}$$

se change d'abord en

$$\alpha - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\beta - 1 - \cfrac{1}{\gamma + \text{etc.}}}},$$

et celle-ci devient

$$\alpha - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\beta - 2} + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\gamma - 1 + \text{etc.}}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2);$$

Que la fraction à transformer soit

$$\alpha - \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\gamma + \text{etc.}}},$$

on trouvera, en faisant $6 = 1$ dans (1),

$$\alpha - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{\gamma + \cfrac{1}{\text{etc.}}}}}:$$

si l'on désigne par y le reste de la fraction continue qui suit γ, et qu'on multiplie par $\gamma + y$ les deux termes de la dernière fraction $\cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{\gamma + y}}$, on aura pour transformée de la précédente,

$$\alpha - 1 + \frac{1}{1 + \gamma + y} = \alpha - 1 + \cfrac{1}{1 + \gamma + \cfrac{1}{\delta + \text{etc.}}} \ldots\ldots (3).$$

La fraction

$$\alpha - \cfrac{1}{2 - \cfrac{1}{\gamma + \text{etc.}}} = \alpha - 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\gamma - 1 + \text{etc.}}}}};$$

en faisant dans (2) le quotient $6 = 2$; mais d'après la transformée (3), en y faisant $\gamma = 1$, $\delta = \gamma - 1$, cette dernière fraction devient

$$\alpha - 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\gamma - 1 + \text{etc.}}}:$$

on voit donc que, dans ce cas, la fraction est simplifiée.

Cette égalité identique

$$p + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{t}} = p + 1 - \frac{1}{t + 1},$$

fait voir qu'une fraction continue dont tous les termes ont le signe $+$, peut quelquefois être simplifiée, en y introduisant les signes $-$: c'est ce qui a lieu lorsque quelques dénominateurs sont égaux à l'unité : car, par exemple, la fraction

$$\alpha + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\gamma + \text{etc.}}}$$

pourra se réduire par la formule précédente, à celle-ci

$$\alpha + 1 - \frac{1}{\gamma + 1 \text{ etc.}},$$

qui comporte un terme de moins : ainsi la fraction

$$\alpha + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\delta + \text{etc.}}}}$$

se réduirait à

$$\alpha + 1 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\delta + \text{etc.}}},$$

en observant que $\gamma = 1$.

Et la suivante,

$$\alpha + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\varepsilon + \text{etc.}}}}}$$

se réduira d'abord à

$$\alpha + 1 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\beta + \text{etc.}}}},$$

et ensuite à

$$\alpha + 1 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{\beta + 1 \ \text{etc.}}}.$$

La fraction continue qui exprime le rapport de la circonférence au diamètre étant, comme on l'a vu (I[re] sect.),

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}}}}}},$$

peut se réduire à une autre qui ait trois termes de moins, et qui sera

$$3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{16 - \cfrac{1}{294 - \cfrac{1}{3 - \cfrac{1}{3 + \text{etc.}}}}}}.$$

19. Pour pouvoir comprendre sous une même formule générale les fractions où les signes sont tous positifs, et celles qui renferment des signes négatifs, il est bon de transformer ces dernières, de telle manière que les signes négatifs n'affectent que les dénominateurs, ce qui est facile; car ayant, par exemple, la fraction

$$\alpha - \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{\gamma - \cfrac{1}{\delta + \text{etc.}}}},$$

on pourra d'abord la changer en

$$\alpha + \cfrac{1}{-6 - \cfrac{1}{\gamma - \cfrac{1}{\delta + \text{etc.}}}},$$

et ensuite en celle-ci

$$\alpha + \cfrac{1}{-6 + \cfrac{1}{-\gamma + \cfrac{1}{\delta + \text{etc.}}}},$$

et ainsi de suite.

20. Nous avons trouvé (Ire sect., chap. XXXI)

$$\left.\begin{aligned} \frac{B}{B'} - \frac{A}{A'} &= \frac{1}{A'B'} \\ \frac{C}{C'} - \frac{B}{B'} &= -\frac{1}{B'C'} \\ \frac{D}{D'} - \frac{C}{C'} &= \frac{1}{C'D'} \\ \text{etc.} \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{aligned} \frac{B}{B'} &= \frac{A}{A'} + \frac{1}{A'B'}; \\ \frac{C}{C'} &= \frac{B}{B'} - \frac{1}{B'C'}, \\ \frac{D}{D'} &= \frac{C}{C'} + \frac{1}{C'D'}, \\ \text{etc.}; \end{aligned}\right.$$

et, à cause de $A' = 1$, on aura, en désignant par $\frac{R}{R'}$ une des fractions convergentes

$$\frac{R}{R'} = A + \frac{1}{B'} - \frac{1}{B'C'} + \frac{1}{C'D'} \cdots\cdots \pm \frac{1}{Q'R'},$$

et on sait que l'erreur sera moindre que $\frac{1}{R'^2}$ (Ire sect.).

Pour la fraction continue

$$3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{16+\cfrac{1}{-294+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{-3+\text{etc.}}}}}},$$

qui exprime le rapport de la circonférence au diamètre, on a

$$\begin{aligned} &A=3,\quad A'=1,\quad B'=7,\quad C'=7.16+1=113,\\ &D'=113\times-294+7=-33215,\\ &E'=-33215\times 3+113=-99532,\\ &F'=-99532\times-3-33215=265381\,; \end{aligned}$$

de sorte que la série cherchée sera

$$3+\frac{1}{7}-\frac{1}{7.113}-\frac{1}{113.33215}-\frac{1}{33215.99532}$$
$$-\frac{1}{99532.265381}-\text{etc.}$$

21. Lorsqu'on développe une quantité en fraction continue, il arrive quelquefois que les mêmes dénominateurs reviennent toujours dans le même ordre : dans ce cas, la fonction continue est dite *périodique*, et elle peut toujours être considérée comme la racine d'une équation du second degré. Soit la fraction périodique

$$x=\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{p+\cfrac{1}{p+\text{etc.}}}}}:$$

puisque le nombre des fractions intégrantes est illimité, il est clair qu'on peut substituer x à l'ensemble des fractions

intégrantes qui suivent la première, ensorte qu'on aura

$$x = \frac{1}{p+x},$$

d'où

$$x^2 + px = 1 \quad \text{et} \quad x = \frac{-p + \sqrt{p^2+4}}{2}.$$

La fraction continue ci-dessus servira donc à trouver la racine carrée du nombre $\frac{\sqrt{p^2+4}}{2}$, puisqu'on a

$$\frac{\sqrt{p^2+4}}{2} = \frac{p}{2} + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{p + \text{etc.}}}}$$

En faisant $p = 2$, on obtient

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}$$

Soit encore la fraction

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \text{etc.}}}},$$

dont les dénominateurs reviennent périodiquement de deux en deux : on aura

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{x}};$$

d'où résulte l'équation du second degré

$$qx^2 - pqx - p = 0.$$

Il en serait de même, si la période était composée d'un plus

grand nombre de termes ; c'est-à-dire, qu'on serait toujours conduit, pour la détermination de x, à une équation du second degré.

Il peut arriver aussi que la fraction continue soit irrégulière dans ses premiers termes, et qu'elle ne devienne périodique qu'à une certaine distance du commencement. Soit, par exemple, la fraction

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \text{etc.}}}}}},$$

et posons

$$y = r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \text{etc.}}}},$$

on aura

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{y}}, \quad \text{d'où} \quad y = \frac{x - p}{1 - q(x - p)};$$

mais

$$y = r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{y}}, \quad \text{d'où} \quad sy^2 - rsy - r = 0;$$

et remplaçant y par sa valeur, il viendra

$$s(x-p)^2 - rs(x-p)[1 - q(x-p)] - r[1 - q(x-p)]^2 = 0,$$

équation qui, développée et ordonnée par rapport aux puissances de x, montera au second degré. En la résolvant et égalant la valeur de x à la fraction continue qu'elle représente, on aura le développement en fraction continue de la racine carrée des nombres représentés par la formule qui se trouvera sous le radical.

Soit la fraction périodique

$$x = a + \cfrac{p}{q + \cfrac{p}{q + \cfrac{p}{q + \cfrac{p}{q + \text{etc.}}}}},$$

d'où

$$x - u = \cfrac{p}{q + \cfrac{p}{q + \cfrac{p}{q + \text{etc.}}}},$$

on en déduira

$$x - a = \frac{p}{q + x - a};$$

donc

$$x = \frac{2a - q \pm \sqrt{q^2 + 4p}}{2},$$

et conséquemment

$$\frac{-q + \sqrt{q^2 + 4p}}{2} = \cfrac{p}{q + \cfrac{p}{q + \text{etc.}}},$$

ou, faisant $q = 2a$,

$$\sqrt{a^2 + p} = a + \cfrac{p}{2a + \cfrac{p}{2a + \text{etc.}}}.$$

Si on réduit en fraction ordinaire la portion de fraction continue correspondante à sept périodes, on trouvera

$$\sqrt{a^2 + p} = a + \frac{(2a)^7 p + 5(2a)^5 p^2 + 7(2a)^3 p^3 + 3(2a) p^4}{(2a)^8 + 6(2a)^6 p + 11(2a)^4 p^2 + 7(2a)^2 p^3 + p^4}.$$

Proposons-nous d'extraire, par approximation, la racine carrée de 2 : nous ferons dans la formule précédente, $a = 1$, $p = 1$, ce qui donnera

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{128 + 5.32 + 7.8 + 3.2}{256 + 6.64 + 11.16 + 7.4 + 1} = 1 + \frac{70}{169};$$

résultat exact, à moins d'un cent-millième près.

Qu'il s'agisse d'extraire la racine carrée de 97 : on fera dans la formule,

$$a = 10 \quad \text{et} \quad p = 97 - 100 = -3.$$

A l'effet d'extraire la racine carrée de $m^2 + n^2$, on fera dans la formule,

$$a = m + n, \quad p = -2mn.$$

22. Examinons maintenant dans quel cas une des racines réelles d'une équation, développée en fraction continue, sera donnée par une fraction continue périodique. On sait (I[re] sect., chap. XXX) que chaque racine réelle sera de la forme

$$x = p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{t + \text{etc.}}}}},$$

q, r, s, t, etc. étant les valeurs entières approchées de la racine réelle de chacune des transformées (N), (P), (Q), etc. Or, pour que cette fraction soit périodique, il faut qu'à partir d'un certain terme, les mêmes dénominateurs déjà trouvés, reviennent dans le même ordre à l'infini, ou qu'il y ait deux termes à partir desquels les mêmes dénominateurs se reproduisent, et dans le même ordre. Donc, pour que la fraction soit périodique, il faut que, parmi les transformées, il s'en trouve deux qui aient les mêmes racines; ainsi, lorsqu'on verra, dans une fraction continue, reparaître un des nombres déjà trouvés, il n'y aura qu'à examiner si les racines des transformées qui ont ce nombre pour valeur entière approchée, sont les mêmes, c'est-à-dire, si ces deux transformées ont une racine commune, ce qu'on reconnaîtra aisément en cherchant le plus grand commun diviseur entre les deux premiers membres, lequel doit nécessairement contenir toutes les racines communes aux deux équations, s'il y en a. Or, comme nous avons

vu précédemment que toute fraction périodique se réduit à la racine d'une équation du second degré, il s'ensuit que le commun diviseur sera nécessairement du second degré. On pourra donc, lorsque cette condition sera satisfaite, prolonger la fraction continue aussi loin qu'on voudra, en répétant seulement les mêmes nombres, sans être obligé de calculer de nouvelles transformées.

23. Nous terminerons ce chapitre par une méthode très-simple pour réduire en fractions continues, les racines des équations du second degré.

Prenons l'équation

$$Ax^2 + Bx + C = 0,$$

dans laquelle A, B, C soient des nombres entiers : on sait que sous la relation

$$B^2 - 4AC > 0,$$

les deux racines sont réelles : cette équation étant résolue, donne

$$x = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A},$$

où le radical peut être pris positivement ou négativement : si λ est le nombre entier immédiatement plus petit que x, on fera

$$x = \lambda + \frac{1}{x'},$$

et on aura la transformée

$$A'x'^2 + B'x' + A = 0,$$

dans laquelle

$$A' = A\lambda^2 + B\lambda + C, \quad B' = 2A\lambda + B;$$

et on aura pour racine

$$x' = \frac{-B' + \sqrt{B'^2 - 4AA'}}{2A'}.$$

Si λ' est la valeur entière la plus approchée de x', on fera

$$x' = \lambda' + \frac{1}{x''},$$

et ainsi de suite. On observera que

$$B^2 - 4AC = B'^2 - 4AA' = B''^2 - 4A'A'' = \text{etc.};$$

donc la quantité radicale sera la même dans toutes les valeurs de x, x', x'', etc. Ainsi, désignant $B^2 - 4AC$ par D, on aura les transformées successives

$$A'x'^2 + B'x' + A = 0,$$
$$A''x''^2 + B''x'' + A' = 0,$$
$$A'''x'''^2 + B'''x''' + A'' = 0,$$
$$\text{etc.},$$

et ce tableau des valeurs de A', A'', A''', etc., B', B'', B''', etc., et λ, λ', λ'', etc.

		$\lambda < \frac{-B+\sqrt{D}}{2A}$,
$A' = A\lambda^2 + B\lambda + C$	$B' = 2A\lambda + B$	$\lambda' < \frac{-B'+\sqrt{D}}{2A'}$,
$A'' = A'\lambda'^2 + B'\lambda' + A$	$B'' = 2A'\lambda' + B'$	$\lambda'' < \frac{-B''+\sqrt{D}}{2A''}$,
$A''' = A''\lambda''^2 + B''\lambda'' + A'$	$B''' = 2A''\lambda'' + B''$	$\lambda''' < \frac{-B'''+\sqrt{D}}{2A'''}$,
etc.	etc.	etc.,

où $\lambda <$, $\lambda' <$, etc. indiquent qu'on doit prendre pour λ le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{-B+\sqrt{D}}{2A}$, etc.; mais parce que

$$B'^2 - 4AA' = D = B''^2 - 4A'A'' = B'''^2 - 4A''A''' = \text{etc.},$$

on voit que les valeurs de A', A'', A''', etc. peuvent se déduire

beaucoup plus facilement de ces formules

$$A'=\frac{B'^2-D}{4A},\quad A''=\frac{B''^2-D}{4A'},\quad A'''=\frac{B'''^2-D}{4A''},\quad \text{etc.}$$

Nous supposerons que la proposée n'ait qu'une seule racine réelle positive, auquel cas chacune des transformées en x', x'', etc. n'aura qu'une seule racine réelle plus grande que l'unité : considérons la transformée

$$A^{(m)}(x^{(m)})^2+B^{(m)}x^{(m)}+A^{(m-1)}=0\ldots\ldots(1),$$

et soit π la partie entière de la racine plus grande que l'unité : la transformée suivante sera

$$A^{(m+1)}(x^{(m+1)})^2+B^{(m+1)}x^{(m+1)}+A^{(m)}=0\ldots.(2),$$

et on aura, entre les coefficiens et le nombre π, la relation

$$A^{(m+1)}=A^{(m)}\pi^2+B^{(m)}\pi+A^{(m-1)}\ldots.(3).$$

Mais la transformée (1) ayant une seule racine plus grande que π, si dans cette transformée on écrit successivement π et la limite des racines supérieures positives, on aura deux résultats de différens signes (Ire sect., chap. XXVIII); or la limite supérieure donne un résultat de même signe que $A^{(m)}$, et la substitution de π donne, d'après (3),

$$A^{(m)}\pi^2+B^{(m)}\pi+A^{(m-1)}=A^{(m+1)};$$

donc $A^{(m)}$ et $A^{(m+1)}$ auront des signes différens, et l'on démontrera de la même manière que, dans les transformées suivantes, les signes changeront en passant de $A^{(m+1)}$ à $A^{(m+2)}$, de $A^{(m+2)}$ à $A^{(m+3)}$, etc. Cela posé, parce que

$$\begin{aligned}D&=B^{(m+1)}B^{(m+1)}-4A^{(m)}\ A^{(m+1)}\\&=B^{(m+2)}B^{(m+2)}-4A^{(m+1)}A^{(m+2)}=\text{etc.},\end{aligned}$$

et que les produits $A^{(m)}A^{(m+1)}$, $A^{(m+1)}A^{(m+2)}$ sont tous négatifs, nécessairement

$$B^{(m+1)}<\sqrt{D},\quad B^{(m+2)}<\sqrt{D},\quad \text{etc.},$$

et d'ailleurs les nombres $A^{(m)}$, $A^{(m+1)}$, etc. étant tous entiers, on aura encore

$$A^{(m)} < D, \qquad A^{(m+1)} < D, \qquad \text{etc.};$$

et comme il ne peut y avoir qu'un nombre déterminé et fini de nombres entiers et moindres que D et que $\sqrt{D}$, les coefficiens $B^{(m+1)}$, $B^{(m+2)}$, etc., $A^{(m)}$, $A^{(m+1)}$, etc. ne pourront avoir qu'un certain nombre de valeurs différentes, ensorte que si l'on pousse ces séries à l'infini, il faudra nécessairement que les mêmes termes reviennent une infinité de fois ; et par la même raison, il faudra qu'une même combinaison des mêmes termes, se reproduise une infinité de fois ; d'où il suit qu'on aura, par exemple,

$$B^{(m+n)} = B^{(m)}, \qquad A^{(m+n-1)} = A^{(m-1)}:$$

mais

$$x^{(m)} = \frac{-B^{(m)} + \sqrt{D}}{2A^{(m)}}, \qquad x^{(m+n)} = \frac{-B^{(m+n)} + \sqrt{D}}{2A^{(m+n)}},$$

et d'ailleurs,

$$D = B^{(m)2} - 4A^{(m-1)}A^{(m)} = B^{(m+n)2} - 4A^{(m+n-1)}A^{(m+n)} = \text{etc.};$$

donc, à cause des deux égalités ci-dessus, on aura

$$A^{(m)} = A^{(m+n)} \qquad \text{et} \qquad x^{(m)} = x^{(m+n)},$$

et dès-lors la fraction continue sera périodique.

Nous appliquerons ce qui vient d'être dit au développement en fraction continue de la racine carrée de $\frac{11}{3}$, pour laquelle on a

$$x = \sqrt{\tfrac{11}{3}} \qquad \text{et} \qquad 3x^2 - 11 = 0;$$

conséquemment

$$A = 3, \quad C = -11, \quad B = 0;$$

on trouvera

(1°). $A = 3$, $\lambda < \frac{\sqrt{33}}{3} = 1$, $B' = 6$,

(2°). $A' = 3 - 11 = -8$, $\lambda' < \frac{\sqrt{33}+3}{8} = 1$, $B'' = -16 + 6 = -10$,

(3°). $A'' = -8 + 6 + 3 = 1$, $\lambda'' < \frac{\sqrt{33}+5}{1} = 10$, $B''' = 20 - 10 = 10$,

(4°). $A''' = 100 - 100 - 8 = -8$, $\lambda''' < \frac{\sqrt{33}+5}{8} = 1$, $B^{\text{IV}} = -16 + 10 = -6$,

(5°). $A^{\text{IV}} = -8 + 10 + 1 = 3$, $\lambda^{\text{IV}} < \frac{\sqrt{33}+3}{3} = 2$, $B^{\text{V}} = 12 - 6 = 6$.

en observant que les nombres λ, λ', λ'', etc. doivent être positifs. On s'arrête ici à cause de

$$B^{\text{V}} = B',\quad A^{\text{IV}} = A,\qquad \text{d'où}\qquad A^{\text{V}} = A',$$

ensorte que $n = 4$, $\lambda^{\text{V}} = \lambda'$ et par conséquent la fraction continue périodique, racine carrée de $\frac{11}{3}$, est

$$x = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{10 + \text{etc.}}}}}}};$$

on déduit de là les fractions convergentes

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{21}{11},\ \frac{23}{12},\ \frac{67}{35},\ \frac{90}{47},\ \frac{967}{505},\ \frac{1057}{552},\ \text{etc.},$$

vers la racine carrée de $\frac{11}{3}$.

On fera bien de consulter sur cette matière, le paragraphe Ier des *Additions à l'Algèbre d'Euler*, par *Lagrange*, le chapitre VI de la *Résolution des Équations numériques*, par le même, et la *Théorie des Nombres*, par M. *Legendre*.

CHAPITRE IV.

Suite de l'analyse indéterminée.

24. J'AI déjà fait remarquer (Ire sect., chap. XVIII) qu'il suffisait de connaître deux valeurs quelconques p et q de x et y, pour obtenir tous les systèmes de solution en nombres entiers et positifs de l'équation

$$ax - by = \pm c \ldots\ldots (1),$$

et que ces solutions étaient généralement exprimées par ces formules

$$x = p + mb, \quad y = q + ma.$$

Mais la recherche des nombres p et q est laborieuse, si ce n'est dans le cas de $c = 1$, ou de l'équation

$$ax - by = \pm 1 \ldots\ldots (2).$$

Or si l'on convertit la fraction $\frac{b}{a}$ en fraction continue par la méthode connue, et qu'on forme la série des fractions principales convergentes vers $\frac{b}{a}$, la dernière de ces fractions sera $\frac{b}{a}$, et si on désigne l'avant-dernière par $\frac{p}{q}$, on aura, d'après la loi connue de ces fractions,

$$bq - ap = \pm 1,$$

le signe supérieur correspondant au cas où $\frac{p}{q}$ est de rang

impair, et l'inférieur ayant lieu, si $\frac{p}{q}$ est de rang pair, en observant qu'ici nous ne tenons pas compte de la fraction hypothétique $\frac{1}{0}$. Si on veut repasser à la différence $ap-bq$, il faut écrire

$$ap - bq = \mp 1 \ldots\ldots (3),$$

et alors on prendra le signe supérieur, si le quantième de la fraction $\frac{p}{q}$ est impair, et l'inférieur, si ce quantième est pair. On repasse de l'équation (1) à l'équation (2), en posant

$$x = + pc, \quad y = + qc,$$

d'où résulte, après la division par c,

$$ap - bq = \pm 1:$$

ensorte que les formules des solutions de l'équation (1), seront plus généralement

$$(4) \ldots\ldots x = pc + mb, \quad y = qc + ma \ldots\ldots (5);$$

et le rang de la fraction $\frac{p}{q}$ fera connaître les signes des quantités pc, qc, comme on va le voir sur des exemples.

Faisons une première application à l'équation

$$39x = 56y + 11,$$

pour laquelle on a

$$a = 39, \quad b = 56, \quad c = 11.$$

On réduira donc la fraction $\frac{56}{39}$ en fraction continue ; et, à cet effet, on cherchera les quotiens successifs qui sont 1, 2, 3, 2, 2, à l'aide desquels on formera les fractions convergentes

$$\begin{array}{ccccc} 1, & 2, & 3, & 2, & 2, \\ \frac{1}{1}, & \frac{3}{2}, & \frac{10}{7}, & \frac{23}{16}, & \frac{56}{39}: \end{array}$$

la pénultième qui est de rang pair, c'est-à-dire, $\frac{23}{16}$, sera $\frac{p}{q}$; d'où l'on conclut $p = 23$, $q = 16$, et $x = +11p$, $y = +11q$. Ainsi les formules (4) et (5) deviennent

$$x = 23.11 + 56m, \qquad y = 16.11 + 39m:$$

les plus petites valeurs entières et positives de x et y, correspondent à $m = -4$, et sont $x = 29$, $y = 20$. On trouve les autres en faisant $m = -3$, $= -2$, $= -1$, $= 0$, etc.

Quelqu'un achète des chevaux et des bœufs; il paie les premiers 31 pièces de 5 francs chaque, et les autres 20: il se trouve que le prix total des bœufs surpasse de 7 pièces celui des chevaux; on demande le nombre des bœufs et celui des chevaux?

En désignant par x le nombre des bœufs, et par y celui des chevaux, on trouvera

$$20x - 31y = 7.$$

La fraction irréductible $\frac{31}{20}$, réduite en fraction continue, donne les quotiens 1, 1, 1, 4, 2, ensorte qu'on a les fractions élémentaires

$$1, \quad 1, \quad 1, \quad 4, \quad 2,$$
$$\frac{1}{1}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{14}{9}, \quad \frac{31}{20};$$

d'où résulte $\frac{p}{q} = \frac{14}{9}$, ensorte que $p = 14$, $q = 9$; conséquemment,

$$x = 7.14 = 98 = pc, \qquad y = 7.9 = 63 = qc,$$

et

$$x = 98 + m.31, \qquad y = 63 + m.20;$$

ensorte que les valeurs entières et positives de x et de y,

$$\text{pour}\left\{\begin{array}{l} m=-3 \\ m=-2 \\ m=-1 \\ m=\ \ 0 \\ m=\ \ 1 \\ m=\ \ 2 \\ m=\ \ 3 \\ \text{etc.} \end{array}\right\}\text{ sont }\left\{\begin{array}{l} x=5 \\ \ \ =36 \\ \ \ =67 \\ \ \ =98 \\ \ \ =129 \\ \ \ =160 \\ \ \ =191 \\ \text{etc.} \end{array}\right\}\text{ et }\left\{\begin{array}{l} y=3 \\ \ \ =23 \\ \ \ =43 \\ \ \ =63 \\ \ \ =83 \\ \ \ =103 \\ \ \ =123 \\ \text{etc.} \end{array}\right\}$$

Dans les deux exemples précédens, la fraction $\frac{p}{q}$ était de rang pair; supposons maintenant qu'on ait à traiter l'équation

$$12x - 29y = 13:$$

les fractions convergentes vers $\frac{29}{12}$, sont

$$\frac{2}{1},\quad \frac{5}{2},\quad \frac{12}{5},\quad \frac{29}{12}:$$

la fraction $\frac{p}{q}$ est de rang impair ; et alors

$$ap - bq = -1, \quad \text{ou} \quad 12p - 29q = -1:$$

on doit donc faire, dans la proposée, ces hypothèses

$$x = -13p, \quad y = -13q;$$

pour en revenir à $12p - 29q = -1$; et à cause de $p = 12$, $q = 5$, on aura les formules

$$x = -12.13 + m.29, \quad y = -5.13 + m.12,$$

et les plus petites valeurs de x et y sont données par $m = +6$.

En supposant toujours le terme en y, positif dans le second membre, prenons le cas où le terme tout connu est négatif, et

considérons, par exemple, l'équation

$$39x - 56y = -11:$$

en se reportant au premier exemple, on a toujours, à cause de $\frac{p}{q}$ de rang pair,

$$ap - bq = +1, \quad \text{ou} \quad 39p - 56q = +1.$$

Mais pour en revenir à cette réduite, il faut faire dans la proposée,

$$x = -p \times 11, \quad y = -q \times 11,$$

en observant que le terme tout connu a été pris absolument dans les formules (4) et (5) : or on a

$$p = 23, \quad q = 16,$$

et conséquemment,

$$x = -23.11 + 56.m, \quad y = -16.11 + 39m:$$

les moindres valeurs de x et y correspondent à $m = 5$.

Pour l'équation

$$12x - 29y = -13,$$

l'équation auxiliaire, savoir,

$$ap - bq = -1, \quad \text{ou} \quad 12p - 29q = -1,$$

est donnée par les substitutions $x = +13p$, $y = +13q$ dans la proposée, et l'avant-dernière fraction convergente qui est $\frac{12}{5}$, donne $p = 12$, $q = 5$, d'où

$$x = 12.13 + m.29; \quad y = 5.13 + m.12:$$

les moindres valeurs de x et y correspondent à $m = -4$.

Examinons maintenant le cas où le terme de y est négatif dans le second membre : nous observerons avant tout, qu'une telle équation ne peut être satisfaite en nombres entiers et

positifs, qu'autant que le terme tout connu n'est pas moindre que la somme des coefficiens des inconnues x et y. Soit donc l'équation

$$2x + 5y = + 13:$$

par le changement de y en $-y'$, on aura la transformée

$$2x - 5y' = + 13,$$

qui donne

$$x = - 13.p\,, \quad y' = - 13.q\,;$$

d'ailleurs $p = 2$, $q = 1$; donc

$$x = - 13.2 + m.5\,, \quad y' = - 13.1 + m.2\,,$$

et pour la proposée,

$$x = - 13.2 + m.5\,, \quad y = 13.1 - m.2:$$

on n'obtient qu'une solution donnée par $m = 6$, valeur à laquelle correspondent

$$x = 4\,, \quad y = 1.$$

Supposons enfin l'équation

$$11x + 5y = 254,$$

déjà traitée (Ire sect., chap. XVIII) et que nous écrirons comme il suit:

$$5y + 11x = 254:$$

changeant x en $-x'$, d'après ce qu'on a vu dans l'exemple précédent, nous aurons à résoudre l'équation

$$5y - 11x' = 254,$$

pour laquelle on a ces formules générales de solutions

$$y = - 2.254 + m.11\,, \quad x = - 1 \times 254 + m.5:$$

pour repasser à celles qui conviennent à la proposée, il suffira de changer le signe de x, ensorte qu'on aura celles-ci

$$y = - 2.254 + m.11\,, \quad x = + 1.254 - m.5:$$

les plus petites valeurs de y et x correspondent à $m=47$, et sont $y=9$, $x=19$.

Supposons qu'on soit conduit à une seule équation du premier degré entre trois inconnues, telle que

$$ax + by + \gamma z = d:$$

on en déduira

$$ax + by = d - \gamma z = c,$$

et alors supposant le nombre c déjà connu, les formules générales (4) et (5) deviennent

$$x = p\,(d - \gamma z) + mb \ldots\ldots (6),$$
$$-y = q\,(d - \gamma z) + ma \ldots\ldots (7).$$

Soit l'équation particulière

$$5x + 8y + 7z = 50, \quad \text{d'où} \quad 5x + 8y = 50 - 7z,$$

ou

$$5x - 8y' = 50 - 7z = c,$$

en changeant y en $-y'$. Si l'on opère sur la fraction $\frac{8}{5}$, on trouvera ces quotiens successifs 1, 1, 1, 2, au moyen desquels on formera ces fractions convergentes,

$$1, \quad 1, \quad 1, \quad 2,$$
$$\frac{1}{1}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{8}{5},$$

ensorte qu'il faudra prendre

$$5p - 8q = -1,$$

ce qui exige qu'on fasse dans la proposée les substitutions

$$x = -pc, \quad y' = -qc,$$

et parce que $p=3$ et $q=2$, on aura les formules

$$x = -3c + mb, \quad y' = -2c + ma,$$

ou

$$x = -3.50 + 3.7.z + 8m, \qquad -y = -2.50 + 2.7.z + 5m,$$

ou enfin,

$$x = 21z - 150 + 8m, \qquad y = 100 - 14z - 5m,$$

expressions dans lesquelles on pourra prendre z et m arbitrairement, mais de manière cependant à n'avoir pour x et y que des nombres entiers et positifs.

En cherchant de combien de manières on peut couvrir la surface d'une sphère avec des polygones égaux et réguliers, M. *Laplace* a été conduit à cette équation

$$yz(x-2) + 4y = 2xz,$$

x désignant le nombre des côtés de l'un des polygones réguliers qui recouvrent la sphère, y le nombre des angles qui s'assemblent autour d'un même point, et z le nombre des polygones. On déduit de la précédente,

$$z = \frac{4y}{2y - x(y-2)} \ldots\ldots (1):$$

cette expression devant être positive, il faut que le dénominateur soit positif, ou qu'on ait

$$x(y-2) < 2y,$$

d'où

$$x < \frac{2y}{y-2}, \qquad \text{ou} \qquad x < 2 + \frac{4}{y-2}.$$

Mais la plus petite valeur de y est 3, d'où il suit que la plus grande valeur de $2 + \frac{4}{y-2}$, ou de x, est $2+4$ ou 6. Cherchons maintenant les valeurs de z et y qui correspondent aux nombres 3, 4, 5, 6, qui sont les valeurs possibles de x: l'équation (1) donne, pour $x = 3$,

$$z = \frac{4y}{6-y}:$$

on voit par cette équation qu'on ne peut prendre pour y, que l'un des nombres 3, 4, 5, 6, et que les valeurs de z correspondantes à ces nombres, sont 4, 8, 20 et l'infini. Pour $x=4$, on ne peut prendre pour y que l'un des deux nombres 3 et 4, auxquelles répondent pour z, les valeurs 6 et l'infini. Pour $x=5$, on trouve 3 pour y et 12 pour z. Enfin pour $x=6$, on trouve $y=3$ et $z=\infty$.

Terminons ces applications par la recherche des solutions des deux équations

$$x-2y+z=5, \quad 2x+y-z=7;$$

multipliant la première par 2, et du produit retranchant la seconde, on a la suivante

$$3z-5y=3.$$

En appliquant la méthode du plus grand commun diviseur à la fraction $\frac{5}{3}$, on trouve les quotiens 1, 1, 2, et les fractions

$$\frac{1}{1}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{5}{3},$$

ensorte que

$$p=2, \qquad q=1;$$

donc

$$z=2.3+5m=6+5m, \quad y=3+3m.$$

Mais de la première des deux équations proposées, on déduit

$$x=5+2y-z.$$

et par les substitutions des valeurs précédentes de y et de z, elle devient

$$x=5+m.$$

Ainsi toutes les valeurs entières et positives de x, y et z, correspondront

aux hypothèses.....	$m=-1$	$m=0$	$m=1$	$m=2$	$m=3$	$m=4$	
pour lesquels on aura	$x=4$	$=5$	$=6$	$=7$	$=8$	$=9$	etc.
	$y=0$	$=3$	$=6$	$=9$	$=12$	$=15$	
	$z=1$	$=6$	$=11$	$=16$	$=21$	$=26$	

25. Nous allons résoudre ce problème général de l'analyse indéterminée : *Étant données, entre des inconnues, des équations en moindre nombre que ces inconnues, sans radicaux ni dénominateurs, trouver pour ces inconnues, les valeurs entières et rationnelles les plus générales qui puissent satisfaire aux proposées.*

Pour que les valeurs qu'on attribuera aux inconnues, soient réputées exactes, il suffit évidemment que ces valeurs, substituées dans les équations proposées, rendent ces équations identiques : pour que ces mêmes valeurs soient réputées complètes, il est nécessaire qu'elles soient fonctions d'autant de nouvelles indéterminées, au moins, qu'il y a d'inconnues au-delà du nombre des équations à résoudre. En effet, les équations proposées doivent être considérées comme le résultat de l'élimination, entre les valeurs des inconnues, des indéterminées dont ces valeurs sont fonctions : on observera que rien ne s'oppose à ce que ces indéterminées soient en plus grand nombre; car l'essentiel étant que les indéterminées puissent être éliminées entre les valeurs des inconnues, et que de leur élimination résultent les équations proposées et point d'autres, on conçoit que ces indéterminées, quelque nombreuses qu'elles soient d'ailleurs, peuvent être tellement combinées dans les valeurs des inconnues, que l'élimination d'un certain nombre d'entr'elles, fasse disparaître toutes les autres.

Soient les équations

$$\left.\begin{array}{l} at + bu + cv + dx + \text{etc.} = k \\ a't + b'u + c'v + d'x + \text{etc.} = k' \\ a''t + b''u + c''v + d''x + \text{etc.} = k'' \\ \quad \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots (1),$$

en nombre n et entre les m inconnues t, u, v, x, etc., m étant supposé plus grand que n, et tous les coefficiens a, b..... étant supposés entiers.

D'après ce qui a été dit ci-dessus, ces équations seraient complètement résolues, si l'on trouvait pour les inconnues qu'elles renferment, des valeurs de cette forme

$$\left.\begin{array}{l} t = \text{T} + \text{A}\alpha + \text{A}'\beta + \text{A}''\gamma + \text{A}'''\delta + \text{etc.} \\ u = \text{U} + \text{B}\alpha + \text{B}'\beta + \text{B}''\gamma + \text{B}'''\delta + \text{etc.} \\ v = \text{V} + \text{C}\alpha + \text{C}'\beta + \text{C}''\gamma + \text{C}'''\delta + \text{etc.} \\ x = \text{X} + \text{D}\alpha + \text{D}'\beta + \text{D}''\gamma + \text{D}'''\delta + \text{etc.} \\ \quad \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots (2),$$

α, β, γ..... étant des indéterminées au nombre de $m - n$, au moins, et T, U, V, X, etc ; A, B, C, D, etc. A', B', C', etc.; A'', B'', C'', etc.; A''', B''', C''', etc. étant des fonctions entières des coefficiens des équations (1). La substitution de ces valeurs (2) dans les équations (1), donne celles-ci :

$$\left.\begin{array}{l} a\text{T} + b\text{U} + c\text{V} + d\text{X} + \text{etc.} \\ +(a\text{A} + b\text{B} + c\text{C} + d\text{D} + \text{etc.})\,\alpha \\ +(a\text{A}' + b\text{B}' + c\text{C}' + d\text{D}' + \text{etc.})\,\beta \\ +(a\text{A}'' + b\text{B}'' + c\text{C}'' + d\text{D}'' + \text{etc.})\,\gamma \\ +(a\text{A}''' + b\text{B}''' + c\text{C}''' + d\text{D}''' + \text{etc.})\,\delta \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} = k,$$

$$\left.\begin{array}{l} a'\text{T} + b'\text{U} + c'\text{V} + d'\text{X} + \text{etc.} \\ +(a'\text{A} + b'\text{B} + c'\text{C} + d'\text{D} + \text{etc.})\,\alpha \\ +(a'\text{A}' + b'\text{B}' + c'\text{C}' + d'\text{D}' + \text{etc.})\,\beta \\ +(a'\text{A}'' + b'\text{B}'' + c'\text{C}'' + d'\text{D}'' + \text{etc.})\,\gamma \\ +(a'\text{A}''' + b'\text{B}''' + c'\text{C}''' + d'\text{D}''' + \text{etc.})\,\delta \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} = k',$$

5..

$$\left.\begin{array}{l} a''\mathrm{T} + b''\mathrm{U} + c''\mathrm{V} + d''\mathrm{X} + \text{etc.} \\ +(a''\mathrm{A} + b''\mathrm{B} + c''\mathrm{C} + d''\mathrm{D} + \text{etc.})\,\alpha \\ +(a''\mathrm{A}' + b''\mathrm{B}' + c''\mathrm{C}' + d''\mathrm{D}' + \text{etc.})\,\beta \\ +(a''\mathrm{A}'' + b''\mathrm{B}'' + c''\mathrm{C}'' + d''\mathrm{D}'' + \text{etc.})\,\gamma \\ +(a''\mathrm{A}''' + b''\mathrm{B}''' + c''\mathrm{C}''' + d''\mathrm{D}''' + \text{etc.})\,\delta \\ + \text{etc.} \end{array}\right\} = k'',$$

Afin donc que α, β, γ, etc. demeurent indéterminées, on devra égaler à zéro, dans chacune des équations ci-dessus, le coefficient de chacune des indéterminées α, β, γ, etc., ce qui donnera ces groupes d'équations :

$$\left.\begin{array}{l} a\mathrm{T} + b\mathrm{U} + c\mathrm{V} + d\mathrm{X} + \text{etc.} = k \\ a'\mathrm{T} + b'\mathrm{U} + c'\mathrm{V} + d'\mathrm{X} + \text{etc.} = k' \\ a''\mathrm{T} + b''\mathrm{U} + c''\mathrm{V} + d''\mathrm{X} + \text{etc.} = k'' \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots (3);$$

$$\left.\begin{array}{l} a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c\mathrm{C} + d\mathrm{D} + \text{etc.} = 0 \\ a'\mathrm{A} + b'\mathrm{B} + c'\mathrm{C} + d'\mathrm{D} + \text{etc.} = 0 \\ a''\mathrm{A} + b''\mathrm{B} + c''\mathrm{C} + d''\mathrm{D} + \text{etc.} = 0 \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots (4),$$

$$\left.\begin{array}{l} a\mathrm{A}' + b\mathrm{B}' + c\mathrm{C}' + d\mathrm{D}' + \text{etc.} = 0 \\ a'\mathrm{A}' + b'\mathrm{B}' + c'\mathrm{C}' + d'\mathrm{D}' + \text{etc.} = 0 \\ a''\mathrm{A}' + b''\mathrm{B}' + c''\mathrm{C}' + d''\mathrm{D}' + \text{etc.} = 0 \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots (5),$$

$$\left.\begin{array}{l} a\mathrm{A}'' + b\mathrm{B}'' + c\mathrm{C}'' + d\mathrm{D}'' + \text{etc.} = 0 \\ a'\mathrm{A}'' + b'\mathrm{B}'' + c'\mathrm{C}'' + d'\mathrm{D}'' + \text{etc.} = 0 \\ a''\mathrm{A}'' + b''\mathrm{B}'' + c''\mathrm{C}'' + d''\mathrm{D}'' + \text{etc.} = 0 \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots (6),$$

$$\left.\begin{array}{l} a\mathrm{A}''' + b\mathrm{B}''' + c\mathrm{C}''' + d\mathrm{D}''' + \text{etc.} = 0 \\ a'\mathrm{A}''' + b'\mathrm{B}''' + c'\mathrm{C}''' + d'\mathrm{D}''' + \text{etc.} = 0 \\ a''\mathrm{A}''' + b''\mathrm{B}''' + c''\mathrm{C}''' + d''\mathrm{D}''' + \text{etc.} = 0 \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\} \ldots (7).$$

En effet, si dans la première équation dont le second membre est k, on suppose aux indéterminées α, β, γ.... d'autres valeurs α', β', γ', etc., et qu'on retranche cette équation de la précédente, on obtiendra

$$\left.\begin{array}{c}(aA + bB + \text{etc.})\ (\alpha - \alpha') \\ + (aA' + bB' + \text{etc.})\ (\beta - \beta') \\ \text{etc.}\end{array}\right\} = 0.$$

or $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, etc. étant de nouvelles indéterminées, leurs coefficiens doivent être séparément nuls ; d'où on conclut les équations du groupe (4), et l'équation dont le second membre est k, donne comme conséquence, la première du groupe (3).

Réciproquement, si T, U, V, X, etc. ; A, B, C, D, etc. ; A', B', C', D', etc. ; A'', B'', C'', D'', etc. ; A''', B''', C''', D''', etc. sont tels que ces équations aient lieu, les valeurs (2) seront la solution complète des équations (1).

Le groupe (3) prouve que T, U, V, X, etc. peuvent et doivent être des nombres quelconques satisfaisant aux équations (1). Les groupes suivans prouvent que A, B, C, D, etc. A', B', C', D', etc. ; A'', B'', C'', D'', etc. ; A''', B''', C''', D''', etc. doivent satisfaire aux mêmes équations privées de leurs derniers termes, et ne doivent conséquemment renfermer aucune des quantités k, k', k'', etc. Nous ne nous occuperons que de la formation des valeurs de A, B, C, D, etc. ; A', B', C', D', etc. ; A'', B'', C'', etc. ; A''', B''', C''', etc., d'autant que la détermination de T, U, V, X, etc. suppose des équations en nombres, et que la manière de les obtenir est connue.

La recherche des quantités A, B, C, D, etc. ; A', B', C', D', etc. ; A'', B'', C'', D'', etc. ; A''', B''', C''', D''', etc. se réduit évidemment à celle d'une suite de fonctions des coefficiens des premiers membres des équations (1), qui soient toutes nulles d'elles-mêmes, et qui, en outre, puissent être mises successivement sous les diverses formes qu'affectent les premiers membres des équations (4), (5), (6), (7), etc. C'est à quoi on peut parvenir facilement, à l'aide des observations faites

par *Bezout*, dans sa *Théorie des Équations algébriques*, page 181, et développées postérieurement d'une manière plus générale et plus lumineuse, par M. *Laplace*, dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris*, pour 1772, page 294.

Dans le cas d'une équation unique

$$at + bu + cv + dx + \text{etc.} = k,$$

on ne doit prendre que la première équation de chacun des groupes (4), (5), (6), (7), etc., et alors les fonctions nulles et sous les mêmes formes que ces équations, sont

$$ba - ba + oc + od + \text{etc.} = o,$$
$$ac + ob - ca + od + \text{etc.} = o,$$
$$oa + bc - cb + od + \text{etc.} = o,$$
$$ad + ob + oc - da + \text{etc.} = o,$$
$$oa + bd + oc - db + \text{etc.} = o,$$
$$oa + ob + cd - dc + \text{etc.} = o,$$
etc.

Ainsi on pourra poser

$$A = b,\quad B = -a,\quad C = o,\quad D = o,\quad \text{etc.}$$
$$A' = c,\quad B' = o,\quad C' = -a,\quad D' = o,\quad \text{etc.}$$
$$A'' = o,\quad B'' = c,\quad C'' = -b,\quad D'' = o,\quad \text{etc.}$$
$$A''' = d,\quad B''' = o,\quad C''' = o,\quad D''' = -a,\quad \text{etc.}$$
$$A^{\text{iv}} = o,\quad B^{\text{iv}} = d,\quad C^{\text{iv}} = o,\quad D^{\text{iv}} = -b,\quad \text{etc.}$$
$$A^{\text{v}} = o,\quad B^{\text{v}} = o,\quad C^{\text{v}} = d,\quad D^{\text{v}} = -c,\quad \text{etc.}$$
etc.

La proposée étant donc

$$at + bu = k,$$

on a

$$c = o,\quad d = o,\quad \text{etc.},$$

conséquemment $A = b$, $B = -a$, et tous les coefficiens A

et B accentués sont nuls ; d'ailleurs les suivans C, D, etc. n'entrent pas, parce qu'on n'a que deux inconnues ; ainsi les formules résolvantes

$$t = T + A\alpha + A'\beta + A''\gamma + \text{etc.},$$
$$u = U + B\alpha + B'\beta + B''\gamma + \text{etc.},$$

se réduisent à

$$t = T + A\alpha = T + b\alpha,$$
$$u = U + B\alpha = U - a\alpha:$$

l'élimination de α entre ces deux équations, donne la proposée, après avoir remplacé $aT + bU$ par k.

Soit l'équation

$$at + bu + cv = k:$$

les formules résolvantes, au nombre de trois, sont

$$t = T + A\alpha + A'\beta + A''\gamma,$$
$$u = U + B\alpha + B'\beta + B''\gamma,$$
$$v = V + C\alpha + C'\beta + C''\gamma:$$

on a ici $A = b$, $A' = c$, $A'' = 0$; $B = -a$, $B' = 0$, $B'' = c$; $C = 0$, $C' = -a$, $C'' = -b$; d'ailleurs, comme $d = 0$, $e = 0$, etc., les coefficiens A, B, C qui ont plus de deux accens, sont nuls, ensorte que les formules ci-dessus deviennent

$$t = T + b\alpha + c\beta,$$
$$u = U - a\alpha + c\gamma,$$
$$v = V - a\beta - b\gamma;$$

éliminant α entre les deux premières équations, on trouve

$$at + bu = aT + bU + ac\beta + bc\gamma;$$

remplaçant dans cette dernière β par sa valeur tirée de la troisième des équations ci-dessus, les termes en γ se détruisent, et après avoir écrit k en place de $aT + bU + cV$, on retombe sur la proposée.

Pour l'équation déjà traitée

$$5x + 8y + 7z = 50,$$

on a

$$a = 5, \quad b = 8, \quad c = 7, \quad k = 50;$$

donc

$$x = X + 8\alpha + 7\beta,$$
$$y = Y - 5\alpha + 7\gamma,$$
$$z = Z - 5\beta - 8\gamma;$$

or d'après les formules

$$x = 21z - 150 + 8m, \quad y = 100 - 14z + 5m,$$

trouvées (24), on obtient pour $z = 1$ et $m = 17$,

$$X = 7, \quad Y = 1, \quad Z = 1;$$

donc

$$x = 7 + 8\alpha + 7\beta,$$
$$y = 1 - 5\alpha + 7\gamma,$$
$$y = 1 - 5\beta - 8\gamma;$$

pour $\alpha = 1$, $\beta = -2$, $\gamma = 1$, on trouve

$$x = 1, \quad y = 3, \quad z = 3.$$

Soit enfin l'équation

$$at + bu + cv + dx = k:$$

les formules résolvantes

$$t = T + A\alpha + A'\beta + A''\gamma + A'''\delta + A^{\text{iv}}\varepsilon + A^{\text{v}}\zeta,$$
$$u = U + B\alpha + B'\beta + B''\gamma + B'''\delta + B^{\text{iv}}\varepsilon + B^{\text{v}}\zeta,$$
$$v = V + C\alpha + C'\beta + C''\gamma + C'''\delta + C^{\text{iv}}\varepsilon + C^{\text{v}}\zeta,$$
$$x = X + D\alpha + D'\beta + D''\gamma + D'''\delta + D^{\text{iv}}\varepsilon + D^{\text{v}}\zeta,$$

perdent les termes en A, B, C, D qui ont au-delà de cinq accens, et elles deviennent

$$t = T + b\alpha + c\beta + d\delta,$$
$$u = U - a\alpha + c\gamma + d\iota,$$
$$v = V - a\beta - b\gamma + d\zeta,$$
$$x = X - a\delta - b\iota - c\zeta;$$

si entre les deux premières équations, on élimine α, on obtient

$$at + bu = aT + bU + ac\beta + ad\delta + bc\gamma + bd\iota:$$

si de la troisième équation on tire β, et de la quatrième δ, pour en substituer les valeurs dans la précédente, les termes qui renferment les indéterminées γ, ι et ζ se détruisent, et on retombe sur la proposée, en observant toujours que

$$aT + bU + cV + dX = k;$$

et ainsi de suite. On observera qu'il ne faut supposer dans les formules résolvantes, que le nombre des indéterminées qui peuvent être éliminées au moyen de ces mêmes formules, ainsi qu'on l'a observé dans l'exposition de la méthode, ce qui exige qu'après avoir déduit des $m - 1$ premières formules résolvantes, les valeurs d'autant d'indéterminées pour les substituer dans la dernière, les termes qui contiennent les indéterminées restantes disparaissent d'eux-mêmes; en procédant ainsi sur le dernier exemple, on déduira des trois premières équations

$$\delta = \frac{t - T - b\alpha - c\beta}{d},$$
$$\iota = \frac{u - U + a\alpha - c\gamma}{d},$$
$$\zeta = \frac{v - V + a\beta + b\gamma}{d},$$

valeurs qui, substituées dans la troisième, donnent une équation dans laquelle les termes en α, β et γ s'entredétruisent, ensorte qu'on retrouve la proposée.

Passons au cas de deux équations : on ne doit prendre alors que les deux premières équations de chacun des groupes (4),

(5), (6), (7), etc., c'est-à-dire,

$$aA + bB + cC + dD + \text{etc.} = 0,$$
$$aA' + bB' + cC' + dD' + \text{etc.} = 0,$$
$$aA'' + bB'' + cC'' + dD'' + \text{etc.} = 0,$$
$$\text{etc.}$$

$$a'A + b'B + c'C + d'D + \text{etc.} = 0,$$
$$a'A' + b'B' + c'C' + d'D' + \text{etc.} = 0,$$
$$a'A'' + b'B'' + c'C'' + d'D'' + \text{etc.} = 0,$$
$$\text{etc.};$$

et il s'agit de trouver des valeurs des coefficiens A, B, C, D, etc.; A', B', C', D', etc.; A'', B'', C'', D'', etc., telles que ces équations soient satisfaites : mais nous nous bornerons à les relater ici, parce qu'il sera facile de lire dans les résultats la loi de leur formation : on a

$$(bc'-cb')\,a - (ac'-ca')\,b + (ab'-ba')\,c + 0.d + \text{etc.} = 0,$$
$$(bd'-db')\,a - (ad'-da')\,b + 0.c + (ab'-ba')\,d + \text{etc.} = 0,$$
$$(cd'-dc')\,a + 0.b - (ad'-da')\,c + (ac'-ca')\,d + \text{etc.} = 0,$$
$$0.a + (cd'-dc')\,b - (bd'-db')\,c + (bc'-cb')\,d + \text{etc.} = 0,$$
$$\text{etc.}$$

$$(bc'-cb')\,a' - (ac'-ca')\,b' + (ab'-ba')\,c' + 0.d' + \text{etc.} = 0,$$
$$(bd'-db')\,a' - (ad'-da')\,b' + 0.c' + (ab'-ba')\,d' + \text{etc.} = 0,$$
$$(cd'-dc')\,a' + 0.b' - (ad'-da')\,c' + (ac'-ca')\,d' + \text{etc.} = 0,$$
$$0.a' + (cd'-dc')\,b' - (bd'-db')\,c' + (bc'-cb')\,d' + \text{etc.} = 0,$$
$$\text{etc.}$$

ensorte que

$$A = (bc'-cb'),\ B = -(ac'-ca'),\ C = (ab'-ba'),\ D = 0,\ \text{etc.}$$
$$A' = (bd'-db'),\ B' = -(ad'-da'),\ C' = 0,\ D' = (ab'-ba'),\ \text{etc.}$$
$$A'' = (cd'-dc'),\ B'' = 0,\ C'' = -(ad'-da'),\ D'' = (ac'-ca'),\ \text{etc.}$$
$$A''' = 0,\ B''' = (cd'-dc'),\ C''' = -(bd'-db'),\ D''' = (bc'-cb'),\ \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Les équations proposées étant

$$at + bu + cv = k,$$
$$a't + b'u + c'v = k',$$

les formules résolvantes sont

$$t = \mathrm{T} + \mathrm{A}\alpha + \mathrm{A}'\beta + \text{etc.}$$
$$u = \mathrm{U} + \mathrm{B}\alpha + \mathrm{B}'\beta + \text{etc.}$$
$$v = \mathrm{V} + \mathrm{C}\alpha + \mathrm{C}'\beta + \text{etc.}$$

Mais à cause de $d = 0$, $d' = 0$, etc., on a

$$\mathrm{A}' = 0, \quad \mathrm{A}'' = 0, \quad \text{etc.}; \quad \mathrm{B}' = 0, \quad \mathrm{B}'' = 0, \quad \text{etc.};$$

d'ailleurs les inconnues n'étant qu'au nombre de trois, les coefficiens D, D', etc. n'entrent pas : ainsi les formules ci-dessus se réduisent à

$$t = \mathrm{T} + \mathrm{A}\alpha = \mathrm{T} + (bc' - cb')\,\alpha,$$
$$u = \mathrm{U} + \mathrm{B}\alpha = \mathrm{U} - (ac' - ca')\,\alpha,$$
$$v = \mathrm{V} + \mathrm{C}\alpha = \mathrm{V} + (ab' - ba')\,\alpha.$$

En effet, si l'on multiplie la première équation par a, la seconde par b, la troisième par c; si l'on ajoute les trois produits, et qu'on observe que $a\mathrm{T} + \mathrm{BU} + \mathrm{CV} = k$, on retombera sur la première des deux proposées : on obtiendrait la seconde d'une manière analogue.

Nous avons résolu (24) les deux équations

$$x - 2y + z = 5, \quad 2x + y - z - 7,$$

pour lesquelles on a

$$a = 1, \quad b = -2, \quad c = 1, \quad k = 5,$$
$$a' = 2, \quad b' = 1, \quad c' = -1, \quad k' = 7,$$

et conséquemment,

$$x = \mathrm{X} + \alpha, \quad y = \mathrm{Y} + 3\alpha, \quad z = \mathrm{Z} + 5\alpha;$$

or en partant des valeurs $X = 4$, $Y = 0$, $Z = 1$, on trouve

$$x = 4 + \alpha, \quad y = 3\alpha, \quad z = 1 + 5\alpha,$$

et faisant successivement $\alpha = 1, = 2, = 3$, etc., on obtient les solutions en nombres entiers et positifs trouvés plus haut.

Dans le cas de deux équations, si les proposées sont

$$at + bu + cv + dx = k,$$
$$a't + b'u + c'v + d'x = k',$$

on aura

$$e = 0, \quad f = 0, \quad \text{etc.},$$

et les formules résolvantes

$$t = T + A\alpha + A'\beta + A''\gamma + A'''\delta + A^{iv}\varepsilon + \text{etc.}$$
$$u = U + B\alpha + B'\beta + B''\gamma + B'''\delta + B^{iv}\varepsilon + \text{etc.}$$
$$v = V + C\alpha + C'\beta + C''\gamma + C'''\delta + C^{iv}\varepsilon + \text{etc.}$$
$$x = X + D\alpha + D'\beta + D''\gamma + D'''\delta + D^{iv}\varepsilon + \text{etc.}$$

deviendront

$$t = T + (bc' - cb')\alpha + (bd' - db')\beta + (cd' - dc')\gamma,$$
$$u = U - (ac' - ca')\alpha - (ad' - da')\beta + (cd' - dc')\delta,$$
$$v = V - (ab' - ba')\alpha - (ad' - da')\gamma - (bd' - db')\delta,$$
$$x = X + (ab' - ba')\beta + (ac' - ca')\gamma + (bc' - cb')\delta,$$

et ainsi de suite.

Nous terminerons par le cas de trois équations ; mais nous ne composerons que les coefficiens A, B, C, D, etc., parce qu'il sera facile de former les coefficiens accentués A', B', C', D', etc. ; A'', B'', C'', D'', etc., ensorte que nous n'écrirons que les équations du groupe (4) :

$$\left.\begin{array}{l}(bc'd'' - bd'c'' + db'c'' - cb'd'' + cd'b'' - dc'b'')\,a \\ -(ac'd'' - ad'c'' + da'c'' - ca'd'' + cd'a'' - dc'a'')\,b \\ +(ab'd'' - ad'b'' + da'b'' - ba'd'' + bd'a'' - db'a'')\,c \\ -(ab'c'' - ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a'')\,d\end{array}\right\} = 0,$$
$$\text{etc.}$$

$$\left.\begin{array}{l}(bc'd''-bd'c''+db'c''-cb'd''+cd'b''-dc'b'')\,a' \\ -(ac'd''-ad'c''+da'c''-ca'd''+cd'a''-dc'a'')\,b' \\ +(ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a'')\,c' \\ -(ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a'')\,d' \\ \text{etc.}\end{array}\right\}=0,$$

$$\left.\begin{array}{l}(bc'd''-bd'c''+db'c''-cb'd''+cd'b''-dc'b'')\,a'' \\ -(ac'd''-ad'c''+da'c''-ca'd''+cd'a''-dc'a'')\,b'' \\ +(ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a'')\,c'' \\ -(ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a'')\,d'' \\ \text{etc.}\end{array}\right\}=0.$$

Ainsi pour les trois équations

$$at+bu+cv+dx=k,$$
$$a't+b'u+c'v+d'x=k',$$
$$a''t+b''u+c''v+d''x=k'',$$

les résolvantes seront

$$t=\mathrm{T}+\mathrm{A}\alpha,$$
$$u=\mathrm{U}+\mathrm{B}\alpha,$$
$$v=\mathrm{V}+\mathrm{C}\alpha,$$
$$x=\mathrm{X}+\mathrm{D}\alpha;$$

car les coefficiens A, B, C, D accentués, renfermant en facteurs e, e', e'', etc. sont nuls : on a donc

$$t=\mathrm{T}+(bc'd''-bd'c''+db'c''-cb'd''+cd'b''-dc'b'')\,\alpha,$$
$$u=\mathrm{U}-(ac'd''-ad'c''+da'c''-ca'd''+cd'a''-dc'a'')\,\alpha,$$
$$v=\mathrm{V}+(ab'd''-ad'b''+da'b''-ba'd''+bd'a''-db'a'')\,\alpha;$$
$$x=\mathrm{X}-(ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a'')\,\alpha,$$

et ainsi de suite.

Il est aisé de déduire de cette théorie, qu'en général m étant le nombre des inconnues, et n le nombre des équations, le nombre des indéterminées dont les valeurs de ces

inconnues devront être fonctions, sera

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\cdots\frac{m-n+1}{n}\cdot\frac{m-n}{n+1},$$

et que, dans la valeur de chacune des inconnues, il n'en entrera qu'un nombre

$$\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdots\cdots\frac{m-n}{n},$$

ensorte que chacune de ces indéterminées n'entrera, à son tour, que dans les valeurs de $n+1$ inconnues seulement.

Si les termes connus k, k', etc. sont nuls, on pourra supposer T, U, V, etc. nuls, et alors les équations seront susceptibles d'une résolution générale.

26. On propose de trouver pour x et pour y, tous les nombres entiers qui peuvent satisfaire à l'équation

$$ay^2+byx+cx^2+dy+ex+f=0,$$

ou à la suivante,

$$ay^2+(bx+d)\,y=-cx^2-ex-f\ldots\ldots(2).$$

A cet effet, qu'on multiplie de part et d'autre par $4a$, puisqu'on ajoute aux deux membres $(bx+d)^2$, et on aura

$$4a^2y^2+4a(bx+d)y+(bx+d)^2=(bx+d)^2-4a(cx^2+ex+f),$$

dont le premier membre est un carré parfait. En extrayant la racine carrée de part et d'autre, il viendra

$$2ay+bx+d=\pm\sqrt{[(bx+d)^2-4a(cx^2+ex+f)]}\ldots(3),$$

c'est-à-dire,

$$2ay+bx+d=\pm\sqrt{(mx^2+nx+p)},$$

en posant

$$b^2-4ac=m,\quad 2bd-4ae=n,\quad d^2-4af=p.$$

La question se réduit donc à trouver les valeurs rationnelles de x, qui rendront rationnel le radical $\sqrt{mx^2+nx+p}$, parce que ces valeurs reportées dans (3), donneront une équation dont on tirera des valeurs de y, pareillement rationnelles. Soit

$$\sqrt{mx^2+nx+p}=u,$$

on aura

$$mx^2+nx=u^2-p, \quad 4m^2x^2+4mnx+n^2=4mu^2-4mp+n^2,$$

d'où l'on déduit

$$2mx+n=\pm\sqrt{4mu^2-4mp+n^2};$$

et il ne s'agira plus, en posant

$$h=4m, \quad i=n^2-4mp,$$

que de rendre rationnelle la quantité radicale $\sqrt{hu^2+i}$. Si le binome hu^2+i peut être décomposé en facteurs $qu+r$, $su+t$, tels que

$$h=qs, \quad i=rt, \quad qt+rs=0,$$

on fera

$$(qu+r)(su+t)=(qu+r)^2z^2,$$

d'où résultent

$$u=\frac{rz^2-t}{s-qz^2}, \quad uq+r=\frac{rs-qt}{s-qz^2}, \quad su+t=z^2\times\frac{rs-qt}{s-qz^2};$$

par conséquent,

$$(qu+r)(su+t)=z^2\left(\frac{rs-qt}{s-qz^2}\right)^2;$$

donc

$$\sqrt{hu^2+i}=z\times\frac{rs-qt}{s-qz^2},$$

quantité rationnelle, si r, q, s et t sont pareillement des quantités rationnelles.

Si m étant positif, on a

$$n^2 > 4mp,$$

les deux facteurs de $hu^2 + i$ deviennent imaginaires ; mais, dans ce cas, ceux de $mx^2 + nx + p$ sont réels, et si on les représente par $q'x + r'$, $s'x + t'$, on aura, comme ci-dessus,

$$(q'x + r')(s'x + t') = (q'x + r')^2 z^2,$$

d'où l'on tire

$$x = \frac{r'z^2 - t'}{s' - q'z^2},$$

et comme précédemment,

$$\sqrt{mx^2 + nx + p} = z \times \frac{r's' - q't'}{s' - q'z^2}.$$

Supposons que le trinome sous le radical, soit $6x^2 + 31x + 35$, dont les deux facteurs sont $3x + 5$, $2x + 7$; la comparaison donne

$$q' = 3, \quad r' = 5, \quad s' = 2, \quad t' = 7;$$

conséquemment,

$$\sqrt{6x^2 + 31x + 35} = \frac{11z}{3z^2 - 2}.$$

Si le trinome était $9x^2 + 30x + 74$, dont les deux facteurs sont imaginaires, on aurait

$$m = 9, \quad n = 30, \quad p = 74;$$

d'où

$$h = 36, \quad i = -1764 = -(42)^2.$$

Les deux facteurs de $36u^2 - (42)^2$ seraient $6u - 42$ et $6u + 42$; donc

$$q = s = 6, \quad r = -42, \quad t = 42,$$

$$u = 7 \cdot \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}, \quad \sqrt{36u^2 - (42)^2} = \frac{84z}{z^2 - 1};$$

partant,

$$18x + 30 = \frac{84z}{z^2 - 1}, \quad x = \frac{14z}{3(z^2-1)} - \frac{5}{3},$$

$$9x^2 + 30x + 74 = 49\left(\frac{z^2+1}{z^2-1}\right)^2,$$

dont la racine carrée serait $7 \times \frac{z^2+1}{z^2-1}$.

27. Proposons-nous de trouver pour x tous les nombres entiers, tels que le trinôme $mx^2 + nx + p$ devienne un carré parfait : on peut supposer

$$mx^2 + nx + p = zz\ldots\ldots(1);$$

et si on représente l'un des nombres en question par f, on aura aussi

$$mf^2 + nf + p = gg\ldots\ldots(2).$$

Retranchant la seconde équation de la première, il vient

$$m(x^2 - f^2) + n(x - f) = zz - gg,$$

d'où

$$\frac{m(x+f)+n}{z+g} = \frac{z-g}{x-f}.$$

Soit

$$\frac{m(x+f)+n}{z+g} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}},$$

on aura

$$\frac{z-g}{x-f} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}};$$

partant

$$z+g = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}[m(x+f)+n], \quad z-g = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}(x-f);$$

ôtant la seconde équation de la première, on trouve pour différence

$$2g\mathrm{AB} = (m\mathrm{A}^2 - \mathrm{B}^2)x + (m\mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2)f + n\mathrm{A}^2,$$

et conséquemment,

$$x = \frac{2gAB - (mA^2 + B^2)f - nA^2}{mA^2 - B^2},$$

$$z = \frac{g(mA^2 + B^2) - AB(2mf + n)}{mA^2 - B^2}.$$

Pour avoir les valeurs de x et de z en nombres entiers, la supposition la plus simple est, 1°. $mA^2 - B^2 = 1$, à laquelle répondent

$$x = 2gAB - (mA^2 + B^2)f - nA^2,$$
$$z = g(mA^2 + B^2) - AB(2mf + n);$$

2°. $mA^2 - B^2 = -1$, pour laquelle on a

$$x = nA^2 + (mA^2 + B^2)f - 2gAB,$$
$$z = AB(2mf + n) - g(mA^2 + B^2).$$

La question est donc ramenée à celle de trouver pour A deux nombres entiers propres à rendre $mA^2 - 1$ et $mA^2 + 1$ des carrés parfaits, parce que les conditions (1°.) et (2°.) donnent

$$mA^2 - 1 = B^2, \quad mA^2 + 1 = B^2.$$

Prenons pour exemple, le trinome

$$5x^2 + 7x - 8,$$

qu'il s'agit de rendre un carré parfait par des nombres entiers pour x : on aura

$$m = 5, \quad n = 7, \quad p = -8,$$

et les deux conditions

$$5A^2 - 1 = B^2, \quad 5A^2 + 1 = B^2,$$

auxquelles il faut satisfaire en nombres entiers. Pour la seconde, $A = 4$ donne

$$5A^2 + 1 = 81.$$

Ainsi

$$B = 9, \quad mA^2 + B^2 = 161, \quad nA^2 = 112, \quad AB = 36:$$

6..

de ces valeurs résultent

$$(3)\ldots x = 112 + 161f - 72g, \quad z = 36(10f+7) - 161g\ldots(4);$$

mais à l'égard du trinome proposé, on reconnaît, après avoir essayé quelques nombres sous les deux signes, que la substitution 4 pour x, donne

$$5x^2 + 7x - 8 = 100;$$

on prendra donc 4 pour f et 10 pour g, d'après (2), et on aura

$$x = 36, \quad z = 82.$$

Ces valeurs de x et de z, substituées pour f et g dans les formules (3) et (4), donneront

$$x = 4, \quad z = 1.$$

Nous ne trouvons jusqu'ici que les nombres 4 et 36 qui, substitués pour x, rendent le trinome proposé un carré parfait. Mais il est permis de prendre g négativement, et de poser

$$x = 112 + 161f + 72g, \quad z = 36(10f + 7) + 161g,$$

formules dans lesquelles on écrira d'abord pour f et g les nombres 4 et 10, qui donnent

$$x = 1476, \quad z = 3302.$$

Ces valeurs de x et z, écrites pour f et g dans les formules précédentes, conduiront à

$$x = 475492, \quad z = 1068234.$$

En continuant de la même manière, on trouvera une infinité de nombres entiers propres à rendre le trinome un carré parfait.

On rendra $5A^2 - 1$ un carré, en prenant $A = 1$, ce qui donne

$$B = 2, \quad mA^2 + B^2 = 9, \quad nA^2 = 7, \quad AB = 2,$$

valeurs auxquelles répondent les formules

$$x = 4g - 9f - 7, \quad z = 9g - 2(10f + 7),$$

dans lesquelles on écrira d'abord, pour f et g, les nombres 4 et 10, et on aura

$$x = -3, \quad z = -4.$$

Ces valeurs de x et de z, reportées pour f et g dans les mêmes formules, fourniront

$$x = 4, \quad z = 10;$$

mais en prenant g avec le signe $-$, on a

$$x = -4g - 9f - 7, \quad z = -9g - 2(10f + 7),$$

qui, pour $f = -3$ et $g = -4$, donnent

$$x = 36, \quad z = 82:$$

ces nombres 36 et 82, substitués pour f et g dans les deux dernières formules, donnent

$$x = -659, \quad z = -1472,$$

et on trouve de cette manière une autre série de nombres entiers qui résolvent la question proposée.

28. Proposons-nous encore de trouver les plus petits nombres entiers qui, substitués pour x et pour y, rendront la quantité

$$Ax^m + Byx^{m-1} + Cy^2x^{m-2} + \ldots\ldots + Ny^m \ldots\ldots (1),$$

la plus petite possible, A, B, C, etc. étant des nombres entiers positifs ou négatifs. Si l'on fait $x = yz$, ce qui change le polynome (1) dans le suivant

$$y^m[Az^m + Bz^{m-1} + Cz^{m-2} + \ldots\ldots + N],$$

et qu'on désigne par a, a', a'', etc. les racines réelles, et par $\alpha \pm \mathcal{C}\sqrt{-1}$, $\alpha' \pm \mathcal{C}'\sqrt{-1}$, etc., les racines imagi-

naires de

$$Az^m + Bz^{m-1} + Cz^{m-2} + \ldots\ldots + N = 0 \ldots\ldots (2),$$

le polynome proposé pourra (Ire sect.) se mettre sous la forme

$$A(x-ay)(x-a'y)\ldots[(x-\alpha y)^2+\mathcal{C}^2y^2][(x-\alpha'y)^2+\mathcal{C}'^2y^2], \text{ etc.}$$

La question se réduit donc à faire ensorte que le produit précédent soit le plus petit possible. Que p et q soient des valeurs de x et de y correspondantes au *minimum*, ou à la plus petite valeur du produit, et qu'on prenne pour x et pour y des valeurs plns petites, il faudra que le produit devienne plus grand; car autrement, pour $x=p$ et $y=q$, il ne serait pas le plus petit possible : il faudra donc que quelqu'un de ses facteurs augmente de valeur. Or si a, par exemple, est une quantité négative, le facteur $p-aq$ qui devient $p+aq$, diminuera par p et par q; et, dans le même cas, le facteur $(p-\alpha q)^2+\mathcal{C}^2q^2$ diminuera, si α est un nombre négatif. Donc les seuls facteurs qui puissent croître, lorsque p et q diminuent, sont ceux qui correspondent aux racines réelles positives, ou aux racines imaginaires qui ont la partie réelle positive; et, par rapport à ces derniers, il est clair que leur accroissement ne dépend que de la partie $p-\alpha q$, puisque $\mathcal{C}^2q^2$ diminue avec q. Ainsi, dans le cas du *minimum*, les valeurs de p et de q doivent être telles, que p et q venant à diminuer, la quantité $p-aq$ augmente, en prenant pour a une des racines réelles positives de l'équation (2), ou une des parties réelles positives des racines imaginaires de la même équation, si elle en comporte.

Soient r et s deux nombres entiers, positifs et premiers entr'eux, moindres que p et q; il faudra donc qu'on ait

$$r - as > p - aq,$$

abstraction faite des signes de ces quantités : or si l'on divise le premier membre de l'inégalité par s et le second par q,

on aura

$$\frac{r}{s} - a > \frac{p}{q} - a.$$

Ainsi (Ire sect., chap. XXXI) $\frac{r}{s}$, $\frac{p}{q}$ seront des fractions principales, consécutives et convergentes vers a, ensorte que

$$ps - qr = \pm 1,$$

le signe supérieur ayant lieu (Ire sect., chap. XXXI), lorsque la fraction $\frac{p}{q}$ est de rang impair, ou lorsque $\frac{p}{q}$ est $> a$; ou bien encore lorsque $p - aq$ est une quantité positive, et l'inférieur, lorsque $p - aq$ est une quantité négative; donc $p - aq$, $r - as$ seront de différens signes.

Il faudra donc réduire chacune des quantités a, a', a'', etc. en fraction continue par les méthodes connues, et en déduire ensuite les fractions convergentes dont il s'agit; après quoi on fera successivement p égal à tous les numérateurs de ces fractions, et q égal aux dénominateurs correspondans, et celle de ces suppositions qui donnera la moindre valeur de la fonction proposée, sera nécessairement aussi celle qui répondra au *minimum* cherché.

Nous avons supposé que les nombres p et q devaient être tous deux positifs; il est clair que si on les prenait tous deux négatifs, il n'en résulterait aucun changement dans la valeur absolue de la formule proposée; elle ne ferait que changer de signe dans le cas de m impair, puisque la proposée revient à

$$y^m\left(A\frac{x^m}{y^m} + B\frac{x^{m-1}}{y^{m-1}} + \ldots\ldots + N\right),$$

et elle demeurerait absolument la même pour m pair. Ainsi il n'importe quels signes on donne aux nombres p et q lorsqu'on les suppose de même signe.

Mais si l'on donne à p et q des signes différens, les termes alternatifs de la proposée changeront de signe, ce qui en fera

changer aux racines a, a', etc., $\alpha \pm 6\sqrt{-1}$, $\alpha' \pm 6'\sqrt{-1}$; de sorte que celles des quantités a, a', etc. α, α', etc. qui étaient négatives, et par conséquent inutiles dans le premier cas, devront être positives dans celui-ci, et employées à la place des autres.

Donc, en général, si l'on recherche le *minimum* de la formule proposée, sans autre restriction sinon que p et q soient des nombres entiers, il faudra prendre successivement toutes les racines a, a', etc., et toutes les parties réelles α, α', etc. des racines imaginaires de l'équation

$$Az^m + Bz^{m-1} + Cz^{m-2} + \ldots\ldots + N = 0,$$

en faisant abstraction des signes de ces quantités ; mais ensuite il faudra donner à p et à q les mêmes signes ou des signes différens, suivant que la quantité qu'on aura prise pour a, aura eu originairement le signe plus ou le signe moins, parce que, dans ce dernier cas, les substitutions $+p$ et $-q$, ou $-p$, $+q$ pour x et y, changent chaque racine négative en racine positive qu'on doit employer.

Lorsque parmi les racines réelles a, a', etc., il y en a de commensurables, alors il est clair que la quantité proposée deviendra nulle, en faisant $\frac{p}{q}$ égal à une de ces racines, de sorte que dans ce cas il n'y aura pas, à proprement parler, de *minimum*; dans tous les autres, il sera impossible que la quantité dont il s'agit, devienne zéro, tant que p et q seront des nombres entiers.

Faisons une application de ces principes à la recherche du *minimum* des fonctions du second degré, de la forme

$$Ax^2 + Byx + Cy^2,$$

question qui revient à celle-ci : *Trouver les valeurs de* p *et* q *qui rendront la quantité*

$$Ap^2 + Bpq + Cq^2,$$

la plus petite qu'il est possible, dans l'hypothèse qu'on n'admette pour p *et* q *que des nombres entiers.*

Suivant la méthode, il faut chercher les racines de l'équation

$$Az^2 + Bz + C = 0,$$

lesquelles sont

$$z = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} = \frac{-B \pm \sqrt{D}}{2A}.$$

Or, 1°. si $B^2 - 4AC$ est un carré, les deux racines seront commensurables, et il n'y aura pas de *minimum*, parce que, par la substitution de $\frac{p}{q}$ pour z, on aura

$$A\frac{p^2}{q^2} + B\frac{p}{q} + C = 0 = Ap^2 + Bpq + Cq^2.$$

2°. Si $B^2 - 4AC$ n'est pas un carré, les deux racines seront irrationnelles ou imaginaires, suivant que $B^2 - 4AC$ sera $>$ ou < 0, ce qui fait deux cas qu'il faut considérer séparément. Nous commencerons par le dernier qui est le plus facile à résoudre.

Les deux racines étant imaginaires, on aura $-\frac{B}{2A}$ pour la partie toute réelle de ces racines, laquelle devra, par conséquent, être prise pour a; ainsi il n'y aura qu'à réduire en fraction continue, la fraction $-\frac{B}{2A}$ (prise abstraction faite du signe), et en déduire la série des fractions convergentes, laquelle sera nécessairement terminée : cela fait, on essaiera successivement pour p les numérateurs de ces fractions, et pour q les dénominateurs correspondans, ayant soin de donner à p et à q les mêmes signes ou des signes différens, suivant que $-\frac{B}{2A}$ sera un nombre positif ou négatif. On trouvera de cette manière les valeurs de p et q, propres à rendre la formule proposée un *minimum*.

Soit proposée, pour exemple, la quantité

$$49x^2 - 238xy + 290y^2:$$

on a ici

$$A = 49, \quad B = -238, \quad C = 290,$$

$$B^2 - 4AC = -196, \quad -\frac{B}{2A} = \frac{238}{98} = \frac{17}{7}:$$

opérant donc sur cette fraction $\frac{17}{7}$, on trouvera les quotiens 2, 2, 3, à l'aide desquels on formera ces fractions,

$$\begin{array}{cccc} & 2, & 2, & 3, \\ \frac{1}{0}, & \frac{2}{1}, & \frac{5}{2}, & \frac{17}{7}; \end{array}$$

de sorte que les membres à essayer seront 1, 2, 5, 17 pour p, et 0, 1, 2, 7 pour q. Si donc on désigne les résultats de ces substitutions par R, on aura ce tableau :

p	q	R
1	0	49
2	1	10
5	2	5
17	7	49

d'où l'on voit que la plus petite valeur de R est $= 5$, valeur due aux suppositions $p = 5$, $q = 2$.

Qu'on ait, en second lieu, à chercher le *minimum* de

$$7x^2 + 22xy + 20y^2:$$

on a, dans ce cas,

$$A = 7, \quad B = 22, \quad C = 20, \quad B^2 - 4AC = -76;$$

le radical est donc imaginaire. La fraction $-\frac{B}{2A} = -\frac{11}{7}$

donnera ces quotiens 1, 1, 1, 3, desquels on déduira cette suite de fractions convergentes,

$$\frac{1}{0}, \quad \frac{1}{1}, \quad \frac{2}{1}, \quad \frac{3}{2}, \quad \frac{11}{7};$$

mais comme la fraction est négative, on devra prendre p et q avec des signes différens; et, par exemple, q négatif, ce qui est indifférent pour le résultat : on aura donc ce tableau :

p	q	R
1	0	7
1	— 1	5
2	— 1	4
3	— 2	11
11	— 7	133

le *minimum*, qui est 4, répond aux suppositions 2, — 1 : pour ce cas, la proposée, en remplaçant x par p, et y par q, devient

$$7\left[\left(p+\frac{11}{7}q\right)^2+\frac{19}{49}q^2\right].$$

Soit, en second lieu, $B^2-4AC>0$ ou $D>0$: si l'équation a ses deux racines positives, il faudra les prendre successivement pour a, et faire la même opération sur chacune d'elles, comme on le verra dans les exemples ci-dessous; mais si l'une des deux racines, ou toutes deux étaient négatives, on les rendrait positives, en changeant seulement le signe de B, puis on opérerait comme ci-dessus, en observant de prendre les valeurs de p et q avec des signes différens.

Pour faciliter les déterminations, nous reprendrons les

valeurs de λ, λ', λ'', etc., trouvées (17), savoir,

$$\lambda < a,$$

$$\lambda' < \frac{p^\circ - aq^\circ}{aq' - p'} < \frac{A(p^\circ - aq^\circ)(bq' - p')}{A(aq' - p')(bq' - p')},$$

$$\lambda'' < \frac{aq' - p'}{p'' - aq''} < \frac{A(aq' - p')(p'' - bq'')}{A(p'' - aq'')(p'' - bq'')},$$

$$\lambda''' < \frac{p'' - aq''}{aq''' - p'''} < \frac{A(p'' - aq'')(bq''' - p''')}{A(aq''' - p''')(bq''' - p''')};$$

etc.

or, a et b représentant les deux racines $\frac{-B+\sqrt{D}}{2A}$, $\frac{-B-\sqrt{D}}{2A}$, si l'on considère d'abord les dénominateurs, on trouve en effectuant les opérations,

$$A(aq' - p')(bq' - p') = Ap'^2 - A(a+b)p'q' + Aabq'^2$$
$$= Ap'^2 + Bq'p' + Cq'^2,$$

$$A(p'' - aq'')(p'' - bq'') = Ap''^2 - A(a+b)p''q'' + Aabq''^2$$
$$= Ap''^2 + Bp''q'' + Cq''^2.$$

etc.

Passant ensuite aux numérateurs, on trouve

$$A(p^\circ - Aq^\circ)(bq' - p') = -A\lambda - \tfrac{1}{2}B - \tfrac{1}{2}\sqrt{D},$$

à cause de

$$p^\circ = 1,\quad q^\circ = 0,\quad p' = \lambda,\quad q' = 1,\quad b = \frac{-B-\sqrt{D}}{2A}$$

(17); ensuite, en tenant compte des valeurs de a et b, on a

$$A(aq' - p')(p'' - bq'') = -Ap'p'' + Aap''q' + Abp'q'' - Aabq'q''$$
$$= -Ap'p'' - Cq'q'' - \tfrac{1}{2}B(p'q'' + q'p'')$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sqrt{D}(p''q' - q''p'),$$

$$A(p'' - aq'')(bq''' - p''') = -Ap''p''' + Aap'''q'' + Abp''q'''$$
$$- Aabq''p'''$$
$$= -Ap''p''' - Cq''q''' - \tfrac{1}{2}B(p''q''' + q''p''')$$
$$+ \tfrac{1}{2}\sqrt{D}(p'''q'' - q'''p''),$$

et ainsi de suite. Qu'on pose, pour abréger,

$$
\begin{aligned}
P^{\circ} &= A, \\
P' &= Ap'^2 + Bp'q' + Cq'^2, \\
P'' &= Ap''^2 + Bp''q'' + Cq''^2, \\
P''' &= Ap'''^2 + Bp'''q''' + Cq'''^2, \\
&\text{etc.};
\end{aligned}
$$

puis

$$
\begin{aligned}
Q^{\circ} &= \tfrac{1}{2} B, \\
Q' &= A\lambda + \tfrac{1}{2} B, \\
Q'' &= Ap'p'' + \tfrac{1}{2} B(p'q'' + q'p'') + Cq'q'', \\
Q''' &= Ap''p''' + \tfrac{1}{2} B(p''q''' + q''p''') + Cq''q''', \\
&\text{etc.},
\end{aligned}
$$

les inégalités

$$
\begin{aligned}
\lambda &< a, \\
\lambda' &< \frac{A(p^{\circ} - aq^{\circ})(bq' - p')}{A(aq' - p')(bq' - p')}, \\
\lambda'' &< \frac{A(aq' - p')(p'' - bq'')}{A(p'' - aq'')(p'' - bq'')}, \\
\lambda''' &< \frac{A(p'' - aq'')(bq''' - p''')}{A(aq''' - p''')(bq''' - p''')}, \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

réduites d'après les relations connues

$p''q' - q''p' = 1, \quad p'''q'' - q'''p'' = -1, \quad p^{\text{IV}}q''' - q^{\text{IV}}p''' = 1$ etc.,

se transformeront dans celles-ci

$$
\left.
\begin{aligned}
\lambda &< \frac{-Q^{\circ} + \frac{1}{2}\sqrt{D}}{P^{\circ}} \\
\lambda' &< \frac{-Q' - \frac{1}{2}\sqrt{D}}{P'} \\
\lambda'' &< \frac{-Q'' + \frac{1}{2}\sqrt{D}}{P''} \\
\lambda''' &< \frac{-Q''' - \frac{1}{2}\sqrt{D}}{P'''} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
\right\} \ldots\ldots (M).
$$

On tire de là,

$$\left.\begin{aligned} P' &= \frac{Q'^2 - \frac{1}{4}D}{P^0} \\ P'' &= \frac{Q''^2 - \frac{1}{4}D}{P'} \\ P''' &= \frac{Q'''^2 - \frac{1}{4}D}{P''} \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (P).$$

Si l'on se reporte aux notations et à l'analyse employées (n°. 23), on reconnaîtra facilement que les formules

$$\begin{aligned} B' &= 2A\lambda + B, \\ B'' &= 2A'\lambda' + B', \\ B''' &= 2A''\lambda'' + B'', \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} A' &= \frac{B'^2 - D}{4A}, \\ A'' &= \frac{B''^2 - D}{4A'}, \\ A''' &= \frac{B'''^2 - D}{4A''}, \end{aligned}$$

rentrent dans (N) et (P).

On demande quels nombres entiers il faudrait prendre pour x et y, afin que la quantité

$$9x^2 - 118xy + 378y^2$$

devînt un *minimum?* On a

$$A = 9, \quad B = -118, \quad C = 378, \quad D = 316,$$
$$\tfrac{1}{2}\sqrt{D} = \sqrt{79}, \qquad z = \frac{59 \pm \sqrt{79}}{9}:$$

ainsi les deux racines sont positives, ensorte qu'on devra les employer successivement.

Soit donc pris, en premier lieu, le radical avec le signe plus : on fera le calcul suivant, fondé sur les formules (M), (N) et (P).

$Q^{\circ} = -59$	$P^{\circ} = 9$	$\lambda < \frac{59+\sqrt{79}}{9} = 7$
$Q' = +9.7 - 59 = 4$	$P' = \frac{16-79}{9} = -7$	$\lambda' < \frac{-4-\sqrt{79}}{-7} = 1$
$Q'' = -7.1 + 4 = -3$	$P'' = \frac{9-79}{-7} = 10$	$\lambda'' < \frac{3+\sqrt{79}}{10} = 1$
$Q''' = +10.1 - 3 = 7$	$P''' = \frac{49-79}{10} = -3$	$\lambda''' < \frac{-7-\sqrt{79}}{-3} = 5$
$Q^{iv} = -3.5 + 7 = -8$	$P^{iv} = \frac{64-79}{-3} = 5$	$\lambda^{iv} < \frac{8+\sqrt{79}}{5} = 3$
$Q^{v} = +5.3 - 8 = 7$	$P^{v} = \frac{49-79}{5} = -9$	$\lambda^{v} < \frac{-7-\sqrt{79}}{-6} = 2$
$Q^{vi} = -6.2 + 7 = -5$	$P^{vi} = \frac{25-79}{-6} = 9$	$\lambda^{vi} < \frac{5+\sqrt{79}}{9} = 1$
$Q^{vii} = +9.1 - 5 = 4$	$P^{vii} = \frac{16-79}{9} = -7$	$\lambda^{vii} < \frac{-4-\sqrt{79}}{-7} = 1$
etc.	etc.	etc.

Comme $Q^{vii} = Q'$ et $P^{vii} = P'$, on aura

$Q^{viii} = Q''$, $Q^{ix} = Q'''$, etc.; $P^{viii} = P''$, $P^{ix} = P'''$, etc.,

de sorte qu'on pourra continuer les séries ci-dessus à l'infini, en ne faisant que répéter les mêmes termes.

Prenant le radical en moins, on aura le tableau suivant.

$Q^{\circ} = -59$	$P^{\circ} = 9$	$\lambda < \frac{59 - \sqrt{79}}{9} = 5$
$Q' = 9.5 - 59 = -14$	$P' = \frac{196 - 79}{9} = -13$	$\lambda' < \frac{14 + \sqrt{79}}{13} = 1$
$Q'' = 13.1 - 14 = -1$	$P'' = \frac{1 - 79}{13} = -6$	$\lambda'' < \frac{1 - \sqrt{79}}{-6} = 1$
$Q''' = -6.1 - 1 = -7$	$P''' = \frac{49 - 79}{-6} = 5$	$\lambda''' < \frac{7 + \sqrt{79}}{-5} = 3$
$Q^{IV} = 5.3 - 7 = 8$	$P^{IV} = \frac{64 - 79}{5} = -3$	$\lambda^{IV} < \frac{-8 - \sqrt{76}}{-3} = 5$
$Q^{V} = -3.5 + 8 = -7$	$P^{V} = \frac{49 - 79}{-3} = 10$	$\lambda^{V} < \frac{7 + \sqrt{79}}{10} = 1$
$Q^{VI} = 10.1 - 7 = 3$	$P^{VI} = \frac{9 - 79}{10} = -7$	$\lambda^{VI} < \frac{-3 - \sqrt{79}}{-7} = 1$
$Q^{VII} = -7.1 + 3 = -4$	$P^{VII} = \frac{16 - 79}{-7} = 9$	$\lambda^{VII} < \frac{4 + \sqrt{79}}{9} = 1$
$Q^{VIII} = 9.1 - 4 = 5$	$P^{VIII} = \frac{25 - 79}{9} = -6$	$\lambda^{VIII} < \frac{-5 - \sqrt{79}}{-6} = 2$
$Q^{IX} = -6.2 + 5 = -7$	$P^{IX} = \frac{49 - 79}{-6} = 5$	$\lambda^{IX} < \frac{7 + \sqrt{79}}{5} = 3$

On peut s'arrêter à $Q^{IX} = Q'''$ et $P^{IX} = P'''$, parce qu'on ne retrouverait plus que les termes déjà obtenus.

Or, si on considère les valeurs des termes P°, P', etc. trouvées dans les deux cas, et qu'on sait être celles de la fonction proposée, en changeant x en p et y en q, on verra que le plus petit de ces termes, est -3 : dans le premier cas, c'est le terme P''', auquel répondent p''' et q''' ; et dans le second cas, c'est le terme P^{IV}, auquel répondent p^{IV} et q^{IV}.

Ainsi, dans le premier cas, on prendra les quotiens λ, λ', λ'', savoir, 7, 1, 1, et l'on formera les fractions principales convergentes $\frac{7}{1}$, $\frac{8}{1}$, $\frac{15}{2}$; la troisième sera $\frac{p'''}{q'''}$, ensorte que l'on aura

$$p''' = 15, \quad q''' = 2.$$

Dans le second cas, on prendra les quotiens λ, λ', λ'', λ''', savoir, 5, 1, 1, 3, lesquels donneront $\frac{5}{1}$, $\frac{6}{1}$, $\frac{11}{2}$, $\frac{39}{7}$, de sorte que l'on aura

$$p^{\text{iv}} = 39, \quad q^{\text{iv}} = 7.$$

Mais, dans les deux cas, le terme -3 reviendra au bout de chaque intervalle de six termes : ainsi, dans le premier,

$$P''' = -3, \quad P^{\text{ix}} = -3, \quad P^{\text{xv}} = -3, \quad \text{etc.};$$

dans le second,

$$P^{\text{iv}} = -3, \quad P^{\text{x}} = -3, \quad P^{\text{xvi}} = -3, \quad \text{etc.};$$

conséquemment on aura pour les valeurs satisfaisantes de x et y, ou de p et q,

1°. p''', q'''; p^{ix}, q^{ix}; p^{xv}, q^{xv}; etc.;
2°. p^{iv}, q^{iv}; p^{x}, q^{x}; p^{xvi}, q^{xvi}; etc.:

or les valeurs de λ, λ', λ'', etc. sont dans le premier cas,

7, 1, 1, 5, 3, 2, 1, 1, 1, 5, 3, 2, 1, 1, 1, 5, 3, etc.

à l'infini; il n'y aura donc qu'à former les fractions

$$\frac{7}{1}, \frac{8}{1}, \frac{15}{2}, \frac{83}{11}, \frac{264}{35}, \frac{611}{81}, \frac{875}{116}, \frac{1486}{197}, \frac{2361}{313}, \frac{13291}{1762},$$

et on pourra prendre pour p les numérateurs de la troisième, de la neuvième, etc.; et pour q les dénominateurs correspondans; on aura donc

$$p = 15, \quad q = 2, \quad \text{ou} \quad p = 2361, \quad q = 313, \quad \text{ou etc.}$$

Dans le second cas, les valeurs de λ, λ', λ'', λ''', etc. seront

5, 1, 1, 3, 5, 1, 1, 1, 2, 3, 5, 1, 1, 1, 2, etc.,

parce que

$$\lambda^{\text{IX}} = \lambda''', \quad \lambda^{\text{X}} = \lambda^{\text{IV}}.$$

On formera donc les fractions

$$\frac{5}{1}, \frac{6}{1}, \frac{11}{2}, \frac{39}{7}, \frac{206}{37}, \frac{245}{44}, \frac{451}{81}, \frac{696}{125}, \frac{1843}{331}, \frac{6225}{1118}, \frac{32968}{5921};$$

et les fractions quatrième, dixième, etc. donneront les valeurs de p et q, lesquelles seront

$$p = 39, \quad q = 7, \quad \text{ou} \quad p = 6225, \quad q = 1118, \quad \text{etc.}$$

De cette manière, on pourra trouver par ordre, toutes les valeurs de p et q qui rendront la formule proposée $= -3$, valeur qui est la plus petite qu'elle puisse recevoir.

On pourrait proposer de trouver la plus petite valeur positive de la même formule; elle est 5 dans les deux cas, et on aura, par les fractions ci-dessus,

$$p = 83, \quad q = 11, \quad \text{ou} \quad p = 13291, \quad q = 1762, \quad \text{etc.}$$
$$p = 11, \quad q = 2, \quad \text{ou} \quad p = 1843, \quad q = 331, \quad \text{etc.}$$

Ceux qui desireraient approfondir cette matière, feront bien de consulter la *Théorie des Nombres*, par M. *Legendre*, les *Mémoires de l'Académie de Berlin*, années 1767 et 1768, et le deuxième volume de l'*Algèbre d'Euler*, *Additions* par M. *Lagrange*.

CHAPITRE V.

Evaluation des sommes des puissances entières, positives et négatives des racines d'une équation. Application de ces formules.

29. Les sommes des puissances d'un même exposant, tant positives que négatives de toutes les racines d'une équation, jouissent de la propriété de pouvoir toujours être traduites en coefficiens de cette équation : nous verrons bientôt qu'il en est de même de toute fonction invariable ou symétrique des racines, c'est-à-dire, de toute combinaison de ces racines dont la valeur numérique reste la même, en faisant dans la fonction tous les échanges possibles entre les racines. On trouvera dans les chapitres suivans l'emploi des formules que nous allons faire connaître.

La proposition dont il s'agit, peut s'énoncer ainsi : *il existe entre les sommes de puissances semblables de plusieurs quantités et leurs sommes de produits deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, etc., des relations soumises à une loi régulière, et telles que les premières peuvent toujours être exprimées en fonctions rationnelles et entières des dernières, et réciproquement.*

Soit donc l'équation

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} \ldots + V = 0 \ldots (M),$$

a, b, c, d, etc. étant les racines : on aura l'identité

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - \ldots\ldots - Tx + V$$
$$= (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \text{ etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots (N),$$

qui sera encore vraie en écrivant $x+i$ pour x, x et i étant quelconques, puisque le premier membre est un produit effectué, et le second un produit indiqué ; ensorte que

$$(x+i)^m - A(x+i)^{m-1} + B(x+i)^{m-2} - \ldots - T(x+i) + V$$
$$= [(x-a)+i][(x-b)+i][(x-c)+i][(x-d)+i] \text{ etc.}$$

On aura donc entre les coefficiens de la première puissance de i, l'identité

$$mx^{m-1} - A(m-1)x^{m-2} + B(m-2)x^{m-3} + \text{etc.} - T$$
$$= (x-b)(x-c)(x-d) \text{ etc.}$$
$$+ (x-a)(x-c)(x-d) \text{ etc.}$$
$$+ (x-a)(x-b)(x-d) \text{ etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots (P);$$
$$\text{etc.}$$

dont le second membre est la somme des quotiens que l'on obtient en divisant le produit de tous les facteurs de la proposée, successivement par chacun de ces facteurs. Divisant (P) par (N), il viendra

$$\frac{mx^{m-1} - A(m-1)x^{m-2} + B(m-2)x^{m-3} \ldots\ldots - T}{x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - Tx + V}$$
$$= \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} + \frac{1}{x-c} + \frac{1}{x-d} + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots (Q);$$

mais

$$\frac{1}{x-a} = \frac{1}{x} + \frac{a}{x^2} + \frac{a^2}{x^3} + \text{etc.},$$
$$\frac{1}{x-b} = \frac{1}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{b^2}{x^3} + \text{etc.},$$
$$\frac{1}{x-c} = \frac{1}{x} + \frac{c}{x^2} + \frac{c^2}{x^3} + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

Posons donc, pour abréger,

$$a + b + c + d + \text{etc.} = S_1,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \text{etc.} = S_2,$$
$$a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + \text{etc.} = S_3,$$
etc.
$$a^m + b^m + c^m + d^m + \text{etc.} = S_m,$$

S_1, S_2, $S_3 \ldots\ldots S_m$ étant des fonctions à évaluer ; l'identité (Q) deviendra

$$\frac{mx^{m-1} - A(m-1)x^{m-2} + B(m-2)x^{m-3} \ldots\ldots - T}{x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - \ldots\ldots\ldots\ldots - Tx + V}$$
$$= \frac{m}{x} + \frac{S_1}{x^2} + \frac{S_2}{x^3} + \frac{S_3}{x^4} + \ldots + \frac{S_m}{x^{m+1}} + \frac{S_{m+1}}{x^{m+2}} + \text{etc.} \ldots (R).$$

Multipliant les deux membres de (R) par le dénominateur du premier, on obtiendra

$$mx^{m-1} - A(m-1)x^{m-2} + B(m-2)x^{m-3} - C(m-3)x^{m-4} + \ldots - T$$
$$\begin{array}{l|l|l|l} = mx^{m-1} - mA & x^{m-2} + mB & x^{m-3} - mC & x^{m-4} + \text{etc.} \\ \qquad + S_1 & \quad -AS_1 & \quad +BS_1 & \\ & \quad + S_2 & \quad -AS_2 & \\ & & \quad + S_3 & \end{array}$$

De la comparaison des coefficiens des puissances semblables de x, résulteront les égalités

$$m = m,$$
$$S_1 - mA = -(m-1)A,$$
$$S_2 - AS_1 + mB = (m-2)B,$$
$$S_3 - AS_2 + BS_1 - mC = -(m-3)C,$$
etc.

desquelles on déduit

$$S_1 - A = 0 \ldots\ldots (1),$$
$$S_2 - AS_1 + 2B = 0 \ldots\ldots (2),$$
$$S_3 - AS_2 + BS_1 - 3C = 0 \ldots\ldots (3),$$
$$S_4 - AS_3 + BS_2 - CS_1 + 4D = 0 \ldots\ldots (4),$$
etc.,

résultats dont la loi est facile à saisir ; mais on observera qu'ils supposent les signes de l'équation alternatifs.

On remarquera qu'en multipliant le second membre de (R) par x^m, le terme $\frac{S_m}{x^{m+1}}$ multiplié par x^m, donne pour produit $S_m x^{-1}$; celui de V par le premier terme $\frac{m}{x}$, est mVx^{-1} ; ensorte que le coefficient total de x^{-1}, est

$$S_m - AS_{m-1} + BS_{m-2} - \ldots\ldots + mV = 0,$$

ou, en observant que $m = S_0$,

$$S_m - AS_{m-1} + BS_{m-2} - CS_{m-3} + \ldots + VS = 0 \ldots (S),$$

parce que le terme de même exposant de x dans le premier membre, est $0 \times V = 0$. Les sommes S_1, S_2, $S_3 \ldots S_m$ dépendent visiblement du premier, des deux, trois, etc. premiers coefficiens de l'équation, et enfin S_m dépend de la totalité de ces coefficiens.

En multipliant le terme $\frac{S_{m+1}}{x^{m+2}}$ par x^m dans (R), on trouve $S_{m+1}x^{-2}$; d'autre part, en remontant vers la gauche, on a le produit de $\frac{S_1}{x^2}$ par V, qui est VS_1x^{-2} ; d'où l'on conclut pour le coefficient total de x^{-2},

$$S_{m+1} - AS_m + BS_{m-1} - \ldots + VS_1 = 0 \ldots (T),$$

parce que celui de x^{-2} dans le premier membre de (R), est encore nul.

On peut comprendre les formules (S), (T), etc. dans une seule. A cet effet, multiplions l'équation (M) par x^n, et nous aurons

$$x^{m+n} - Ax^{m+n-1} + Bx^{m+n-2} - Cx^{m+n-3} + \ldots - Tx^{n+1} + Vx^n = 0;$$

les substitutions $x = a$, $= b$, $= c$, $=$ etc. dans la précédente,

donneront

$$a^{m+n}-Aa^{m+n-1}+Ba^{m+n-2}-\ldots-Ta^{n+1}+Va^{n}=0\ldots.(U);$$
$$b^{m+n}-Ab^{m+n-1}+Bb^{m+n-2}-\ldots-Tb^{n+1}+Vb^{n}=0\ldots.(V),$$
etc.

Ajoutant toutes ces équations, on aura, d'après la notation adoptée,

$$S_{m+n}-AS_{m+n-1}+BS_{m+n-2}-\ldots\ldots-TS_{n+1}+VS_{n}=0.$$

Faisant dans cette formule $n=0, =1, =2$, etc., on retrouve les formules (S), (T), etc.

On observera que les formules (1), (2), (3), (4), etc. ne donnent les sommes des puissances des racines, que jusqu'à celles de l'ordre $m-1$ inclusivement, et qu'il faut ensuite, pour les puissances de l'ordre m et celles au-dessus, recourir aux formules (S), (T), etc.

Faisons quelques applications numériques. L'équation du troisième degré

$$x^3-2x-5=0,$$

comparée avec la proposée, donne

$$A=0,\quad B=-2,\quad C=+5,\quad D=0,\quad \text{etc.};$$

reportant ces valeurs dans les formules (1), (2), (3), (S), (T), etc., on en déduit les suivantes,

$$S_1=0,\ S_2=4,\ S_3=15,\ S_4=8,\ S_5=50,\ S_6=91,\ \text{etc.}$$

L'équation du quatrième degré

$$x^4-x^3-19x^2+49x-30=0,$$

donne

$$A=1,\quad B=-19,\quad C=-49,\quad D=-30.$$

Ces substitutions faites dans les formules (1), (2), (3), etc., (S), (T), etc. donnent

$$S_1=1,\quad S_2=39,\quad S_3=-89,\quad S_4=723,\quad \text{etc.}$$

30. Les formules précédentes servent encore à approcher de la plus grande des racines a, b, c, etc. de la proposée. En effet, il est clair que si toutes les racines sont réelles, et si la racine a est, par exemple, la plus grande, abstraction faite du signe, la puissance a_μ surpassera d'autant plus la puissance de même ordre des autres racines, et même la somme de ces puissances, que l'exposant μ sera plus grand; d'où il suit que $S_{\mu-1}$ et S_μ étant deux termes consécutifs dans la suite des sommes des puissances successives des racines, on aura, à très-peu près,

$$a = \frac{S_\mu}{S_{\mu-1}},$$

en observant que

$$S_\mu = a^\mu + b^\mu + c^\mu + \text{etc.},$$
$$S_{\mu-1} = a^{\mu-1} + b^{\mu-1} + c^{\mu-1} + \text{etc.}:$$

or cette valeur de la racine a sera d'autant plus approchée, que les termes $S_{\mu-1}$ et S_μ seront plus éloignés de la naissance de la série S_0, S_1, S_2..... L'illustre *Lagrange* observe et démontre (*Résol. des Équat. numer.*) que cette méthode ne sera en défaut, à cause des racines imaginaires, qu'autant qu'il s'en trouvera pour lesquelles le produit réel des deux racines correspondantes, sera plus grand que le carré de la plus grande des racines réelles.

Appliquons cette méthode à la recherche de la plus grande racine de l'équation

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0,$$

pour laquelle on a

$$m = 3, \quad A = 3, \quad B = 0, \quad C = -4,$$

et cette suite de valeurs des sommes des puissances des

racines, savoir :

$$S_1 = 3, \quad S_2 = 3, \quad S_3 = 9, \quad S_4 = 15,$$
$$S_5 = 33, \quad S_6 = 63, \quad S_7 = 129, \quad S_8 = 255,$$
$$S_9 = 513, \quad S_{10} = 1023, \text{ etc.},$$

dont les termes sont tels, que le quotient de chacun, divisé par le précédent, converge rapidement vers la racine 2 qui est en effet la plus grande des trois racines.

31. Par l'hypothèse $x = \frac{1}{y}$, d'où $y = \frac{1}{x}$, le problème serait, quant à la transformée, le même que le précédent, sur la proposée. Mais on pourra calculer directement les formules des sommes des puissances négatives. Pour cela, on développera les fractions

$$\frac{1}{x-a}, \quad \frac{1}{x-b}, \quad \frac{1}{x-c},$$

qui forment le second membre de l'identité (Q), etc., suivant les puissances positives de x, ce qui donnera la suivante,

$$\frac{mx^{m-1} - (m-1)Ax^{m-2} + (m-2)Bx^{m-3} - \ldots - T}{x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots\ldots\ldots\ldots - Tx + V}$$
$$= -\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \text{etc.}\right) - \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \text{etc.}\right)x - \text{etc.}$$
$$= -{}_1S - {}_2Sx - {}_3Sx^2 - \text{etc.},$$

en désignant par ${}_1S$, ${}_2S$, ${}_3S$, etc. les sommes des premières, secondes, etc. puissances négatives de la proposée. Les termes de la fraction qui forme le premier membre, étant écrits dans un ordre inverse, on aura

$$\frac{-T + 2Ux - 3Rx^2 + 4Qx^3 - \text{etc.}}{V - Tx + Ux^2 - Rx^3 + \text{etc.}}$$
$$= -{}_1S - {}_2Sx - {}_3Sx^2 - \text{etc.} \ldots\ldots\ldots (R').$$

Ensorte que multipliant les deux membres de (R′) par le dénominateur, et comparant ensuite les coefficiens des puissances semblables de x, on trouvera ces formules

$$_1S = \frac{T}{V},$$
$$_2S = \frac{T}{V}\,{}_1S - \frac{2}{V}U,$$
$$_3S = \frac{T}{V}\,{}_2S - \frac{U}{V}\,{}_1S + \frac{3}{V}R,$$
$$_4S = \frac{T}{V}\,{}_3S - \frac{U}{V}\,{}_2S + \frac{R}{V}\,{}_1S - \frac{4}{V}Q,$$
etc.,

dont les seconds membres forment une série récurrente ayant pour échelle de relation (Ire sect., chap. XX), $+\frac{T}{V}$, $-\frac{U}{V}$, $+\frac{R}{V}$, etc.

On trouve dans le n° 8 du tome III des *Annales de Mathématiques*, une démonstration de ce théorème, due à M. *Gergonne*, laquelle ne suppose que la théorie des combinaisons, et qui, suivant ce géomètre, est plus courte et plus simple que celles que l'on déduit de la théorie des équations. On peut encore consulter le n° 1 du tome IV des mêmes Annales.

32. Il est évident, à la simple inspection des valeurs

$$_1S = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \text{etc.}$$
$$_2S = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} + \text{etc.}$$
$$_3S = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} + \text{etc.}$$
etc.,

que si a est la plus petite racine soit positive, soit négative, la

puissance $\frac{1}{a^\mu}$ surpassera d'autant plus la somme des puissances semblables des autres racines, que cette racine sera plus petite que chacune des autres, et que l'exposant μ sera plus élevé. Par conséquent, si ${}_{\mu-1}S$ et ${}_{\mu}S$ sont deux termes consécutifs de la série ${}_1S$, ${}_2S$, ${}_3S$, etc., le quotient $\frac{{}_{\mu-1}S}{{}_{\mu}S}$ approchera d'autant plus de la valeur de la plus petite racine réelle de l'équation, qne ces termes seront plus éloignés de l'origine de la série. Ainsi cette série servira à trouver la plus petite racine. *Lagrange* observe encore que les racines imaginaires n'empêcheront pas l'approximation vers la plus petite racine réelle, pourvu que le carré de cette racine soit en même temps plus petit que chacun des produits réels des racines imaginaires.

CHAPITRE VI.

Evaluation des coefficiens de l'équation aux carrés des différences des racines, en coefficiens de l'équation donnée.

33. La formation de l'équation qui donne les carrés des différences entre les racines d'nne équation proposée, devient, dans quelques cas, très-laborieuse, lorsqu'on a recours à l'élimination (Ire sect., chap. XXVIII). Cette équation étant d'un usage fréquent dans la résolution des équations numériques, il sera bon d'avoir des formules qui donnent ses coefficiens au moyen de ceux de la proposée.

Soient, à cet effet, l'équation

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \ldots\ldots + V = 0\,;$$

a, b, c, etc. ses racines, A', B', C', etc. les coefficiens de l'équation aux carrés des différences : il s'agit donc d'évaluer A', B', C', etc. en A, B, C, etc. On est parvenu (chap V.) aux relations

$$\left.\begin{array}{l} S_1 - A = 0 \\ S_2 - AS_1 + 2B = 0, \\ S_3 - AS_2 + BS_1 - 3C = 0, \\ \quad\text{etc.} \end{array}\right\}\ldots\ldots(M),$$

qui donnent les sommes des puissances des racines en coefficiens, et réciproquement ; ensorte que la question se réduit à évaluer en A, B, C, etc., les sommes des puissances des racines de l'équation aux carrés des différences ; car remplaçant dans les formules précédentes, S_1, S_2, S_3, etc. par ces

expressions, les valeurs de A, B, C, etc. qu'on en déduira, seront celles de A', B', C', etc. Telle est la marche de la solution.

Considérons donc cette suite de binomes en nombre m,

$$(x-a)^n+(x-b)^n+(x-c)^n+(x-d)^n+\text{etc.},$$

lesquels développés suivant les puissances descendantes de x, donnent

$$\begin{aligned}(x-a)^n+(x-b)^n+(x-c)^n+(x-d)^n+\text{etc.}\\ =mx^n-n\,(a+b+c+d+\text{etc.})\,x^{n-1}\\ +\frac{n.n-1}{1.2}\,(a^2+b^2+c^2+d^2+\text{etc.})\,x^{n-2}\\ -\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}(a^3+b^3+c^3+d^3+\text{etc.})x^{n-3}+\text{etc.}\\ =mx^n-nS_1x^{n-1}+\frac{n.n-1}{1.2}\,S_2x^{n-2}\\ -\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\,S_3x^{n-3}+\text{etc.},\end{aligned}$$

S_1, S_2, S_3, etc. ayant même acception que ci-dessus. Si, dans cette identité, on fait successivement $x=a$, $=b$, $=c$, etc., et qu'on ajoute tous les résultats, le premier membre représentera la somme du degré n des différences entre les racines de la proposée, et on aura

$$\begin{aligned}(a-b)^n+(a-c)^n+\text{etc.}+(b-a)^n+(b-c)^n+\text{etc.}\\ +(c-a)^n+(c-b)^n+\text{etc.}\\ =m(a^n+b^n+c^n+\text{etc.})-nS_1\,(a^{n-1}+b^{n-1}+c^{n-1}+\text{etc.})\\ +\frac{n.n-1}{1.2}\,S_2\,(a^{n-2}+b^{n-2}+c^{n-2}+\text{etc.})+\text{etc.}\\ =mS_n-nS_1S_{n-1}+\frac{n.n-1}{1.2}\,S_2S_{n-2}-\ldots\ldots\pm S_nS_0\,;\end{aligned}$$

le signe $+$ ayant lieu pour n pair, et le signe $-$ pour n impair.

Dans l'hypothèse de n nombre impair, le premier membre

se réduit à zéro par la destruction mutuelle de tous les termes, puisque, dans ce cas, les puissances conservent les signes des racines qui sont égales deux à deux, et de signes différens : le second membre devient nul de lui-même, en observant que le dernier terme $-S_nS_0$ détruit le premier, à cause de $S_0=m$, que l'avant-dernier détruit le second, et ainsi de suite ; ensorte que le nombre des termes étant pair, il ne reste rien du second membre. Cette analyse ne fournit donc aucune conclusion dans ce cas. Mais lorsque n est un nombre pair $=2\mu$, l'identité précédente donne, en désignant son premier membre par $2\sigma_\mu$,

$$2\sigma_\mu = mS_{2\mu} - 2\mu S_1 S_{2\mu-1} + 2\mu.\frac{2\mu-1}{2}S_2S_{2\mu-2}$$
$$-2\mu.\frac{2\mu-1}{2}.\frac{2\mu-2}{3}S_3S_{2\mu-3} + \text{etc.}$$

Comme les termes du second membre sont les mêmes à des distances égales de celui du milieu qui contient $S_\mu.S_\mu$, en réunissant ceux qui sont égaux, tous les termes du développement, excepté celui-là, seront multipliés par 2 ; c'est d'après cette considération qu'on a adopté la notation $2\sigma_\mu$, qui d'ailleurs représente le double de la somme des puissances des racines de l'équation aux carrés des différences. Divisant donc de part et d'autre par 2, on aura cette formule générale,

$$\sigma_\mu = mS_{2\mu} - 2\mu S_1 S_{2\mu-1} + 2\mu.\frac{2\mu-1}{2}S_2S_{2\mu-2}$$
$$-2\mu.\frac{2\mu-1}{2}.\frac{2\mu-2}{3}S_3.S_{2\mu-3}\ldots\ldots\pm\frac{P(S_\mu)^2}{2}.$$

Pour avoir le coefficient P de ce terme du milieu, on fera $m=2\mu$ et $n=\mu$ dans le terme général des coefficiens du binome (Ire sect., chap. XII)

$$\frac{m.(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\ldots\ldots[m-(n-1)]}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;4\ldots\ldots\ldots\ldots n},$$

qui deviendra

$$P = 2\mu.\frac{2\mu-1}{2}.\frac{2\mu-2}{3}.\frac{2\mu-3}{4}\ldots\ldots\frac{\mu+1}{\mu};$$

ensorte que

$$\sigma_\mu = mS_{2\mu} - 2\mu S_1 S_{2\mu-1} + 2\mu.\frac{2\mu-1}{2} S_2 S_{2\mu-2}$$
$$- 2\mu.\frac{2\mu-1}{2}.\frac{2\mu-2}{3} S_3 S_{2\mu-3} + \ldots\ldots\ldots$$
$$\pm 2\mu.\frac{2\mu-1}{2}.\frac{2\mu-2}{3}\ldots\ldots\frac{\mu+1}{\mu}.\frac{(S_\mu)^2}{2},$$

le signe $+$ correspondant à μ nombre pair, et le signe $-$ à μ nombre impair, ayant d'ailleurs soin d'observer que le terme qui, pour une valeur de μ, contiendra le produit de deux sommes de même indice, deviendra le dernier terme et devra être divisé par 2. Faisant dans cette formule $\mu = 1$, $= 2$, $= 3$, etc., on aura en sommes des puissances des racines de la proposée, et conséquemment en coefficiens A, B, C, etc., les sommes des puissances première, seconde, troisième, etc. des racines de l'équation aux carrés des différences, c'est-à-dire,

$$(a-b)^2 + (a-c)^2 + \text{etc.} + (b-c)^2 + \text{etc.} = \sigma_1,$$
$$(a-b)^4 + (a-c)^4 + \text{etc.} + (b-c)^4 + \text{etc.} = \sigma_2,$$
$$(a-b)^6 + (a-c)^6 + \text{etc.} + (b-c)^6 + \text{etc.} = \sigma_3,$$
etc.

On remarquera que nous avons employé la notation σ_μ pour avoir, par σ_1, σ_2, σ_3, etc., les représentations des premières puissances et des puissances successives des racines en question. Remplaçant dans les formules (M), S_1, S_2, S_3, etc. par σ_1, σ_2, σ_3, etc. qu'on sait maintenant évaluer, et changeant A, B, C, etc. en A′, B′, C′, etc., on obtiendra celles-ci,

$$A' = \sigma_1,$$

$$B' = \frac{A'\sigma_1 - \sigma_2}{2},$$

$$C' = \frac{B'\sigma_1 - A'\sigma_2 + \sigma_3}{3},$$

$$D' = \frac{C'\sigma_1 - B'\sigma_2 + A'\sigma_3 - \sigma_4}{4},$$

etc. etc.

Les relations précédentes sont en nombre $\frac{m(m-1)}{2}$, parce que l'équation aux carrés des différences, est du degré $\frac{m(m-1)}{2} = \nu$: pour en déduire les coefficiens A', B', C', etc., il faut connaître les sommes σ_1, $\sigma_2 \ldots . \sigma_\nu$, ce qui exige qu'on connaisse aussi S_1, $S_2 \ldots\ldots S_{2\nu}$, ou qu'on ait traité $m(m-1)$ équations entre ces dernières sommes et les coefficiens de la proposée : cela fait, on aura $\frac{m(m-1)}{2}$ quantités σ_1, $\sigma_2 \ldots\ldots \sigma_\nu$ à évaluer ; et enfin $\frac{m(m-1)}{2}$ coefficiens A', B', C', etc. à calculer, ce qui donne en tout $m(m-1) + \frac{2m(m-1)}{2}$ ou $2m(m-1)$ formules à traiter.

Soit, par exemple, l'équation déjà considérée (6), savoir,

$$x^3 - 2x - 5 = 0:$$

l'équation aux carrés des différences sera de même degré et de la forme

$$y^3 - A'y^2 + B'y - C' = 0.$$

On a pour la proposée,

$$A = 0, \quad B = -2, \quad C = 5,$$

d'où résultent

$$S_1 = 0,\quad S_2 = 4,\quad S_3 = 15,\quad S_4 = 8,\quad S_5 = 50,\quad S_6 = 91\,;$$

donc

$$\sigma_1 = 12,\quad \sigma_2 = 72,\quad \sigma_3 = -1497\,;$$

et de là,

$$A' = 12,\quad B' = 36,\quad C' = -643,$$

ensorte que l'équation cherchée sera

$$y^3 - 12y^2 + 36y + 643 = 0.$$

34. Nous donnerons pour les second, troisième et quatrième degrés, les coefficiens de l'équation aux carrés des différences, exprimés au moyen de ceux des proposées.

Pour l'équation

$$x^2 - Ax + B = 0,$$

l'équation aux carrés des différences, sera du degré $\frac{2.1}{2} = 1$, et conséquemment de la forme

$$y - A' = 0,$$

et on trouvera

$$A' = A^2 - 4B,$$

ensorte que

$$y = (a-b)^2 = A^2 - 4B,$$

a et b étant les deux racines : on en déduit

$$a - b = \sqrt{A^2 - 4B}\,;$$

d'ailleurs,

$$a + b = +A\,;$$

donc

$$a = \frac{A}{2} + \sqrt{\frac{A^2}{4} - B},\quad b = \frac{A}{2} - \sqrt{\frac{A^2}{4} - B},$$

formules connues.

Pour l'équation la plus générale du troisième degré,

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0,$$

celle aux carrés des différences est du même degré, et conséquemment de la forme

$$y^3 - A'y^2 + B'y - C' = 0,$$

et on a

$$A' = 2(A^2 - 3B),$$
$$B' = (A^2 - 3B)^2,$$
$$C' = \frac{4(A^2 - 3B)(B^2 - 3AC) - (9C - AB)^2}{3};$$

donc pour que les racines soient toutes réelles, il faudra que l'équation aux carrés des différences, n'ait que des variations de signes (Ire sect., chap. XXVIII), ou qu'on ait

$$A^2 - 3B > 0,$$
$$4(A^2 - 3B)(B^2 - 3AC) - (9C - AB)^2 > 0:$$

si l'une de ces conditions manque, l'équation aura deux racines imaginaires.

Soit maintenant l'équation générale du quatrième degré

$$x^4 + Bx^2 - Cx + D = 0,$$

débarrassée de son second terme : le degré de l'équation aux carrés des différences, sera $\frac{4 \times 3}{2} = 6$: ainsi cette équation sera de la forme

$$y^6 - A'y^5 + B'y^4 - C'y^3 + D'y^2 - E'y + F' = 0,$$

et l'on trouvera, par la même méthode,

$$A' = -8B,$$
$$B' = 22B^2 + 8D,$$
$$C' = -18B^3 + 16BD + 26C^2,$$
$$D' = 17B^4 + 24B^2D - 7.16D^2 + 3.16BC^2,$$
$$E' = -4B^5 - 2.27C^2B^2 - 8.27C^2D + 3.4^3BD^2 - 2.4^2B^3D,$$
$$F' = 4^4D^3 - 2^3.4^2B^2D^2 + 4^2.3^2C^2BD + 4^2.B^4D - 4C^2B^3 - 3^3C^4;$$

8..

donc si la quantité exprimée par F′ est négative, auquel cas l'équation aux carrés des différences aura (Ire sect.) deux racines réelles, l'une positive, l'autre négative, la proposée aura nécessairement deux racines réelles et deux imaginaires : mais si cette quantité F′ est positive, la proposée aura toutes ses racines réelles ou imaginaires, parce que le nombre des carrés des différences, soit positifs, soit négatifs, dont le produit est F′, devant être pair, tous ces carrés seront positifs, ou le nombre des négatifs, sera pair : cela posé, toutes les racines seront réelles, si tous les coefficiens A′, B′, C′, D′, E′, F′ sont positifs, ou si l'équation aux carrés des différences, n'a que des variations de signes ; donc elles seront toutes imaginaires, si F′ étant positif, un seul ou quelques-uns de ces coefficiens sont négatifs, puisqu'alors il y aura quelques permanences de signes (IIe sect., chap. II).

CHAPITRE VII.

Des fonctions symétriques ou invariables des racines : elles peuvent toujours être exprimées en coefficiens de l'équation.

35. Nous avons déjà vu (IIe sect., chap. V) que les sommes des puissances de même ordre, entières, tant positives que négatives, de toutes les racines d'une équation, peuvent être traduites d'une manière rationnelle en coefficiens de cette équation. Ces sommes de racines sont des fonctions symétriques et invariables, c'est-à-dire, des fonctions qui ne changent pas en faisant entre ces racines tels échanges que l'on voudra : telles sont les sommes des produits différens 2 à 2, 3 à 3, 4 à 4, etc. qu'on peut faire avec les racines d'une équation.

Qu'on prenne quatre lettres a, b, c, d, et qu'on en fasse tous les arrangemens possibles 2 à 2, lesquels sont au nombre de 24, puis qu'on donne à la première lettre à gauche, l'exposant p, et à la seconde l'exposant q, et on aura une fonction invariable ou symétrique de ces quatre lettres.

Qu'on arrange ces quatre lettres 3 à 3, ce qui donnera 24 arrangemens, puis qu'on donne l'exposant p à la première lettre à gauche de chaque arrangement, l'exposant q à la lettre du milieu, et l'exposant r à la dernière., et on aura une fonction symétrique de 24 termes entre les trois racines affectées chacune d'un exposant.

Toutes ces fonctions et celles qu'on formerait de la même manière, resteront invariables par toutes les permutations

qu'on pourra faire entre les lettres, ainsi qu'entre les exposans de ces lettres.

36. Le nombre des lettres étant m, et celui des exposans étant n, le nombre des termes qui composent la fonction symétrique, sera

$$m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1):$$

en effet, le nombre des lettres étant m, on fera tous les produits différens de m lettres n à n, dont le nombre sera

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots3\times2\times1};$$

mais les exposans en nombre n, devant être distribnés suivant tous les arrangemens qu'ils peuvent donner entre les n lettres de chaque produit, chacun d'eux donnera

$$n(n-1)(n-2)\ldots.3\times2\times1 \text{ termes}:$$

multipliant ces deux dernières formules l'une par l'autre, on aura le produit ci-dessus.

La fonction invariable formée du produit des quatre lettres a, b, c, d sous les exposans p, q, r, s, aurait 24 termes, puisque, dans ce cas, $m=n=4$.

Soit encore la fonction symétrique dont les termes sont tous de la forme $a^4b^3c^2d$, fonction que nous désignerons, pour abréger, de cette manière, $T.a^4b^3c^2d$: si les lettres sont au nombre de six, on aura $m=6$, $n=4$, et pour le nombre des termes, $6.5.4.3=360$.

Si le nombre des lettres étant 7, on a pour terme général de la fonction, $T.a^3b^2c^2def$, comme l'exposant 1 est répété trois fois, et l'exposant 2 deux fois, on divisera le produit 7.6.5.4.3.2 par 3.2.1.2.1, ce qui donnera 420 termes de la forme supposée. La raison de cette division est trop facile à trouver, pour que nous nous y arrêtions.

37. **Nous rappellerons d'abord les formules obtenues (ch. V), et que nous écrirons ainsi :**

$$\left.\begin{array}{l} Sa = A \\ Sa^2 = A.Sa - 2B \\ Sa^3 = A.Sa^2 - B.Sa + 3C \\ Sa^4 = A.Sa^3 - B.Sa^2 + C.Sa - 4D \\ Sa^5 = A.Sa^4 - B.Sa^3 + C.Sa^2 - D.Sa + 5E \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\}\ldots.(A),$$

dans lesquelles les coefficiens A, B, C, etc. sont ceux de l'équation

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3}\ldots\ldots + V = 0,$$

et Sa, Sa^2, etc. désignent les sommes des premières, secondes, etc. puissances des racines.

Le produit de Sa^m par chacun des coefficiens A, B, C, etc., est la somme de deux fonctions symétriques, ensorte que désignant toujours par S la somme des puissances des racines, et par T le terme général de la fonction symétrique, ou le terme de la forme commune, on aura

$$\left.\begin{array}{lll} ASa^m = Sa^{m+1} & + Ta^mb \\ BSa^m = Ta^{m+1}b & + Ta^mbc \\ CSa^m = Ta^{m+1}bc & + Ta^mbcd \\ DSa^m = Ta^{m+1}bcd & + Ta^mbcde \\ \quad \text{etc.} \end{array}\right\}\ldots..(B).$$

En effet, si l'on multiplie

$$Sa^m = a^m + b^m + c^m + \text{etc.},$$

par

$$B = ab + ac + ad + \text{etc.} + bc,$$

on ne trouvera que deux sortes de termes, savoir, des termes d'une lettre élevée à la puissance $m+1$, multipliée par une autre lettre, comme $a^{m+1}b$, ou $a^{m+1}c$, etc., et les termes d'une lettre à la puissance m par le produit de deux autres

lettres, comme $a^m bc$, $a^m de$, etc. On démontrera de la même manière les autres formules.

On a aussi

$$\left.\begin{array}{l} Sa^m = ASa^{m-1} - Ta^{m-1}b \\ Sa^m = ASa^{m-1} - BSa^{m-2} + Ta^{m-2}bc \\ Sa^m = ASa^{m-1} - BSa^{m-2} + CSa^{m-3} - Ta^{m-3}bcd \\ Sa^m = ASa^{m-1} - BSa^{m-2} + CSa^{m-3} - DSa^{m-4} + Ta^{m-4}bcde \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\} (C).$$

En effet, en changeant $m+1$ en m, et conséquemment m en $m-1$ dans la première des formules (B), on a

$$Sa^m = ASa^{m-1} - Ta^{m-1}b,$$

et dans la seconde, $m+1$ en $m-1$, d'où m en $m-2$;

$$Ta^{m-1}b = BTa^{m-2} - Ta^{m-2}bc;$$

donc

$$Sa^m = ASa^{m-1} - BSa^{m-2} + Ta^{m-2}bc,$$

et ainsi des autres.

38. On saura traduire toute fonction symétrique des racines d'une équation en coefficiens, si on sait l'évaluer en sommes des mêmes puissances, soit positives, soit négatives des racines, puisque, par les formules (A), on sait exprimer celles-ci en coefficiens.

Or, on trouve aisément que

$$Sa^m Sb^n = Sa^{m+n} + Ta^m b^n$$

$$Sa^p Ta^m b^n = Ta^{m+p} b^n + Ta^{n+p} b^m + Ta^m b^n c^p,$$

$$Sa^q Ta^m b^n c^p = Ta^{m+q} b^n c^p + Ta^m b^{n+q} c^p + Ta^m b^n c^{p+q} + Ta^m b^n c^p d^q,$$

$$Sa^r Ta^m b^n c^p d^q = Ta^{m+r} b^n c^p d^q + Ta^m b^{n+r} c^p d^q + Ta^m b^n c^{p+r} d^q + Ta^m b^n c^p d^{r+r} + Ta^m b^n c^p d^q e^r,$$

et ainsi de suite. Au moyen de ces formules, on obtient finale-

ment les fonctions symétriques $Ta^m b^n$, $Ta^m b^n c^p$, $Ta^m b^n c^p d^q$, etc. au moyen des sommes des puissances $m+n$, $m+n+p$, $m+n+p+q$, etc. des racines.

Le produit de trois sommes des racines, telles que Sa^m, Sa^n, Sa^p, comprend,

1°. La fonction ternaire

$$Ta^m b^n c^p;$$

2°. les trois fonctions binaires

$$Ta^{m+n} b^p,$$
$$Ta^{m+p} b^n,$$
$$Ta^{n+p} b^m,$$

et 3° la somme Sa^{m+n+p}.

Le produit des quatre sommes de puissances Sa^m, Sa^n, Sa^p, Sa^q comprend les fonctions symétriques qui suivent:

1°. La fonction quaternaire

$$Ta^m b^n c^p d^q;$$

2°. Les six fonctions ternaires

$$Ta^{m+n} b^p c^q,$$
$$Ta^{m+p} b^n c^q,$$
$$Ta^{m+q} b^n c^p,$$
$$Ta^{n+p} b^m c^q,$$
$$Ta^{n+q} b^m c^p,$$
$$Ta^{p+q} b^m c^n;$$

3°. les trois fonctions binaires

$$Ta^{m+n} b^{p+q},$$
$$Ta^{m+p} b^{n+q},$$
$$Ta^{m+q} b^{n+p};$$

4°. quatre autres fonctions binaires,

$$Ta^{m+n+p}b^{q},$$
$$Ta^{m+n+q}b^{p},$$
$$Ta^{m+p+q}b^{n},$$
$$Ta^{n+p+q}b^{m};$$

5°. la somme des puissances $Sa^{m+n+p+q}$.

La loi de ces formules est trop facile à saisir, pour qu'il soit nécessaire de la détailler.

Qu'on se propose, par exemple, de traduire en coefficiens de l'équation

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = o,$$

cette fonction

$$(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2:$$

on la trouve égale à

$$Ta^4b^2 - 2Ta^4bc + 2Ta^3b^2c - 2Ta^3b^3 - 6a^2b^2c^2:$$

or,

$$Ta^4b^2 = Sa^4Sa^2 - Sa^6 = -2A^3C + A^2B^2 + 4ABC - 2B^3 - 3C^2.$$

Comme tous les termes de la fonction Sa^4bc sont divisibles par $abc = C$, cette fonction sera CSa^3, et on aura

$$Ta^4bc = A^3C - 3ABC + 3C^2.$$

Ta^3b^2c se réduit à

$$CTa^2b = C(AB - 3C),$$

ensorte que

$$Ta^3b^2c = ABC - 3C^2,$$
$$Ta^3b^3 = (Sa^3)^2 - Sa^6 = B^3 - 3ABC + 3C^2;$$

enfin,

$$a^2b^2c^2 = C^2,$$

donc

$$(a-b)^2(a-c)^2(b-c)^2 = -4A^3C + A^2B^2 + 18ABC - 4B^3 - 27C^2.$$

Ce produit égalé à zéro, est la condition sous laquelle une équation du troisième degré acquiert deux racines égales, puisqu'elle exprime que l'équation aux carrés des différences, perd le terme tout connu C′ (34), ce qui n'a lieu que dans le cas de racines égales dans la proposée.

Proposons-nous encore d'évaluer les coefficiens d'une équation qui aurait pour racines toutes les sommes qu'on peut former avec les racines d'une équation donnée, combinées deux à deux par voie d'addition.

Soit l'équation du troisième degré

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0,$$

dont nous désignerons les racines par a, b, c; ensorte que celles de l'équation cherchée, seront $a+b$, $a+c$, $b+c$. Si z est l'inconnue de la nouvelle équation, elle sera le produit des facteurs

$$[z-(a+b)][z-(a+c)][z-(b+c)]=0.$$

Comme les racines a, b, c entrent de la même manière et le même nombre de fois dans les facteurs, les coefficiens du produit développé, resteront les mêmes, en faisant entre les racines tous les échanges possibles; ces coefficiens seront donc des fonctions invariables de a, b, c, et ils pourront être traduits en A, B, C. En effectuant les produits, on trouvera

$$z^3 - 2(a+b+c)z^2 + (a^2+b^2+c^2+3ab+3ac+3bc)z$$
$$-(a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2) = 0:$$

or,

$$a+b+c = A,$$
$$a^2+b^2+c^2+3(ab+ac+bc) = A^2+B,$$
$$a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+bc^2 = Sa^2Sa - Sa^3,$$
$$Sa^2 = A^2 - 2B,$$
$$Sa^3 = A^3 - 3AB + 3C;$$

donc l'équation cherchée devient

$$z^3 - 2Az^2 + (A^2 + B)z - AB + 3C = 0.$$

39. On voit par ces exemples, que *pour trouver l'équation d'où dépend une fonction assignée des racines d'une équation donnée, il faut faire dans cette fonction connue de forme, toutes les permutations possibles entre les racines* a, b, c, *etc., et désignant par* α, β, γ, *etc. les combinaisons qui en résultent, on égalera à zéro le produit des facteurs* $(z - \alpha)(z - \beta)(z - \gamma)$, *etc.: les coefficiens des puissances de* z, *étant des fonctions symétriques des quantités* α, β, γ, *etc. qui sont elles-mêmes des fonctions symétriques des racines* a, b, c, *etc., pourront être énoncées rationnellement au moyen des coefficiens de l'équation donnée.*

CHAPITRE VIII.

Du degré de l'équation finale donnée par l'élimination de toutes les inconnues, moins une, entre un nombre quelconque d'équations et le même nombre d'inconnues.

40. Dans un écrit publié à part sur l'élimination, et dont une partie trouvera place dans une nouvelle édition de la première section de l'Algèbre, nous avons démontré, d'après M. *Bret*, mais en simplifiant son calcul, que le degré de l'équation finale résultant de l'élimination d'une inconnue entre deux équations complètes à deux inconnues, l'une du degré m et l'autre du degré n, était le produit mn des degrés des deux équations : nous avons aussi donné de cette importante proposition, une autre démonstration fort simple, due à M. *Poisson* : ici nous déduirons ce théorème généralisé par le même géomètre, de cette propriété des fonctions invariables des racines d'une équation, d'être réductibles en coefficiens de cette équation : enfin, nous terminerons ce chapitre par un beau mémoire de *Lagrange* sur l'élimination, mémoire trop peu connu, et que nous n'avons vu cité dans aucun Traité d'Algèbre.

41. Soient d'abord

$$x^m + Px^{m-1} + Qx^{m-2} + \ldots\ldots + Tx + V = 0 \ldots\ldots (M),$$
$$x^n + P'x^{n-1} + Q'x^{n-2} + \ldots\ldots + T'x + V' = 0 \ldots\ldots (N),$$

les deux équations proposées dans lesquelles les coefficiens P, Q.....T, V; P', Q'..... T' et V' sont des fonctions de y seulement, dont les compositions ont été assignées (Ire sect.). Concevons qu'on ait résolu l'équation (M) par rapport à x,

et qu'on ait trouvé les racines $x=\alpha$, $x=\beta$, $x=\gamma$, etc., α, β, γ, etc. étant des fonctions de l'autre inconnue y; il est clair qu'en faisant $x=\alpha$ dans (M), cette équation sera satisfaite, quelque valeur qu'on suppose à y; mais les mêmes racines doivent convenir en même temps à l'équation (N), condition qui limite les nombres des valeurs de y; on doit donc avoir

$$\alpha^n + P'\alpha^{n-1} + Q'\alpha^{n-2} + \ldots\ldots + T'\alpha + V' = 0 \ldots\ldots (1),$$

équation qui ne renferme plus que y, et dont les racines combinées avec $x=\alpha$, satisfont à la fois aux équations (M) et (N); donc l'équation finale en y doit avoir parmi ses racines toutes celles de l'équation (1). On prouverait de la même manière que les racines des équations

$$\beta^n + P'\beta^{n-1} + Q'\beta^{n-2} + \ldots\ldots + T'\beta + V' = 0 \ldots\ldots (2),$$
$$\gamma^n + P'\gamma^{n-1} + Q'\gamma^{n-2} + \ldots\ldots + T'\gamma + V' = 0 \ldots\ldots (3),$$
etc.

combinées avec les valeurs $x=\beta$, $x=\gamma$, etc., doivent satisfaire aux équations (M) et (N), et que les valeurs de y, déduites de (2) et (3), sont des racines de l'équation finale : en obtiendrait donc celle-ci, si les fonctions α, β, γ, etc. de y étaient connues, en multipliant entr'elles les équations (1), (2), (3), etc. qui doivent concourir de la même manière à la formation de l'équation finale, et égalant le produit à zéro; mais, dans ce produit, toutes les racines α, β, γ, etc. seront combinées de la même manière; elles pourront donc être évaluées en coefficiens P, Q......T, V de l'équation proposée, d'après l'analyse exposée précédemment, et le résultat sera l'équation finale en y. Examinons maintenant à quel degré, au plus, peut s'élever cette équation Dans le produit des équations (1), (2), (3), etc., le résultat de la multiplication des termes de la première ligne verticale, sera

$$(\alpha\beta\gamma \text{ etc.})^n = V^n;$$

mais le plus haut exposant de y dans V, ne peut surpasser m, ensorte que V^n ne peut renfermer y avec un exposant plus élevé que mn : passons au produit des seconds termes, savoir :

$$P'^m\,(\alpha\mathcal{C}\gamma \text{ etc.})^{n-1} = P'^m V^{n-1}:$$

P′ étant de la forme $a + by$, P'^m contient au plus y^m; d'une autre part, V^{n-1} ne peut être que la dimension $mn - m$ en y, ensorte que $P'^m V^{n-1}$ renfermera au plus y^{mn}. On prouverait de la même manière que, dans le produit des troisièmes termes, ou dans

$$Q'^m\,(\alpha\beta\gamma \text{ etc.})^{n-2} = Q'^m V^{n-2},$$

l'inconnue y ne peut être affectée d'un exposant plus élevé que mn, et ainsi des produits des autres termes verticalement placés dans les équations (1), (2), (3), etc. : il reste donc maintenant à demontrer qu'en prenant un terme quelconque dans chacune de ces équations, le produit ne peut contenir y avec un exposant plus élevé que mn. Soient r l'exposant de α dans le terme arbitraire pris dans l'équation (1), et k le coefficient ; r' l'exposant de $\mathcal{C}$ dans un des termes de (2), et k' le coefficient ; r'' celui de γ dans un terme quelconque de (3), et k'' son coefficient, et ainsi de suite ; ensorte qu'on ait le produit $k\alpha^r \times k'\mathcal{C}^{r'} \times k''\gamma^{r''}$, etc. On observera d'abord que chacune des sommes faites de r et du plus haut exposant de y dans k, de r' et du plus haut exposant de y dans k', de r'' et du plus haut exposant de y dans k'', et ainsi de suite, ne peut excéder n ; d'où il est aisé de conclure, en observant d'ailleurs que les équations (1), (2), (3), etc. sont en nombre m, que l'exposant de y dans le produit des coefficiens k, k', k'', etc., plus le nombre $r + r' + r''$, etc., forment une somme qui ne peut surpasser mn. La proposition sera donc établie, si l'on démontre que la somme des termes de la forme $\alpha^r\mathcal{C}^{r'}\gamma^{r''}$ etc. qui, dans le produit des équations (1), (2) et (3), ont le même coefficient $k.k'.k''$.etc., ne contient y qu'à la dimension $r + r' + r''$, etc. En faisant usage du théorème sur les fonctions invariables, démontré dans le chapitre précédent, la question se réduira, en dernière

analyse, à prouver que $S\alpha^{r+r'+r''}$, etc. qui entre dans l'expression de $T\,\alpha^{r}\beta^{r'}\gamma^{r''}$, etc. (38), est de dimension $r+r'+r''+$ etc. en y, ce dont on se convaincra en observant que la somme des puissances $r+r'+r''$, etc. des racines d'une équation, est donnée au moyen de $r+r'+r''+$ etc. coefficiens de cette équation (chap. V), et qu'ainsi, cette somme comprendra un coefficient dans lequel l'inconnue y sera, au plus, élevée à la puissance $r+r'+r''+$ etc.

Appliquons cette propriété des fonctions invariables des racines d'une équation, d'être traductibles d'une manière rationnelle en coefficiens, à la recherche de l'équation finale en y, correspondante au système d'équations

$$x^2+axy+by^2+cx+dy+e=0\ldots\ldots(1),$$
$$x^2+a'xy+b'y^2+c'x+d'y+e'=0\ldots\ldots(2),$$

que nous réduirons à la forme

$$x^2+px+q=0,$$
$$x^2+p'x+q'=0,$$

en posant

$$p=ay+c,\quad q=by^2+dy+e,$$
$$p'=a'y+c',\quad q'=b'y^2+d'y+e':$$

désignons par α et β les deux valeurs de x déduites de la première, et substituons-les dans la seconde qui se changera dans les deux suivantes,

$$(3)\ldots\alpha^2+p'\alpha+q'=0,\quad \beta^2+p'\beta+q'=0\ldots(4),$$

qui doivent concourir également à la formation de l'équation finale, laquelle doit les comprendre toutes deux et exister en même temps qu'elles.

Pour remplir ces conditions, on multipliera (3) par (4), et on trouvera pour produit,

$$\alpha^2\beta^2+p'(\alpha\beta^2+\alpha^2\beta)+p'^2\alpha\beta+q'(\alpha^2+\beta^2)$$
$$+p'q'(\alpha+\beta)+q'^2=0\ldots\ldots(5);$$

mais

$$\alpha^2\beta^2 = q^2,$$
$$\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = \alpha\beta\,(\alpha + \beta) = -pq,$$
$$(\alpha^2 + \beta^2) = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = p^2 - 2q;$$

donc

$$q^2 - pp'q + p'^2q + p^2q' - 2qq' - pp'q' + q'^2 = 0.$$

Or

$$q^2 - 2qq' + q'^2 = (q - q')^2,$$
$$-pp'q + p'^2q + p^2q' - pp'q' = (pq' - p'q)\,(p - p'),$$

donc on a pour équation finale en y,

$$(q - q')^2 + (pq' - p'q)\,(p - p') = 0.$$

42. M. *Poisson* a étendu la démonstration précédente à un nombre quelconque d'équations entre pareil nombre d'inconnues : nous la donnerons, à quelques développemens près, telle qu'on la trouve dans le onzième cahier du *Journal de l'École Polytechnique*, où, pour simplifier, ce géomètre ne considère que quatre équations, attendu qu'il est facile d'appliquer au cas le plus général, les raisonnemens faits sur ce cas particulier.

Représentons donc par (a), (b), (c) et (m) quatre équations, la première du degré a, la seconde du degré b, la troisième du degré c, et enfin la quatrième du degré m, entre les quatre inconnues x, y, z et u, et supposons que les équations sont complètes, c'est-à-dire, que (a) représente l'équation la plus générale du degré a, et ainsi des autres. Si l'on élimine successivement entre les trois premières, z et y, z et x, y et x, on obtiendra trois équations du même degré, la première entre x et u, la seconde entre y et u, et la troisième entre z et u.

En effet, chacune de ces équations étant complète, et par conséquent de même degré, soit en x, soit en y, en z ou en u, si, après avoir éliminé z et y entre les trois premières, et obtenu une équation du degré n entre x et u, on élimine

soit z et x, y et x, qui entrent de la même manière dans les mêmes équations, on arrivera nécessairement à des équations du degré n entre y et u, z et u. Soient $a_1, a_2 \ldots . a_n$ les valeurs de x en u; $b_1, b_2 \ldots . . b_n$ celles de y en u; $c_1, c_2 \ldots . c_n$ celles de z en u; si l'on prenait au hasard une valeur de x, une de y et une de z, ces trois valeurs ne satisferaient pas ensemble aux équations (a), (b) et (c); c'est-à-dire que les résultats ne deviendraient pas nuls d'eux-mêmes. En effet, si l'on élimine d'abord z entre (a) et (b), on aura une équation finale qui peut être représentée par

$$(x, y, u) = 0 \ldots \ldots (1).$$

Si entre (b) et (c), on élimine aussi z, il viendra pour équation finale

$$[x, y, u] = 0 \ldots \ldots (2);$$

entre ces deux équations éliminant y, on obtient

$$[x, u] = 0 \ldots \ldots \ldots . (3),$$

ensorte que les valeurs de x, y et z en u qui satisfont ensemble aux équations (a), (b) et (c), sont données par (3), (2) ou (1), et l'une des équations (a), (b) ou (c).

Supposons donc que a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2, et, en général, a_p, b_p, c_p soient les valeurs de x, y et z qui satisfont ensemble à ces équations, et concevons que l'on substitue chacun de ces systèmes de valeurs pour x, y, z, dans le premier membre de l'équation (m), le second étant supposé zéro; ce premier membre fournira ainsi un nombre m de fonctions irrationnelles de u, et il résulte de là, 1°. que toute quantité qui, mise à la place de u dans l'nne quelconqne de ces fonctions, la rendra nulle, sera une des valeurs de l'inconnue u; car pour chacune d'elles, combinée avec le système correspondant des valeurs de x, y et z, les quatre équations sont satisfaites; 2°. que réciproquement chacune des valeurs que peut avoir cette inconnue, doit rendre nulle une de ces fonctions. Donc, si l'on égale à zéro le produit de toutes ces fonctions, l'équation qu'on

obtiendra, sera, sans aucun facteur étranger à la question, l'équation finale résultante de l'élimination de x, y et z entre les quatre équations données. C'est donc de cette équation qu'il s'agit de déterminer le degré.

Or le premier membre de l'équation (m), étant de la forme

$$u^m + Au^{m-1} + Bu^{m-2} + \ldots\ldots + K,$$

où A, B, C....K représentent des polynomes en x, y, z, savoir, A le polynome le plus général du premier degré, B le polynome le plus général du second, et ainsi de suite, le premier terme du produit des fonctions en question, sera u^{mn}, et dans tous les autres termes, la somme des exposans de u et des valeurs ci-dessus de x, y, z, ne sera jamais plus grande que mn. De plus, sans effectuer le produit de ces fonctions, on voit qu'il doit être tel, qu'il reste le même lorsqu'on y change a_p en $a_{p'}$, b_p en $b_{p'}$, c_p en $c_{p'}$, et réciproquement, quels que soient les indices p et p'; car si l'on opérait ces changemens dans les fonctions elles-mêmes, on ne ferait autre chose qu'échanger entr'elles deux de ces fonctions. Si donc ce produit doit renfermer un terme tel que $u^s a_p^k b_p^l c_p^r a_{p'}^{k'} b_{p'}^{l'} c_{p'}^{r'}$ etc. (dans lequel s, k, l, r, etc. représentent des exposans entiers positifs, dont la somme est moindre que mn ou égale à ce nombre, et où p, p', p'', etc. sont des indices différens entr'eux), il devra aussi contenir tous les termes que l'on peut déduire de celui-là, en y mettant successivement pour p, p', p'', etc., tous les nombres possibles, depuis 1 jusqu'à n inclusivement, pourvu que l'on ne mette jamais dans un même terme, le même nombre pour deux de ces indices. La somme de tous ces termes, est une certaine fonction de u, que nous désignerons désormais par

$$u^s T . a_p^k b_p^l c_p^r a_{p'}^{k'} b_{p'}^{l'} c_{p'}^{r'},$$

et dont il faut déterminer la forme.

Pour cela, soit l'équation

$$t = x + gy + hz,$$

dans laquelle t est une nouvelle inconnue, et g et h sont des coefficiens arbitraires : en éliminant x, y et z entre cette équation et les équations (a), (b) et (c), on obtiendra une équation du degré n en u et t.

En effet, les équations (a), (b) et (c) ne pouvant devenir identiquement nulles que par un nombre n de systèmes convenables de valeurs de x, y et z, ainsi qu'on l'a dit plus haut, on ne doit pas avoir plus de valeurs de t en u, qu'on ne peut prendre de ces systèmes : partant, l'équation finale entre t et u doit être du degré n, c'est-à-dire, de la forme

$$t^n + Mt^{n-1} + Nt^{n-2} + \ldots\ldots + S = 0,$$

M, N....S étant des fonctions rationnelles et entières de u ; et le plus haut exposant de u étant un dans M, deux dans N, et ainsi de suite. Les n racines de cette équation seront

$$a_1 + gb_1 + hc_1, \quad a_2 + gb_2 + hc_2, \quad a_3 + gb_3 + hc_3, \text{ etc.} \quad \ldots\ldots a_n + gb_n + hc_n,$$

ensorte que $S(a_p + gb_p + hc_p)^i$ qui désigne la somme des puissances i de ces racines, sera, i étant un nombre entier et positif, une fonction rationnelle et entière des coefficiens M, N etc. ; ce sera donc une fonction rationnelle et entière de u ; et il résulte des formules trouvées précédemment, que le plus haut exposant de u, dans cette fonction, sera égal à i. Mais le terme général de la fonction $S(a_p + gb_p + hc_p)^i$, développée suivant les puissances et les produits des quantités g et h, pouvant être représenté par $Lg^l h^r T a_p^k b_p^l c_p^r$, k, l et r étant des exposans entiers et positifs dont la somme $= i$, et L une certaine fonction de ces nombres, on peut dire que $Ta_p^k b_p^l c_p^r$ est une fonction rationnelle et entière de u, dans laquelle le plus haut exposant de cette inconnue, est $i = k + l + r$: donc aussi $Ta_{p'}^{k'} b_{p'}^{l'} c_{p'}^{r'}$ est une pareille fonction de u, dans laquelle le plus haut exposant de cette inconnue, est $i' = k' + l' + r'$; or p et p' représentant tous les nombres depuis 1 jusqu'à n, ne

pourront être qu'égaux ou inégaux; ensorte qu'on aura la relation

$$Ta_p^k b_p^l c_p^r \times Ta_{p'}^{k'} b_{p'}^{l'} c_{p'}^{r'} = Ta_p^{k+k'} b_p^{l+l'} c_p^{r+r'} + Ta_p^k b_p^l c_p^r a_{p'}^{k'} b_{p'}^{l'} c_{p'}^{r'};$$

de laquelle on conclut que si cette proposition est démontrée pour $Ta_p^k b_p^l c_p^r$, elle le sera aussi pour $Ta_p^k b_p^l c_p^r a_{p'}^{k'} b_{p'}^{l'} c_{p'}^{r'}$, d'où il suit que la fonction

$$u^s Ta_p^k b_p^l c_p^r a_{p'}^{k'} b_{p'}^{l'} c_{p'}^{r'}$$

est une fonction rationnelle et entière de u, dans laquelle le plus haut exposant de u est égal à la somme

$$s + k + l + r + k' + l' + r', \text{ etc.},$$

et ainsi de suite.

Cela posé, on a vu que le premier membre de l'équation finale en u, le second étant zéro, a pour premier terme u^{mn}, et que le reste de ce premier membre ne peut être autre chose que la somme d'un nombre fini de fonctions pareilles à la précédente, multipliées chacune par un coefficient connu, et dans lesquelles la somme des exposans s, k, l, etc. n'est jamais plus grande que mn : ce premier membre est donc une fonction rationnelle de u, dans laquelle mn est le plus haut exposant de cette inconnue, et par conséquent ce nombre mn marque le degré de l'équation finale.

On prouvera de même, en généralisant les raisonnemens ci-dessus, et les appliquant à un nombre quelconque d'équations complètes, que si n désigne le degré de l'équation finale résultante de toutes les équations moins une, et que m soit le degré de celle-ci, le degré de l'équation finale résultante de toutes les équations, sera égal à mn : d'où il est facile de conclure que ce degré sera égal au produit des exposans des équations données, puisque pour trois équations complètes entre trois inconnues, la première du degré a, la seconde du degré b,

et enfin la troisième du degré m, on a $n = ab$, ainsi qu'il a été démontré précédemment.

Dans tout ce qui précède, on a supposé que les équations entre lesquelles il s'agissait d'éliminer, étaient les plus générales de leur degré; mais lorsque cela n'aura pas lieu, on conçoit que le degré de l'équation finale, pourra être moindre que celui qu'on vient de déterminer, c'est-à-dire, que les coefficiens des plus hautes puissances de l'inconnue dans l'équation finale, pourront se trouver nuls en vertu des valeurs particulières des coefficiens des inconnues dans les équations données. On doit donc dire, en général, que le degré de l'équation finale résultante d'un nombre quelconque d'équations, ne peut jamais être plus grand que le produit des exposans de ces équations.

43. Il importe cependant de faire connaître le procédé pour trouver les solutions d'un certain nombre d'équations entre pareil nombre d'inconnues : c'est ce que nous allons faire sur le système des trois équations

$$A = x^2 + 2yx + y^2 - 2zy - z^2 - 3 = 0,$$
$$B = x^2 - yx + y^2 - zy - z^2 + 1 = 0,$$
$$C = x^2 - zx + 2y^2 - zy - 4z^2 + z + 2 = 0:$$

si on élimine x entre les deux équations $A = 0$, $B = 0$, on trouvera facilement l'équation

$$D = 9y^4 - 12zy^3 - 2z^2y^2 - 3y^2 - 4z^3y + 8zy + 4z^4 - 16z^2 + 16 = 0,$$

avec celle du premier degré en x,

$$E = 3yx - zy + 2z^2 - 4 = 0:$$

ensorte que les deux équations $D = 0$, $E = 0$ peuvent remplacer $A = 0$, $B = 0$. Maintenant multiplions C par $9y^2$, et divisons le produit par E : la division devant s'effectuer, le reste indépendant de x doit être nul de lui-même : ce qui

n'aura lieu que sous la condition

$$F = 18y^4 - 9zy^3 - 38z^2y^2 + 9zy^2 + 18y^2 + 2z^3y - 4zy + 4z^4 - 16z^2 + 16 = 0,$$

qui remplace $9Cy^2 = 0$: éliminant y entre les équations $D = 0$, $F = 0$, on parvient à une équation du seizième degré en z, et celle qui donne les valeurs correspondantes de y, est de la forme

$$Gy + H = 0,$$

où

$$G = -1208z^{11} + 2472z^{10} + 7287z^9 - 9606z^8 - 16483z^7 + 11700z^6 + 16362z^5 - 4752z^4 - 5760z^3,$$

$$H = 820z^{12} - 1950z^{11} - 6326z^{10} + 11346z^9 + 19538z^8 - 23712z^7 - 30208z^6 + 21096z^5 + 23208z^4 - 6912z^3 - 6912z^2;$$

l'équation en z délivrée de ses racines étrangères, est

$$514z^8 - 1190z^7 - 2022z^6 + 30270z^5 + 3545z^4 - 3210z^3 - 2851z^2 + 1080z + 864 = 0;$$

et les valeurs correspondantes de y et de x, seront fournies par

$$Gy + H = 0,$$
$$3yx - zy + 2z^2 - 4 = 0.$$

Ce procédé appliqué aux trois équations générales

$$x^{m1} + \text{etc.} = 0, \quad x^{m2} + \text{etc.} = 0, \quad x^{m3} + \text{etc.} = 0,$$

conduit à celles-ci

$$z^{m1\,m2\,m3} + \text{etc.} = 0, \quad Ay + B = 0, \quad Cx + D = 0,$$

A et B étant des fonctions entières de z, et C et D des fonctions entières de y et z, et ces équations fournissent les seules solutions admissibles. On étendra facilement ce mode

de résolution à un nombre quelconque d'équations de degrés quelconques entre pareil nombre d'inconnues; M. *Bret* en conclut que le nombre des systèmes de valeurs qui satisfont aux équations

$$x^{m_1}+\text{etc.}=0,\quad x^{m_2}+\text{etc.}=0,\quad x^{m_3}+\text{etc.}=0\ldots.$$
$$\ldots.x^{m_n}+\text{etc.}=0,$$

est égal au produit des degrés de toutes les équations, si le théorème a lieu pour $n-1$ équations entre $n-1$ inconnues (15ᵉ cahier du *Journ. de l'École Polyt.*).

Nous reproduirons à cette occasion, une réflexion judicieuse de M. *Gergonne*, rédacteur des *Annales Mathématiques*: l'élimination, de quelque manière qu'on y procède, est une opération à peu près impraticable, dès que les équations sont nombreuses et élevées; il serait donc à desirer qu'on pût déterminer tous les systèmes de valeurs des inconnues, sans être obligé d'y avoir recours: toute la difficulté du problème se réduirait évidemment à savoir déterminer, sans résoudre aucune équation, 1°. les limites extrêmes des valeurs de chaque inconnue; 2°. une limite au-dessous de laquelle ne pût tomber la différence entre deux valeurs de chacune de ces mêmes inconnues: ce serait, en effet, un sujet tout à fait digne de l'attention des géomètres.

44. La méthode suivante, dit l'illustre *Lagrange*, a l'avantage de réduire l'élimination des inconnues à des formules générales et très-simples dont les analystes pourront faire usage au besoin.

Soient

$$1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+\text{etc.}=0\ldots\ldots(A),$$
$$1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}+\frac{d}{x^4}+\text{etc.}=0\ldots\ldots(B),$$

les deux équations proposées dont la première soit du degré m, et la seconde du degré n. Il est évident que, quelles que

soient les équations données, on peut toujours les ramener à la forme des deux précédentes ; car pour cela, il n'y aura qu'à diviser l'une par le terme tout connu, et l'autre par la plus haute puissance de x.

Soient $1-\alpha x$, $1-\beta x$, $1-\gamma x$, $1-\delta x$ les facteurs de l'équation (A), ensorte que $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, etc. soient les racines de cette équation ; on aura l'identité

$$l(1+\mathrm{A}x+\mathrm{B}x^2+\mathrm{C}x^3+\mathrm{D}x^4+\text{etc.})$$
$$=l(1-\alpha x)+l(1-\beta x)+l(1-\gamma x)+l(1-\delta x)+\text{etc.}$$

Or, à cause de

$$l(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\text{etc.}$$

série donnée (Ire sect.), on aura, en remplaçant z d'abord par $Ax+Bx^2+$ etc., puis successivement par $-\alpha x$, $-\beta x$, $-\gamma x$, etc.

$$x(\mathrm{A}+\mathrm{B}x+\mathrm{C}x^2+\mathrm{D}x^3+\text{etc.})$$
$$-\frac{x^2}{2}(\mathrm{A}+\mathrm{B}x+\mathrm{C}x^2+\mathrm{D}x^4+\text{etc.})^2$$
$$+\frac{x^3}{3}(\mathrm{A}+\mathrm{B}x+\mathrm{C}x^2+\mathrm{D}x^4+\text{etc.})^3$$
$$+\text{etc.}$$
$$=-x(\alpha+\beta+\gamma+\delta+\text{etc.})$$
$$-\frac{x^2}{2}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2+\text{etc.})$$
$$-\frac{x^3}{3}(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3+\text{etc.})\ldots\ldots(\mathrm{C})$$
$$+\text{etc.}$$

Or on sait que le carré, le cube, etc. de tout polynome, tel que $\mathrm{A}+\mathrm{B}x+\mathrm{C}x^2+$ etc., est aussi un polynome de la même forme, mais dont le nombre des termes est double,

triple, etc.; de sorte qu'on peut supposer

$$(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.})^2 = A' + B'x + C'x^2 + D'x^3 + \text{etc.}$$

$$(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \text{etc.})^3 = A'' + B''x + C''x^2 + D''x^3 + \text{etc.},$$

et ainsi de suite; les coefficiens A', B', C', etc., A'', B'', C'', etc. étant aisés à trouver par la formation actuelle de ces puissances, ou par la formule de la puissance de l'infinitinome (Ire sect.).

Donc si on substitue ces valeurs dans (C), et que, pour abréger, on pose

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.} = -P,$$
$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \text{etc.} = -2Q,$$
$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \text{etc.} = -3R,$$
$$\text{etc.},$$

on aura, en ordonnant les termes par rapport aux dimensions de x,

$$Ax + \left(B - \frac{A'}{2}\right)x^2 + \left(C - \frac{B'}{2} + \frac{A''}{3}\right)x^3$$
$$+ \left(D - \frac{C'}{2} + \frac{B''}{3} - \frac{A'''}{4}\right)x^4 + \text{etc.}$$
$$= Px + Qx^2 + Rx^3 + Sx^4 + \text{etc.} \ldots\ldots \text{(D)};$$

et comme cette équation (D) doit être identique, on a

$$P = A,$$
$$Q = B - \frac{A'}{2},$$
$$R = C - \frac{B'}{2} + \frac{A''}{3},$$
$$S = D - \frac{C'}{2} + \frac{B''}{3} - \frac{A'''}{4}.$$
$$\text{etc.}$$

Cela posé, on substituera successivement dans (B) toutes les racines x de (A); savoir, $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{\delta}$, etc., dont le nombre est m, ce qui donnera les m équations

$$\left.\begin{array}{l} 1+a\alpha+b\alpha^2+c\alpha^3+d\alpha^4+\text{etc.}=0 \\ 1+a\beta+b\beta^2+c\beta^3+d\beta^4+\text{etc.}=0 \\ 1+a\gamma+b\gamma^2+c\gamma^3+d\gamma^4+\text{etc.}=0 \end{array}\right\} \ldots\ldots (E);$$

et comme les équations (A) et (B) doivent avoir lieu en même temps, il faut nécessairement qu'une quelconque des m équations (E) ait lieu, puisque chacune d'elles exprime que (A) et (B) ont une racine x commune; et comme l'une des équations (E) ne doit pas avoir lieu plutôt qu'une autre, il faudra que l'on ait une équation équivalente à toutes les équations (E), et qui ne puisse être vraie qu'en supposant que l'une quelconque de ces dernières le soit : d'où il résulte que l'équation dont il s'agit, ne peut être que le produit de toutes les équations (E), laquelle sera, en même temps, le résultat de l'élimination de x entre (A) et (B). Si donc on représente cette équation par $\Pi=0$, on aura

$$\begin{array}{l} \Pi=(1+a\alpha+b\alpha^2+c\alpha^3+d\alpha^4+\text{etc.}) \\ \quad\times(1+a\beta+b\beta^2+c\beta^3+d\beta^4+\text{etc.}) \\ \quad\times(1+a\gamma+b\gamma^2+c\gamma^3+d\gamma^4+\text{etc.}) \\ \quad\times(1+a\delta+b\delta^2+c\delta^3+d\delta^4+\text{etc.}) \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}$$

le nombre des facteurs étant m. La difficulté se réduit donc à former Π, sans connaître les racines α, β, γ, etc.

Prenons les logarithmes des deux membres, et nous aurons

$$\begin{array}{l} l\Pi=l(1+a\alpha+b\alpha^2+\text{etc.}) \\ \quad+l(1+a\beta+a\beta^2+\text{etc.}) \\ \quad+l(1+a\gamma+b\gamma^2+\text{etc.}) \\ \quad+l(1+a\delta+b\delta^2+\text{etc.}): \end{array}$$

mais, d'après ce qu'on a vu plus haut,

$$l(1 + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + d\alpha^4 + \text{etc.})$$
$$= \alpha(a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + \text{etc.})$$
$$-\frac{\alpha^2}{2}(a + b\alpha + a\alpha^2 + d\alpha^3 + \text{etc.})^2$$
$$+\frac{\alpha^3}{3}(a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + \text{etc.})^3$$
$$\text{etc.}$$

Donc si on suppose que a', b', c', etc., a'', b'', c'', etc. soient des quantités formées de a, b, c, etc., comme les quantités A', B', C', etc., A'', B'', C'', etc. le sont de A, B, C, etc., on aura

$$l(1 + a\alpha + b\alpha^2 + \text{etc.}) = \alpha(a + b\alpha + c\alpha^2 + d\alpha^3 + \text{etc.})$$
$$-\frac{\alpha^2}{2}(a' + b'\alpha + c'\alpha^2 + d'\alpha^3 + \text{etc.})$$
$$+\frac{\alpha^3}{2}(a'' + b''\alpha + c''\alpha^2 + d''\alpha^3 + \text{etc.})$$
$$-\text{etc.};$$

et en faisant de même, pour abréger,

$$p = a,$$
$$q = b - \frac{a'}{2},$$
$$r = c - \frac{b'}{2} + \frac{a''}{3};$$
$$s = d - \frac{c'}{2} + \frac{b''}{3} - \frac{a'''}{4},$$
$$\text{etc.},$$

on aura

$$l(1 + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + \text{etc.}) = p\alpha + q\alpha^2 + r\alpha^3 + s\alpha^4 + \text{etc.}$$

On trouvera de la même manière,

$$l(1 + a\beta + b\beta^2 + c\beta^3 + \text{etc.}) = p\beta + q\beta^2 + r\beta^3 + s\beta^4 + \text{etc.}$$
$$l(1 + a\gamma + b\gamma^2 + c\gamma^3 + \text{etc.}) = p\gamma + q\gamma^2 + r\gamma^3 + s\gamma^4 + \text{etc.}$$

et ainsi des autres. Donc, en ajoutant ensemble toutes les identités, et remplaçant les sommes $\alpha + \mathit{6} + \gamma + \text{etc.}$, $\alpha^2 + \mathit{6}^2 + \gamma^2 + \text{etc.}$, $\alpha^3 + \mathit{6}^3 + \gamma^3$, etc. par $-\mathrm{P}$, $-2\mathrm{Q}$, $-3\mathrm{R}$, etc. qui les représentent, on trouvera

$$l\Pi = -p\mathrm{P} - 2q\mathrm{Q} - 3r\mathrm{R} - \text{etc.}$$

Soit encore, pour abréger,

$$\varphi = p\mathrm{P} + 2q\mathrm{Q} + 3r\mathrm{R} + \text{etc.} :$$

on aura

$$l\Pi = \varphi, \quad \text{d'où} \quad \Pi = e^{-\varphi},$$

e étant la base des logarithmes *néperiens ;* ensorte que si l'on résout en série la quantité exponentielle $e^{-\varphi}$ (*), il viendra enfin

$$\Pi = 1 - \varphi + \frac{\varphi^2}{1.2} - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \frac{\varphi^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

Ainsi le problème proposé se trouve résolu.

Comme la quantité Π est le produit des m facteurs

$$1 + a\alpha + b\alpha^2 + c\alpha^3 + \text{etc.}$$
$$1 + a\mathit{6} + b\mathit{6}^2 + c\mathit{6}^3 + \text{etc.}$$
$$1 + a\gamma + b\gamma^2 + c\gamma^3 + \text{etc.},$$

il est visible qu'elle ne peut contenir d'autres produits des quantités a, b, c, etc., que ceux dont les dimensions ne passent pas le nombre m ; d'où il suit, 1°. que l'équation $\Pi = 0$, savoir,

$$1 - \varphi + \frac{\varphi^2}{1.2} - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \text{etc.} = 0 \ldots\ldots (\mathrm{F}),$$

ne doit contenir aucun terme dans lequel les quantités a, b, c, etc. forment ensemble des produits de plus de m dimensions.

Or si on change x en $\frac{1}{x}$ dans les équations (B) et (A),

(*) On trouvera dans la suite de cet ouvrage, les développemens en séries des quantités transcendantes.

elles deviennent celles-ci :

$$1 + ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + \text{etc.} = 0 \ldots\ldots (G),$$

$$1 + \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x^3} + \frac{D}{x^4} + \text{etc.} = 0 \ldots\ldots (H),$$

lesquelles ne diffèrent des équations (A) et (B) qu'en ce que les coefficiens A, B, C, etc. sont changés en a, b, c, etc., et l'exposant m en n, *et vice versâ* : donc si on fait sur ces équations (G) et (H) les mêmes raisonnemens et les mêmes opérations que nous avons faits sur les équations (A) et (B), on parviendra à une équation finale qui sera la même que l'équation (F) ci-dessus, à la seule différence près que a, b, c, etc. seront au lieu de A, B, C, etc., et réciproquement, et, par rapport à cette équation, les quantités A, B, C, etc. ne sauraient former ensemble des produits de plus de n dimensions.

Or en changeant A, B, C, etc. en a, b, c, etc., on ne fait que changer P, Q, R, etc. en p, q, r, etc., *et vice versâ*, comme on le voit par les expressions de ces quantités ; donc comme

$$\varphi = pP + 2qQ + 3rR + \text{etc.},$$

il s'ensuit que l'équation dont il s'agit, sera exactement la même que l'équation (F), d'où on conclut,

2°. Que l'équation

$$1 - \varphi + \frac{\varphi^2}{1.2} - \frac{\varphi^3}{1.2.3} + \text{etc.} = 0,$$

ne doit pas non plus contenir aucun terme où les quantités A, B, C, etc. se trouvent formant ensemble des produits de plus de n dimensions.

Voici donc à quoi se réduit cette méthode d'élimination. Étant proposées les deux équations

$$1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.} = 0,$$

$$1 + \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{d}{x^4} + \text{etc.} = 0,$$

dont la première soit du degré m, et la seconde du degré n; on commencera par former les quantités A', B', C', D', etc., A'', B'', C'', D'', etc., A''', B''', C''', D''', etc., lesquelles sont les coefficiens des séries qui expriment le carré, le cube, la quatrième puissance, etc. du polynome $A+Bx+Cx^2+$ etc., et on poussera cette opération jusqu'à la puissance de l'ordre n : on formera ensuite de la même manière les quantités a', b', c', etc.; a'', b'', c'', etc. jusqu'à la puissance m, et pour cela, il suffira de changer dans les valeurs correspondantes de A', B', C', etc., A'', B'', C'', etc., les quantités A, B, C, etc. en a, b, c, d, etc.

Ayant ainsi toutes ces quantités, on les substituera dans

$$\begin{aligned}\varphi = Aa &+ 2\left(B-\frac{A'}{2}\right)\left(b-\frac{a'}{2}\right)\\ &+3\left(C-\frac{B'}{2}+\frac{A''}{3}\right)\left(c-\frac{b'}{2}+\frac{a''}{3}\right)\\ &+4\left(D-\frac{C'}{2}+\frac{B''}{3}-\frac{A''}{4}\right)\left(d-\frac{c'}{2}+\frac{b''}{3}-\frac{a''}{4}\right),\\ &\text{etc.}\end{aligned}$$

et l'on fera ensuite l'équation

$$1-\varphi+\frac{\varphi^2}{1.2}-\frac{\varphi^3}{1.2.3}+\frac{\varphi^4}{1.2.3.4}-\text{etc.}=0,$$

en observant de rejeter tous les termes qui contiendraient des produits de A, B, C, etc. de plus de n dimensions, et des produits de a, b, c, etc., et de plus de m dimensions; on aura par ce moyen, l'équation finale dont le degré ne pourra excéder mn.

Au reste, on peut encore trouver la valeur de φ, sans calculer les quantités A', B', C', etc., A'', B'', C'', etc. En effet, comme

$$\varphi = Pp + 2qQ + 3rR + \text{etc.},$$

la question se réduit à trouver P, Q, R, etc., p, q, r, etc. en A, B, C, etc., a, b, c, etc.

Or ayant l'identité

$$l(1+Ax+Bx^2+Cx^3+\text{etc.}) = Px+Qx^2+Rx^3+\text{etc.},$$

si l'on change x en $x+i$ dans les deux membres, et qu'on ordonne suivant les puissances croissantes de i, on aura, en posant $X=1+Ax+Cx^2+\text{etc.}$,

$$\begin{aligned} &l[X+(A+2Bx+3Cx^2+\text{etc.})i+\text{etc.}] \\ &=(Px+Qx^2+Rx^3+\text{etc.})+(P+2Qx+3Rx^2+\text{etc.})i \\ &+\text{etc.} \\ &= lX + l\left[1+\frac{A+2Bx+3Cx^2+\text{etc.}}{X}i+\text{etc.}\right]; \end{aligned}$$

supprimant d'une part $Px+Qx^2+Rx^3+\text{etc.}$, et de l'autre lX, on aura

$$\begin{aligned} &(P+2Qx+3Rx^2+\text{etc.})i+\text{etc.} \\ &= l\left[1+\frac{A+2Bx+3Cx^2+\text{etc.}}{1+Ax+Bx^2+\text{etc.}}i+\text{etc.}\right] \\ &= \frac{A+2Bx+3Cx^2+\text{etc.}}{1+Ax+Bx^2+\text{etc.}}i+\text{etc.}, \end{aligned}$$

d'après le développement de $l(1+z)$: divisant par i, et faisant l'indéterminée $i=0$, on obtient l'identité

$$\frac{A+2Bx+Cx^2+\text{etc.}}{1+Ax+Bx^2+Cx^3+\text{etc.}} = P+2Qx+3Rx^2+\text{etc.}$$

Multipliant en croix, et comparant les coefficiens des mêmes puissances de x, on trouvera

$$\begin{aligned} A &= P, \\ 2B &= 2Q+AP, \\ 3C &= 3R+2AQ+BP, \\ 4D &= 4S+3AR+2BQ+CP, \\ &\text{etc.}; \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$P = A,$$

$$Q = \frac{2B - AP}{2},$$

$$R = \frac{3C - 2AQ - BP}{3},$$

$$S = \frac{4D - 3AR - 2BQ - CP}{4},$$

etc.

Ayant ainsi déterminé P, Q, R, etc. en A, B, C, etc., on changera ces dernières en a, b, c, etc., pour avoir p, q, r, etc.

On se souviendra toujours de rejeter dans P, Q, R, etc. les termes où A, B, C formeraient des produits de plus de n dimensions, et dans p, q, r, etc., ceux où a, b, c, etc. formeraient des produits de plus de m dimensions.

Si, pour simplifier, on écrit 2Q, 3R, 4S, etc. au lieu de Q, R, S, etc., et $2q$, $3r$, $4s$, etc. au lieu de q, r, s, etc., la valeur de φ deviendra

$$\varphi = Pp + \frac{Qq}{2} + \frac{Rr}{3} + \frac{Ss}{4} + \text{etc.},$$

et l'on aura pour la détermination de P, Q, R, S, etc., les formules suivantes :

$$P = A,$$
$$Q = 2B - AP,$$
$$R = 3C - BP - AQ,$$
$$S = 4D - CP - BQ - AR,$$
$$T = 5E - DP - CQ - BR - AS,$$

etc.

Il en sera de même pour les quantités p, q, r, etc., en changeant seulement A en a, B en b, C en c etc., et l'équation

sera, comme ci-dessus,

$$1-\varphi+\frac{\varphi^2}{2}-\frac{\varphi^3}{2.3}+\text{etc.}=0.$$

Nous prendrons pour premier exemple, l'élimination de x entre les deux équations

$$1+Ax+Bx^2=0,\qquad 1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}=0;$$

ici, comme le calcul en est simple, nous formerons les quantités A', B', C', a', b', c' : on trouvera, en faisant le quarré de $A+Bx$,

$$A'=A^2,\qquad B'=2AB,\qquad C'=B^2;$$

de même,

$$a'=a^2,\qquad b'=2ab,\qquad c'=b^2;$$

donc

$$\varphi=Aa+2\left(B-\frac{A^2}{2}\right)\left(b-\frac{a^2}{2}\right)+3ABab+B^2b^2$$

$$=Aa+2Bb-A^2b-Ba^2+\frac{A^2a^2}{2}+3ABab+B^2b^2;$$

donc, en négligeant les produits de A et B, aussi bien que ceux de a et b qui seraient de plus de deux dimensions, on aura

$$\varphi^2=A^2a^2+4ABab+4B^2b^2,$$

$$\varphi^3=0,\qquad \varphi^4=0,\ \text{etc.};$$

substituant ces valeurs dans

$$1-\varphi+\frac{\varphi^2}{2}-\frac{\varphi^3}{2.3}+\text{etc.}=0,$$

on aura pour équation finale,

$$1-Aa-2Bb+A^2b+Ba^2-ABab+B^2b^2=0.$$

Ainsi si l'on suppose

$$B=\frac{1}{y^2},\qquad A=\frac{1}{y},\qquad b=1,\qquad a=-y,$$

les deux équations deviendront

$$x^2+yx+y^2=0\,,\qquad x^2-yx+1=0\,,$$

et elles auront pour équation finale

$$3y^4+1=0.$$

On propose, en second lieu, d'éliminer x entre les deux équations

$$1+Ax+Bx^2+Cx^3=0\,,$$
$$1+\frac{a}{x}+\frac{b}{x^2}+\frac{c}{x^3}=0\,;$$

on trouvera d'abord, en employant les formules données précédemment,

$$\begin{aligned}
P &= A\,,\\
Q &= 2B-A^2,\\
R &= 3C-3AB+A^3,\\
S &= -4AC-2B^2+4A^2B\,,\\
T &= -5BC+5A^2C+5AB^2,\\
U &= -3C^2+12ABC+2B^3,\\
V &= 7AC^2+7B^2C\,,\\
W &= 8BC^2.
\end{aligned}$$

Donc on aura

$$\begin{aligned}
\varphi=&Aa+\tfrac{1}{2}(2B-A^2)(2b-a^2)+\tfrac{1}{3}(3C-3AB+A^3)(3c-3ab+a^3)\\
&+\tfrac{1}{4}(-4AC-2B^2+4A^2B)(-4ac-2b^2+4a^2b)\\
&+\tfrac{1}{5}(-5BC+5A^2C+5AB^2)(-5bc+5a^2c+5ab^2)\\
&+\tfrac{1}{6}(-3C^2+12ABC+2B^3)(-3c^2+12abc+2b^3)\\
&+\tfrac{1}{7}(7AC^2+7B^2C)(7ac^2+7b^2c)\\
&+\tfrac{1}{8}\,8BC^2\times 8bc^2.
\end{aligned}$$

Pour former φ^2, φ^3, etc., on rejettera de φ tous les termes où A, B, C, etc., a, b, c, etc. sont des produits de plus de deux dimensions, et ordonnant les autres par rapport aux

dimensions de ces mêmes quantités, on aurait

$$\begin{aligned}\varphi = {} & Aa + 2Bb + 3Cc \\ & - Ba^2 - 3Cab - bA^2 - 3cAB \\ & + \frac{A^2a^2}{2} + 3ABab + (2AC + B^2)(2ac + b^2) \\ & + 5BCbc + \tfrac{3}{2}C^2c^2;\end{aligned}$$

d'où l'on tire, en ne conservant que les produits de trois ou d'un moindre nombre de dimensions,

$$\begin{aligned}\varphi^2 = {} & (Aa + 2Bb + 3Cc)^2 \\ & + 2(Aa + 2Bb + 3Cc)\{-Ba^2 - 3Cab - bA^2 - 3cAB \\ & + \frac{A^2a^2}{2} + 3ABab \\ & + (2AC + B^2)(2ac + b^2) + 5BCbc + \tfrac{3}{2}C^2c^2\} \\ & + 2(Ba^2 + 3Cab)(bA^2 + 3cAB),\end{aligned}$$

$$\varphi^3 = (Aa + 2Bb + 3Cc)^3,$$

$$\varphi^4 = 0.$$

De sorte que l'équation finale sera

$$\begin{aligned} 1 - Aa & - \tfrac{1}{2}(2B - A^2)(2b - a^2) \\ & - \tfrac{1}{3}(3C - 3AB + A^3)(3c - 3ab + a^3) \\ & - \tfrac{1}{4}(-4AC - 2B^2 + 4A^2B)(-4ac - 2b^2 + 4a^2b) \\ & - \tfrac{1}{5}(-5BC + 5A^2C + 5AB^2)(-5bc + 5a^2c + 5ab^2) \\ & - \tfrac{1}{6}(-3C^2 + 12ABC + 2B^3)(-3c^2 + 12abc + 2b^3) \\ & - \tfrac{1}{7}(7AC^2 + 7B^2C)(7ac^2 + 7b^2c) \\ & - 8BC^2bc^2 + (Aa + 2Bb + 3Cc) \\ & \times \left\{\frac{Aa + 2Bb + 3Cc}{2} - Ba^2 - 3Cab - bA^2 - 3cAB \right. \\ & + \frac{A^2a^2}{2} + 3ABab + (2AC + B^2)(2ac + b^2) \\ & \left. + 5BCbc + \tfrac{3}{2}C^2c^2 \right\} + (Ba^2 + 3Cab)(bA^2 + 3cAB) \\ & - \frac{1}{2.3}(Aa + 2Bb + 3Cc)^3 = 0.\end{aligned}$$

En supposant que C soit un polynome du degré — 3 en y, et que c soit un polynome du troisième degré, l'équation finale sera du degré 3×3, ou du neuvième degré en y.

45. On doit à M. *Kramp*, doyen de la faculté des Sciences de l'Académie de Strasbourg, la méthode suivante, propre à faciliter l'élimination dans les équations des degrés supérieurs, méthode sur laquelle on trouvera plus de détails dans le onzième numéro du tome premier des *Annales de Mathématiques*.

Soit l'équation

$$\lambda x^n = ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + dx^{n-4} + \text{etc.} \ldots (\text{N});$$

si on la multiplie de part et d'autre par λx, en mettant pour λx^n dans le second membre, sa valeur tirée de la proposée, on aura

$$\lambda^2 x^{n+1} = (aa+\lambda b)\,x^{n-1} + (ab+\lambda c)\,x^{n-2} + (ac+\lambda d)\,x^{n-3} + \text{etc.},$$

équation que nous écrirons ainsi :

$$\lambda^2 x^{n+1} = a'x^{n-1} + b'x^{n-2} + c'x^{n-3} + \text{etc};$$

multipliant de nouveau par λx, en mettant toujours pour λx^n dans le second membre, sa valeur donnée par la proposée, on trouvera

$$\lambda^3 x^{n+3} = (aa'+\lambda b')x^{n-1} + (ba'+\lambda c')x^{n-2} + (ca'+\lambda d')x^{n-3} + \text{etc.},$$

équation que nous écrirons ainsi

$$\lambda^3 x^{n-3} = a''x^{n-1} + b''x^{n-2} + c''x^{n-3} + \text{etc.},$$

et ainsi de suite. On a

$$\begin{aligned}
a' &= aa + \lambda b, \\
a'' &= aa' + \lambda ba + \lambda^2 c, \\
a''' &= aa'' + \lambda ba' + \lambda^2 ca + \lambda^3 d, \\
a^{\text{iv}} &= aa''' + \lambda ba'' + \lambda^2 ca' + \lambda^3 da + \lambda^4 e, \\
&\text{etc.};
\end{aligned}$$

$$b' = ab + \lambda c,$$
$$b'' = ab' + \lambda bb + \lambda^2 d,$$
$$b''' = ab'' + \lambda bb' + \lambda^2 cb + \lambda^3 e$$
$$b^{\text{IV}} = ab''' + \lambda bb'' + \lambda^2 cb' + \lambda^3 db + \lambda^4 f,$$
etc. ;
$$c' = ac + \lambda d,$$
$$c'' = ac' + \lambda bc + \lambda^2 e,$$
$$c''' = ac'' + \lambda bc' + \lambda^2 cc + \lambda^3 f,$$
$$c^{\text{IV}} = ac''' + \lambda bc'' + \lambda^2 cc' + \lambda^3 dc + \lambda^4 g,$$
etc.,

toutes ces valeurs formant des séries récurrentes.

Si, outre l'équation (N) du degré n, on a une équation (M) du degré m en x, m étant $> n$, en mettant dans cette dernière, pour

$$x^n, \quad x^{n+1}, \quad x^{n+2}, \quad x^{n+3}, \quad \text{etc.},$$

les valeurs déduites de la première, par le procédé que nous venons d'exposer, elle ne sera plus que du degré $n-1$. On aura donc, au lieu des proposées, des équations des degrés n et $n-1$, qui, en leur appliquant le même procédé, en feront trouver une nouvelle du degré $n-2$. En poursuivant de la même manière, on parviendra enfin à une équation du degré zéro; ce sera l'équation de condition qui devra exister entre les coefficiens des deux proposées, pour qu'elles puissent subsister ensemble, ou pour qu'il y ait un facteur commun entr'elles : ce sera conséquemment l'équation finale, si les coefficiens des deux proposées sont fonctions d'une autre inconnue y, par exemple.

La question se trouvant ainsi réduite à éliminer l'inconnue x entre deux équations dont les degrés ne diffèrent que d'une unité, nous prendrons, comme type, le système des deux équations

$$0 = Ax^n + Bx^{n-1} + Cx^{n-2} + \text{etc.},$$
$$0 = ax^{n-1} + bx^{n-2} + cx^{n-3} + \text{etc.}$$

Appliquant la méthode précédente à ces deux équations, on en déduira une du degré $n-2$; et si l'on désigne cette dernière par

$$o = a'x^{n-2} + b'x^{n-3} + c'x^{n-4} + \text{etc.},$$

on aura

$$a' = b\,(Ab - Ba) - a\,(Ac - Ca),$$
$$b' = c\,(Ab - Ba) - a\,(Ad - Da),$$
$$c' = d\,(Ab - Ba) - a\,(Ae - Ea),$$
$$d' = e\,(Ab - Ba) - a\,(Af - Fa),$$

etc.

Nous nous bornerons à une seule application. On propose de trouver le facteur commun aux deux polynomes

$$5x^5 - 27x^4 + 22x^3 + 17x^2 - 49x + 24,$$
$$3x^4 - 22x^3 + 46x^2 - 31x + 6:$$

on a donc les deux équations

$$o = 5x^5 - 27x^4 + 22x^3 + 17x^2 - 49x + 24,$$
$$o = 3x^4 - 22x^3 + 46x^2 - 31x + 6.$$

A = 5	a = 3	Ab—Ba = — 29	a′ = 146
B = —27	b = —22	Ac—Ca = 164	b′ = —716
C = 22	c = 46	Ad—Da = —206	c′ = 368
D = 17	d = —31	Ae—Ea = 177	d′ = 42
E = —49	e = 6	Af—Fa = — 72	
F = 24			

3ᵉ équat.... $o = 73x^3 - 358x^2 + 184x + 21$,

après la division par 2.

Équat. données... $\begin{cases} o = 3x^4 - 22x^3 + 46x^2 - 31x + 6, \\ o = 73x^3 - 358x^2 + 184x + 21. \end{cases}$

A = 3	a = 73	Ab—Ba = 532	a′ = 14382
B = —22	b = —358	Ac—Ca = —2806	b′ = —71910
C = 46	c = 184	Ad—Da = 2326	c′ = 43146
D = —31	d = 21	Ae—Ea = — 438	
E = — 6			

égales, n et ν étant $< m$, on aurait

$$\alpha^n = \alpha^\nu, \quad \text{d'où} \quad \alpha^{n-\nu} = 1;$$

or, aucune puissance de α, moindre que m, ne peut être l'unité, lorsque α n'est pas l'unité. En effet, puisque

$$\alpha^m - 1 = 0,$$

si l'on avait en même temps

$$\alpha^p - 1 = 0,$$

p étant $< m$, nécessairement ces deux équations auraient une racine commune, et en cherchant par les règles ordinaires, le plus grand commun diviseur entre $\alpha^m - 1$ et $\alpha^p - 1$, on trouverait $\alpha - 1$ pour résultat, parce que m est un nombre premier : de sorte que la racine commune aux deux équations, ne pourrait être que l'unité, conclusion qui ramènerait à $\alpha = 1$, contre l'hypothèse faite sur α.

Il résulte de là, 1°. que les puissances α, α^2, $\alpha^3 \ldots\ldots \alpha^m$ représentent toutes les racines de l'équation

$$y^m - 1 = 0,$$

en prenant pour α une quelconque des racines de cette équation, autre que l'unité; car puisque $\alpha^m = 1$, on aura aussi

$$\alpha^{2m} = 1, \quad \alpha^{3m} = 1, \quad \text{etc.},$$

de sorte que les puissances α, α^2, $\alpha^3 \ldots\ldots \alpha^m$ seront aussi des racines de la même équation, et comme elles sont en nombre m, et toutes différentes entr'elles, elles seront nécessairement toutes les racines de l'équation

$$y^m - 1 = 0.$$

Il résulte encore de là, 2°. que si, dans la série des puissances α, $\alpha^2 \ldots\ldots \alpha^{m-1}$, on substitue pour α une quelconque de ces puissances, comme α^n, n étant $< m$, la nouvelle série

$$\alpha^n, \quad \alpha^{2n}, \quad \alpha^{3n} \ldots\ldots \alpha^{nm-n},$$

en rabaissant toutes les puissances au-dessous de α^m, à cause de $\alpha^m = 1$, contiendra encore les mêmes puissances, mais dans un ordre différent; car il est visible que tous les exposans n, $2n$, $3n$, etc. sont différens, et que les restes de la division par m le sont aussi, parce que m est un nombre premier; de sorte que ces restes étant au nombre de m, et tous différens entr'eux, ne peuvent être que les nombres $1, 2, 3 \ldots m$. Soient $m = 7$ et $n = 3$: on a la série des racines

$$\alpha, \quad \alpha^2, \quad \alpha^3, \quad \alpha^4, \quad \alpha^5, \quad \alpha^6, \quad \alpha^7 = 1,$$

et

$$\alpha^3, \quad \alpha^6, \quad \alpha^9, \quad \alpha^{12}, \quad \alpha^{15}, \quad \alpha^{18}, \quad \alpha^{21},$$

et en rabaissant les puissances au-dessous de α^7, ce qui revient à diviser par 7 chacun des exposans de la ligne inférieure, on trouve

$$\alpha^3, \quad \alpha^6, \quad \alpha^2, \quad \alpha^5, \quad \alpha^1, \quad \alpha^4, \quad \alpha^7.$$

Considérons maintenant le cas où m est un nombre composé : si n est un diviseur de m, toutes les racines de l'équation $y^n - 1 = 0$, seront communes à l'équation $y^m - 1 = 0$; parce qu'en supposant que r soit racine de l'équation

$$y^n - 1 = 0,$$

on aura $r^n = 1$, et par conséquent aussi $r^m = 1$; d'où il s'ensuit que r sera aussi racine de l'équation

$$y^m - 1 = 0.$$

Remplaçant donc r par α, on aura $\alpha^m = 1$, et si $m = np$, il est visible que, dans la série des puissances

$$\alpha^m, \quad \alpha^{2m}, \quad \alpha^{3m}, \quad \text{etc.}, \qquad \text{ou} \qquad \alpha^{np}, \quad \alpha^{2np}, \quad \alpha^{3np}, \quad \alpha^{4np}, \quad \text{etc.},$$

qui devient, à cause de $1 = \alpha^n, = \alpha^{2n}, = \alpha^{3n}$, etc.,

$$\alpha^p, \quad \alpha^{2p}, \quad \alpha^{3p}, \quad \alpha^{4p}, \quad \text{etc.},$$

chacune des racines $\alpha, \alpha^2, \alpha^3 \ldots\ldots$ se trouvera répétée p fois;

et conséquemment ces puissances ne pourront plus représenter les racines de l'équation $y^m - 1 = 0$, puisque cette équation ne peut avoir de racines égales (47).

Soit $m = pq$, p et q étant deux nombres premiers, et soit ζ une des racines de l'équation

$$y^p - 1 = 0,$$

et γ une des racines de l'équation

$$y^q - 1 = 0:$$

il est clair que ζ et γ seront aussi racines de l'équation

$$y^m - 1 = 0,$$

parce que ζ^p et γ^q étant 1, on aura aussi

$$\zeta^{pq} = 1, \quad \gamma^{pq} = 1.$$

Mais, d'après ce qui vient d'être observé, toutes les racines de l'équation

$$y^m - 1 = 0$$

ne pourront pas être représentées par les puissances successives de ces racines ζ et γ.

On voit aussi que le produit $\zeta\gamma$ sera racine de la même équation

$$y^m - 1 = 0;$$

mais aucune puissance de cette racine, dont l'exposant ν serait inférieur à m, ne pourra être égale à l'unité, à moins que ζ ou γ ne soit $= 1$. En effet, il faudrait que m fût un multiple de ν, et qu'ainsi on eût $\nu = p$, ou $= q$; d'où l'on conclurait

$$(\zeta\gamma)^p = 1 \quad \text{ou} \quad (\zeta\gamma)^q = 1:$$

dans le premier cas, on aurait $\gamma^p = 1$, à cause de $\zeta^p = 1$, et conséquemment,

$$\gamma^p - 1 = 0,$$

et comme on a déjà

$$\gamma^q - 1 = 0,$$

et que d'ailleurs p et q sont des nombres premiers entr'eux, il en résulterait, comme plus haut,

$$\gamma - 1 = 0.$$

Dans le second cas, on aurait

$$\beta - 1 = 0.$$

Ainsi, puisqu'aucune puissance de $\beta\gamma$, inférieure à m, ne peut être l'unité, à moins que β ou que γ ne soit $= 1$, et que d'ailleurs,

$$(\beta\gamma)^m = 1,$$

nécessairement, d'après ce qui précède, la racine $\beta\gamma$ de l'équation

$$y^m - 1 = 0,$$

lorsque $m = pq$, jouit de la même propriété que la racine α, lorsque m est un nombre premier, savoir, que toutes les racines de cette équation, peuvent être représentées par les puissances successives de $\beta\gamma$, depuis l'unité jusqu'à m.

Comme les valeurs de β sont au nombre de p, et celles de γ au nombre de q, les valeurs de $\beta\gamma$ seront au nombre de $pq = m$; et il est facile de prouver que ces valeurs seront toutes différentes entr'elles, parce que les premières ne sont que les puissances de l'une des racines β, depuis l'unité jusqu'à p, et que toutes les secondes sont celles des racines γ, depuis l'unité jusqu'à q, en observant que les nombres p et q sont premiers, proposition démontrée plus haut. D'où il suit que toutes les racines de l'équation

$$y^m - 1 = 0,$$

m étant $= pq$, peuvent être représentées par les produits $\beta\gamma$ des racines des équations

$$y^p - 1 = 0, \quad y^q - 1 = 0,$$

p et q étant des nombres premiers.

On prouvera de même que si $m = pqr$, p, q, r étant

des nombres premiers, et si β, γ, δ sont respectivement des racines quelconques des trois équations

$$y^p - 1 = 0, \quad y^q - 1 = 0, \quad y^r - 1 = 0,$$

le produit $\beta\gamma\delta$, en donnant successivement à β, γ, δ toutes leurs valeurs, pourra représenter toutes les racines de l'équation

$$y^m - 1 = 0,$$

et que celles de ces racines qui seront exprimées par $\beta\gamma\delta$, aucune de ces racines β, γ, δ n'étant l'unité, auront les mêmes propriétés que les racines de l'équation

$$y^m - 1 = 0,$$

m étant un nombre premier.

Et ainsi de suite.

Mais si l'on avait $m = p^2$, p étant un nombre premier, en prenant β pour une quelconque des racines de l'équation

$$y^p - 1 = 0,$$

il est clair que β serait aussi racine de l'équation

$$y^m - 1 = 0 \quad \text{ou} \quad y^{pp} - 1 = 0,$$

et que $\sqrt[p]{\beta}$ le serait aussi, puisqu'à cause de $\beta^p = 1$, on a

$$(\sqrt[p]{\beta})^{pp} = \beta^p = 1.$$

On prendrait donc, dans ce cas, pour γ, une quelconque des valeurs de $\sqrt[p]{\beta}$, et l'on aurait également $\beta\gamma$ pour l'expression de toutes les racines de $y^m - 1 = 0$, parce que ces racines $\beta\gamma$ sont au nombre de pp, et toutes différentes entr'elles.

De même, si $m = p^3$, en conservant les valenrs de β et γ, on ferait de plus $\delta = \sqrt[p^2]{\beta}$, ensorte que β, $\gamma = \sqrt[p]{\beta}$, $\delta = \sqrt[p^2]{\beta}$,

seraient des racines de

$$y^m - 1 = o \quad \text{ou de} \quad y^{p^3} - 1 = o,$$

en observant que $\beta^p = 1$. On aurait donc $\beta\gamma\delta$ pour l'expression de toutes les racines de $y^m - 1 = o$, en donnant successivement à β, γ, δ toutes leurs valeurs (*), et ainsi de suite.

Donc, en général, si

$$m = p^\mu q^\nu r^\pi \ldots\ldots$$

et que β, γ, δ.... soient respectivement des racines quelconques des équations

$$y^p - 1 = o, \quad y^q - 1 = o, \quad y^r - 1 = o, \quad \text{etc.},$$

p, q, r, etc. étant des nombres premiers : si l'on fait de plus,

$$\beta' = \sqrt[p]{\beta}, \quad \beta'' = \sqrt[p]{\beta'}, \text{ etc.}; \quad \gamma' = \sqrt[q]{\gamma}, \quad \gamma'' = \sqrt[q]{\gamma'}, \text{ etc.};$$
$$\delta' = \sqrt[r]{\delta}, \quad \delta'' = \sqrt[r]{\delta'}, \text{ etc.},$$

on aura

$$\beta\beta'\beta''\ldots\times\gamma\gamma'\gamma''\ldots\times\delta\delta'\delta''\ldots$$

(*) Pour l'équation $y^8 - 1 = o$, on a $p = 2$; ensorte que les valeurs de β sont $+1$ et -1; celles de $\gamma = \sqrt{\beta}$, sont $\sqrt{1}$ et $\sqrt{-1}$; enfin celles de $\delta = \sqrt[4]{\beta}$ sont $\sqrt[4]{1}$ et $\sqrt[4]{-1}$: ainsi les racines $\beta\gamma\delta$ sont

$$1\sqrt{1}.\sqrt[4]{1}$$
$$1\sqrt{1}.\sqrt[4]{-1}$$
$$-1\sqrt{1}.\sqrt[4]{1}$$
$$-1\sqrt{1}.\sqrt[4]{-1}$$
$$1\sqrt{-1}.\sqrt[4]{1}$$
$$1\sqrt{-1}.\sqrt[4]{-1}$$
$$-1\sqrt{-1}.\sqrt[4]{1}$$
$$-1\sqrt{-1}.\sqrt[4]{-1}$$

dont chacune satisfait à la proposée, et dont le produit en est le terme tout connu -1.

pour l'expression générale des racines de l'équation

$$y^m - 1 = 0,$$

en donnant successivement à β, β', etc..... γ, γ', etc..... δ, δ', etc., toutes les valeurs dont ces quantités sont susceptibles chacune en particulier.

On voit par là que, pour avoir les racines de l'équation à deux termes

$$y^m - 1 = 0,$$

lorsque m n'est pas un nombre premier, il suffit de résoudre des équations semblables de degrés dont les exposans soient les facteurs nombres premiers du nombre m.

Enfin nous remarquerons que comme l'équation

$$y^m - 1 = 0$$

manque de tous les termes intermédiaires, si on nomme 1, α, β, γ, etc. ses racines, on aura (1ère sect.)

$$1 + \alpha + \beta + \gamma + \delta + \text{etc.} = 0,$$
$$1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \text{etc.} = 0,$$
$$1 + \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \text{etc.} = 0,$$
$$\vdots$$
$$1 + \alpha^{m-1} + \beta^{m-1} + \gamma^{m-1} + \delta^{m-1} + \text{etc.} = 0;$$

ensuite, à cause de $\alpha^m = 1$, $\beta^m = 1$, $\gamma^m = 1$, etc., on aura

$$1 + \alpha^m + \beta^m + \gamma^m + \text{etc.} = m,$$
$$1 + \alpha^{m+1} + \beta^{m+1} + \gamma^{m+1} + \text{etc.} = 0,$$
$$1 + \alpha^{m+2} + \beta^{m+2} + \gamma^{m+2} + \text{etc.} = 0,$$
etc.

et ainsi de suite.

48. *Euler* le premier, et après lui tous ceux qui se sont occupés de la théorie des nombres, ont démontré ce fameux théorème de *Fermat* : *Si* p *est un nombre premier, et* a *un nombre moindre que* p, *le nombre* $a^{p-1} - 1$ *sera nécessairement divisible par* p, *de sorte que le reste de la division*

de a^{p-1} *par* p, *sera l'unité.* C'est cette démonstration que nous allons rapporter avec tous les détails qu'exige son importance.

Dans la suite des puissances

$$1, \quad a, \quad a^2, \quad a^3, \quad \text{etc.},$$

il existe, outre le premier terme, un terme a^t *qui, divisé par un nombre* p *premier avec la base* a, *laisse l'unité pour reste*, t *étant* $< p$.

Ainsi, E désignant un nombre entier quelconque, il s'agit de démontrer que

$$a^t = Ep + 1.$$

Soit

$$a^m = Ep + \alpha:$$

en donnant à m un nombre de valeurs, égal à p, à partir de $m = 1$, on doit rencontrer, au moins deux fois, une même valeur de α. En effet, le nombre des divisions étant p, à partir de $m = 1$, et celui des restes ne pouvant excéder $p - 1$, il faut que l'un des restes se reproduise au moins deux fois, en observant qu'on ne peut rencontrer le reste zéro: si l'on désigne par m' et E' les valeurs de m et de E, pour lesquelles on a le retour du même reste, on posera

$$a^m = Ep + \alpha,$$
$$a^{m'} = E'p + \alpha;$$

d'où l'on déduit

$$a^{m'} - a^m = (E' - E)p = (a^{m'-m} - 1)a^m;$$

mais a n'étant pas divisible par p, a^m ne le sera pas (Ire sect., chap. VIII); et puisque $(E' - E)\,p$ est divisible par p, il faut donc que $a^{m'-m} - 1$ le soit. Donc $a^{m'-m} - 1$ est de la forme Ep, et $a^{m'-m}$ de la forme $Ep + 1$, $m' - m$ étant $< p$, puisque m' et m tombent entre o et p. Par exemple, dans la progression

$$2^0, \quad 2^1, \quad 2^2, \quad 2^3, \quad 2^4, \quad 2^5, \quad \text{etc.},$$

le nombre $2^4 = 16$ divisé par 5, laisse pour reste l'unité,

En partant de l'égalité

$$a^t = \mathrm{E}p + 1,$$

et multipliant par les puissances successives de a, on a

$$a^{t+1} = a\mathrm{E}p + a,$$
$$a^{t+2} = a^2\mathrm{E}p + a^2,$$
$$a^{t+3} = a^3\mathrm{E}p + a^3,$$
$$a^{t+4} = a^4\mathrm{E}p + a^4,$$
etc.

Ainsi les restes des divisions de a^t, a^{t+1}, etc. par p, sont les mêmes que ceux des divisions de a^0, a^1, $a^2 \ldots a^{t-1}$ par p.

Donc tous les restes que peuvent fournir les termes de la suite a^t, $a^{t+1} \ldots$ sont compris dans l'intervalle

$$a^0, \quad a^1, \quad a^2 \ldots \ldots a^{t-1},$$

en observant toujours que t est l'exposant pour lequel le reste $= 1$.

De ce que $\qquad a^t = \mathrm{E}p + 1,$
il suit qu'on a

$$a^{nt} = (\mathrm{E}p + 1)^n = \mathrm{E}^n p^n + n\mathrm{E}^{n-1}p^{n-1} + \ldots\ldots + n\mathrm{E}p + 1$$
$$= p\left[\mathrm{E}^n p^{n-1} + n\mathrm{E}^{n-1}p^{n-2} + \ldots + n\mathrm{E}\right] + 1,$$

expression de même forme que celle qui représente a^t.

Qu'on ait à chercher, par exemple, le reste de 3^{1000} divisé par 13 : il faut d'abord découvrir la puissance de 3 pour laquelle on a le reste 1, ce qui fera connaître 3^t. Cette puissance est 3^3 ou 27 qui, divisé par 13, donne en effet 1 de reste. Ainsi tous les restes sont 1, 3 et 9, les mêmes que ceux de

$$3^0, \quad 3^1, \quad 3^2,$$

par 13. Donc de trois en trois, on a pour reste l'unité; mais le plus grand multiple de 3, contenu dans 1000, est 333×3, de sorte que $3^{333\times3}$, divisé par 13, laisse 1 de reste, et $3^{1000} = 3^{333\times3+1}$ occupe, dans la période

$$3^{333\cdot3}, \quad 3^{333\cdot3+1}, \quad 3^{333\cdot3+2},$$

le même rang que 3^1 dans la sienne : donc les restes de 3^1 et de 3^{1000} par 13, sont les mêmes, c'est-à-dire, que ce reste $= 3$.

Ce qui précède suppose seulement que p soit un nombre premier par rapport à a ; mais le théorème suivant ne s'applique qu'aux nombres premiers, pris individuellement.

Si p *est un nombre premier qui ne divise pas* a, *et* a^t *le terme du plus petit exposant pour lequel on ait*

$$a^t = Ep + 1,$$

l'exposant t *sera ou* $p - 1$, *ou un diviseur de* $p - 1$.

D'abord puisque a et p sont, comme dans le théorème précédent, des nombres premiers entr'eux, le nombre t ne peut surpasser $p - 1$. Il reste donc à démontrer qu'il doit être ou $p - 1$, ou un diviseur exact de $p - 1$.

Soient 1, α', α'', etc. les restes des divisions des termes

$$1, \; a, \; a^2 \ldots\ldots a^{t-1}$$

par p : ces restes ne pourront généralement comprendre tous les nombres

$$1, \; 2, \; 3 \ldots\ldots p - 1,$$

puisqu'ils ne peuvent être qu'en nombre t. Qu'on divise la suite des puissances

$$3^1, \; 3^2, \; 3^3, \; 3^4$$

par 5, on aura les restes

$$3, \; 4, \; 2, \; 1.$$

Ici $t = 4$, $p = 5$, ensorte que $t = p - 1$, et les nombres 1, α', α'', etc. sont les mêmes que $1, 2, 3 \ldots p - 1$; mais c'est une circonstance qu'on ne doit pas supposer.

Tous ces restes 1, α', α'', etc. sont différens entr'eux ; car s'il en existait deux qui fussent les mêmes, pour deux termes a^m, a^n, antérieurs à a^t, on aurait

$$a^m = Ep + \alpha',$$
$$a^n = E'p + \alpha',$$

11..

donc

$$a^n - a^m = a^m(a^{n-m} - 1) = (E' - E)p$$

serait divisible par p ; ou bien encore, comme a^m n'est pas divisible par p, on aurait

$$a^{n-m} - 1 = E''p, \quad \text{d'où} \quad a^{n-m} = E''p + 1.$$

donc, dans l'intervalle de 1 à a^t, il y aurait le terme a^{n-m} qui laisserait l'unité pour reste, ce qui est contre la supposition exprimée dans l'énoncé.

Soit β un des nombres de la série

$$1,\ 2,\ 3 \ldots\ldots p-1,$$

non compris dans la série

$$1,\ \alpha',\ \alpha'' \ldots\ldots;$$

si on multiplie chaque terme de celle-ci par β, on formera la série

$$\beta,\ \alpha'\beta,\ \alpha''\beta,\ \alpha'''\beta,\ \text{etc.},$$

dont la division par p conduira à une nouvelle série de restes, que je représenterai par

$$\beta,\ \beta',\ \beta'',\ \beta''',\ \text{etc.},$$

1°. tous différens entr'eux, 2°. tous autres que les restes

$$\alpha,\ \alpha',\ \alpha'',\ \text{etc.}$$

Pour démontrer la première proposition, multiplions par β, les deux égalités

$$a^m = Ep + \alpha', \quad a^{m'} = E'p + \alpha'',$$

correspondantes à deux termes de la période

$$1,\ a^1,\ a^2 \ldots\ldots a^t,$$

et nous aurons

$$\beta a^m = \beta Ep + \beta\alpha', \quad \beta a^{m'} = \beta E'p + \beta\alpha'':$$

si les nombres $\beta\alpha'$, $\beta\alpha''$, divisés par p, pouvaient laisser un

même reste $\mathfrak{C}''$, il viendrait

$$\mathfrak{C}\alpha' = ep + \mathfrak{C}'',$$
$$\mathfrak{C}\alpha'' = e'p + \mathfrak{C}'',$$

d'où

$$\mathfrak{C}a^m = \mathfrak{C}\mathrm{E}p + ep + \mathfrak{C}'',$$
$$\mathfrak{C}a^{m'} = \mathfrak{C}\mathrm{E}'p + e'p + \mathfrak{C}',$$

et conséquemment,

$$\mathfrak{C}\,(a^{m'} - a^m) = p\,[\mathfrak{C}\,(\mathrm{E}' - \mathrm{E}) + e' - e].$$

Or $\mathfrak{C}$ étant $< p$, il faudrait que $a^{m'} - a^m$ fût divisible par p, ce qui est impossible dans l'intervalle de 1 à a^t, ainsi qu'on l'a vu précédemment.

Passons à la seconde proposition, et supposons que l'un des restes

$$\mathfrak{C},\quad \mathfrak{C}',\quad \mathfrak{C}'',\quad \text{etc.},$$

soit le même que l'un de ceux-ci

$$\alpha,\quad \alpha',\quad \alpha'',\quad \text{etc.}:$$

on a, dans cette hypothèse,

$$\mathfrak{C}a^{m'} = \mathfrak{C}\mathrm{E}'p + \mathfrak{C}\alpha'' = (\mathfrak{C}\mathrm{E}' + e')\,p + \alpha';$$

mais d'ailleurs il existe une puissance a^m pour laquelle on a

$$a^m = \mathrm{E}p + \alpha';$$

retranchant la première formule de la seconde, il vient

$$a^m - \mathfrak{C}a^{m'} = p\,[\mathrm{E} - \mathfrak{C}\mathrm{E}' - e'],$$

c'est-à-dire,

$$a^{m'}\,(a^{m-m'} - \mathfrak{C}) = p\,[\mathrm{E} - \mathfrak{C}\mathrm{E}' - e'];$$

mais, en supposant d'abord $m' < m$, le nombre $a^{m-m'}$ est l'un de ceux de la série $1, a, a^2 \ldots a^{t-1}$; ce nombre divisé par t, donne l'un des restes $1, \alpha', \alpha'' \ldots\ldots$, différens de $\mathfrak{C}$; ce reste moins $\mathfrak{C}$, est un nombre plus petit que p, et conséquemment, non divisible par p : d'ailleurs $a^{m'}$ est premier avec p; donc (Ire sect., chap. VIII) le premier membre ne peut être ni p, ni un multiple de p.

Si l'on avait $m' > m$, on considérerait alors le terme a^{t+m} qui divisé par p, donne le même reste que a^m, et on aurait

$$a^{t+m} - 6a^{m'} = p\,(E - 6E' - e'),$$

d'où

$$a^{m'}\,(a^{t+m-m'} - 6) = p\,(E - 6E' - e'):$$

or, dans l'hypothèse actuelle,

$$t + m - m' < t,$$

donc encore, la différence entre le reste de $a^{t+m-m'}$ divisé par p et 6, est moindre que p, et l'impossibilité est la même que dans le cas précédent.

La série 6, $6'$, $6''$.... n'ayant aucun terme commun avec α, α', α''...., et les termes de la première série, étant en même nombre que ceux de la seconde, nécessairement ces deux séries contiendront ensemble un nombre de termes égaux à $2t$.

Si parmi ces $2t$ nombres, ne se rencontrent pas tous ceux de la série $1, 2, 3\ldots\ldots p-1$, on multipliera les termes de la série 1, α', α''..... par γ qui, faisant partie des nombres $1, 2, 3\ldots p-1$, ne se trouve pas parmi ceux-ci $1, \alpha', \alpha''\ldots\ldots$, et on aura un nombre t de résultats

$$\gamma\,,\quad \alpha'\gamma\,,\quad \alpha''\gamma\ldots\ldots$$

qui, divisés par p, donnent t restes,

$$\gamma\,,\quad \gamma'\,,\quad \gamma''\ldots\ldots$$

1°. tous différens entr'eux; 2°. tous autres que

$$1\,,\quad \alpha'\,,\quad \alpha''\ldots\ldots;$$

3°. tous autres que

$$6\,,\quad 6'\,,\quad 6''\ldots\ldots$$

Les deux premières propositions se prouvent comme précédemment. Pour démontrer la troisième, nous partirons des équations déjà employées ci-dessus, savoir :

$$a^m = Ep + \alpha',$$
$$a^{m'} = E'p + \alpha'';$$

d'où l'on tire,

$$\beta a^{m} = \beta \mathrm{E}p + \beta\alpha',$$
$$\gamma a^{m'} = \gamma \mathrm{E}'p + \gamma\alpha'';$$

mais on a posé plus haut,

$$\beta\alpha' = ep + \beta',$$

et nous supposons ici que $\gamma\alpha''$ divisé par p, puisse donner l'un des restes β, β', β'', etc., et, par exemple, le reste β', ce qui n'altère pas la généralité de la conclusion. On aurait donc les deux équations

$$\beta a^{m} = p\ (\beta \mathrm{E} + e) + \beta',$$
$$\gamma a^{m} = p\ (\gamma \mathrm{E}' + e_1) + \beta';$$

il en résulterait, dans le cas de $m' < m$,

$$\beta a^{m} - \gamma a^{m'} = p\ [(\beta \mathrm{E} + e) - (\gamma \mathrm{E}' + e_1)],$$

ou

$$a^{m'}\ [\beta a^{m-m'} - \gamma] = p\ [(\beta \mathrm{E} + e) - (\gamma \mathrm{E}' + e_1)];$$

par conséquent, $\beta a^{m-m'} - \gamma$ serait divisible par p, et comme $a^{m-m'}$ est l'un des nombres de la série

$$1,\ a,\ a^{2} \ldots\ldots a^{t-1},$$

qui divisé par p, donne l'un des restes

$$1,\ \alpha',\ \alpha'' \ldots\ldots,$$

$\beta a^{m-m'}$ donnera l'un des restes

$$\beta,\ \beta',\ \beta'' \ldots\ldots;$$

mais ce reste moins γ, est un nombre plus petit que p, et qui, conséquemment, ne peut être divisible par p. Donc, etc.

Lorsque m' est $> m$, on considère le terme a^{t+m} qui donne le même reste que a^{m}, et on a

$$a^{m}\ (\beta a^{t+m-m'} - \gamma) = p\ [(\beta \mathrm{E} + e) - (\gamma \mathrm{E} + e_1)],$$

impossible par les mêmes raisons.

En joignant les t termes compris dans la série

$$\gamma\,,\quad \gamma'\,,\quad \gamma''\ldots\ldots,$$

à ceux des séries précédentes, on a, en totalité, $3t$ nombres distincts, entiers, tous moindres que p.

Si les nombres

$$1\,,\quad 2\,,\quad 3\ldots\ldots p-1\,,$$

ne sont pas tous compris dans ces $3t$ termes, en prenant un de ceux qui manquent, on formera une nouvelle série entièrement distincte des trois précédentes, contenant t termes; et en continuant comme on en a la faculté, il faudra bien qu'on épuise, par un multiple de t, ceux de la série

$$1\,,\quad 2\,,\quad 3\ldots\ldots p-1\,,$$

dont le nombre est limité. Donc t sera un diviseur de $p-1$.

La quantité $\frac{p-1}{t}$ étant un nombre entier, si on élève les deux membres de l'égalité

$$a^t = \mathrm{E}p + 1\,,$$

à la puissance $\frac{p-1}{t}$, on aura

$$a^{\frac{t(p-1)}{t}} = a^{p-1} = (\mathrm{E}p+1)^{\frac{p-1}{t}};$$

tous les termes de cette puissance étant multiples de p, à l'exception du dernier qui est 1, seront divisibles par p. On aura donc

$$a^{p-1} = \mathrm{E}'p + 1\,,\quad \text{d'où}\quad a^{p-1} - 1 = \mathrm{E}'p:$$

donc *le nombre* $a^{p-1}-1$ *est divisible par* p, *lorsque* a *ne l'est pas.*

49. On nomme *racines primitives*, les nombres a dont aucune puissance moindre que a^{p-1}, ne donne le reste 1 par la division par p, et ces racines jouissent de cette propriété que tous les termes de la progression

$$a\,,\quad a^2,\quad a^3\ldots\ldots a^{p-1},$$

étant divisés par p, donnent des restes différens, et donnent, par conséquent, tous les nombres moindres que p pour restes, puisque ces restes sont au nombre de $p-1$; car si deux puissances a^m, $a^{m'}$ donnaient le même reste, m et m' étant $< p$ et $m' < m$, leur différence

$$a^m - a^{m'} = a^{m'}(a^{m-m'} - 1),$$

serait nécessairement divisible par p ; mais a n'étant pas divisible, et p étant premier, il faudrait que $a^{m-m'} - 1$ fût divisible par p ; donc il y aurait une puissance $a^{m-m'}$ moindre que a^{p-1} qui, divisée par p, donnerait l'unité pour reste ; par conséquent, a ne serait pas racine primitive contre l'hypothèse.

On n'a pas, jusqu'à présent, de méthode directe pour trouver les racines primitives pour chaque nombre premier ; mais on peut toujours les trouver facilement par le tâtonnement. *Euler* en a donné dans les *Commentaires de Pétersbourg*, tome XVIII, une table pour tous les nombres premiers jusqu'à 37, que nous placerons ici.

p	a
3	1,
5	2, 3,
7	3, 5,
11	2, 6, 7, 8,
13	2, 6, 7, 11,
17	3, 5, 6, 7, 11, 12, 14,
19	2, 3, 10, 13, 14, 15,
23	5, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 20, 21,
29	2, 3, 8, 10, 11, 14, 15, 18, 19, 21, 26, 27,
31	3, 11, 12, 13, 17, 21, 22, 24,
37	2, 5, 13, 15, 17, 18, 19, 20, 22, 24, 32, 35,

où l'on remarque que le nombre de ces *racines primitives*,

pour un nombre premier p donné, est toujours égal à celui des nombres moindres que p, et premiers à $p-1$. On peut voir, sur ce sujet, la section troisième des *Disquisitiones Arithmeticæ* de M. *Gauss*, ouvrage excellent publié en 1801, et qui a été traduit en français par M. *Poulet-Delisle*, sous le titre de *Recherches arithmétiques*.

Ainsi pour $p=19$, nombre pour lequel la plus petite racine primitive est 2, on a ces puissances de 2, et ces restes de la division par 19,

puissances	2^0,	2^1,	2^2,	2^3,	2^4,	2^5,	2^6,	2^7,	2^8,
restes	1,	2,	4,	8,	16,	13,	7,	14,	9,
puissances	2^9,	2^{10},	2^{11},	2^{12},	2^{13},	2^{14},	2^{15},	2^{16},	2^{17}.
restes	18,	17,	15,	11,	3,	6,	12,	5,	10.

On trouve, en effet, parmi les restes, la suite des nombres naturels, depuis 1 jusqu'à $18=p-1$, sans rencontrer le reste 1, si ce n'est pour 2^0.; le premier reste 1 est donné par la division de 2^{18} par 19.

Au reste, il nous suffira de connaître une seule des racines primitives pour un nombre premier donné, et il sera toujours plus avantageux, pour le calcul, d'en connaître la plus petite, comme on le verra dans le treizième chapitre.

CHAPITRE X.

Résolution générale des équations.

50. Le but de la résolution générale des équations, est de trouver pour toutes les équations d'un même degré, les fonctions des coefficiens de ces équations, propres à en représenter toutes les racines : ce problème a été résolu par les premiers algébristes sur les équations des second, troisième et quatrième degrés ; ils parvinrent à transformer l'équation à résoudre en une autre susceptible d'être résolue à la manière d'une équation d'un degré moindre, et à déterminer, au moyen des racines de cette nouvelle équation qu'on a nommée *réduite*, toutes celles de la proposée. Mais, dès le troisième degré, ces fonctions racines se présentent sous une forme telle, qu'il est impossible d'en tirer les valeurs numériques des racines par la simple substitution de celle des coefficiens, dans le cas même où toutes les racines sont essentiellement réelles : c'est cette difficulté que les analystes désignent par le nom de cas *irréductible;* elle aurait lieu, à plus forte raison, dans les équations des degrés supérieurs, s'il était possible de les résoudre par des formules générales. Heureusement, ajoute M. *Lagrange*, on a trouvé moyen de la vaincre dans les troisième et quatrième degrés, par la considération de la trisection des angles et par le secours des tables trigonométriques, ainsi qu'on le verra dans l'un des chapitres suivans; mais ce moyen qui dépend de la division des angles, n'est applicable, dans les degrés plus élevés, qu'à une classe très-limitée d'équations; et on peut assurer d'avance, que quand même on parviendrait à résoudre généralement le

cinquième degré et les suivans, on n'aurait par là que des formules algébriques, précieuses en elles-mêmes, mais très-peu utiles pour la résolution effective et numérique des équations des mêmes degrés, et qui, par conséquent, ne dispenseraient pas d'avoir recours aux méthodes arithmétiques exposées dans la première section. La résolution générale se réduit donc à la recherche d'une fonction des racines, qui dépende d'une équation d'un degré moindre, et dont les racines donnent facilement celles de la proposée.

51. Soit d'abord l'équation du second degré

$$x^2 + px + q = 0,$$

et nommons x' et x'' ses deux racines ; on a d'abord

$$x' + x'' = -p\ldots\ldots(1):$$

il ne s'agit donc plus que d'avoir la valeur d'une autre fonction des racines, qui, combinée avec la précédente, détermine chacune d'elles au moyen d'équations du premier degré seulement : cette fonction sera donc de la forme

$$Ax' + Bx'',$$

A et B étant des coefficiens indépendans des racines x' et x''. La fonction $Ax' + Bx''$ est susceptible de deux combinaisons dont la seconde s'obtient en changeant dans la première x' en x'', et réciproquement ; elle dépend donc d'une équation du second degré, excepté le cas où

$$A = B;$$

mais alors on retombe sur la somme des racines, qui est déjà connue. Puisqu'on est conduit pour la détermination de la fonction $Ax' + Bx''$ à une équation du second degré, il faut que cette équation puisse se résoudre par une simple extraction de la racine carrée ; mais alors les deux racines deviennent égales et de signes contraires : il faut donc déterminer les coefficiens A et B de manière que la fonction $Ax' + Bx''$, reste la même,

au signe près, en y changeant x' en x'', et réciproquement, condition qui donne

$$Ax' + Bx'' = -(Ax'' + Bx') :$$

cette équation devant avoir lieu, quels que soient les nombres x' et x'', donne, en égalant les coefficiens de x',

$$A = -B ;$$

comparant ensuite ceux de x'', on retrouve la même relation; ensorte que la condition $A = -B$ étant la seule à laquelle il faille satisfaire, on pourra prendre

$$A = 1, \quad \text{d'où} \quad B = -1.$$

La fonction cherchée sera donc $x' - x''$, et la désignant par z, sa valeur dépendra de l'équation

$$[z - (x' - x'')][(z - (x'' - x')] = 0,$$

dont les coefficiens pourront être exprimés d'une manière rationnelle, au moyen de ceux de la proposée, puisque les racines x' et x'' y entrent de la même manière. En effectuant les multiplications, on trouve

$$z^2 = x'^2 + x''^2 - 2x'x''.$$

Or des deux équations

$$x'^2 + px' + q = 0,$$
$$x''^2 + px'' + q = 0,$$

on déduit

$$x'^2 + x''^2 = p^2 - 2q,$$

en observant que $x' + x'' = -p$; on a d'ailleurs

$$x'x'' = q ;$$

donc

$$z^2 = p^2 - 4q ;$$

d'où

$$z = \sqrt{p^2 - 4q} = x' - x'' \ldots\ldots (2).$$

Combinant les égalités (1) et (2) par voie d'addition et de soustraction, on obtient

$$x' = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2},$$

$$x'' = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

52. Nous passerons à l'équation du troisième degré, que, pour plus de simplicité, nous supposerons délivrée de son second terme, ou ramenée à la forme

$$x^3 + px + q = 0.$$

Soient x', x'' et x''' ses trois racines ; on aura d'abord

$$x' + x'' + x''' = 0 \ldots\ldots (1);$$

et il s'agit de déterminer une autre fonction des racines, qui ne dépende que d'une équation du second degré, et qui, combinée avec l'égalité (3), donne facilement les expressions des racines de la proposée. La forme la plus simple que l'on puisse supposer à cette fonction, est celle-ci,

$$Ax' + Bx'' + Cx''',$$

A, B, C étant des coefficiens indépendans de x', x'', x''' : si on y fait tous les échanges possibles des racines x', x'', x''', on aura ces six combinaisons différentes

$$\left.\begin{array}{l} Ax' + Bx'' + Cx''' \\ Ax' + Bx''' + Cx'' \\ Ax'' + Bx' + Cx''' \\ Ax'' + Bx''' + Cx' \\ Ax''' + Bx'' + Cx' \\ Ax''' + Bx' + Cx'' \end{array}\right\} \ldots\ldots (M).$$

Ainsi l'équation d'où dépendra cette fonction, sera du sixième degré ; il faudra donc, pour qu'on ait ramené la question à

des termes plus simples, que cette équation soit résoluble à la manière de celles du second degré; ensorte que les quantités A, B, C devront être déterminées par la condition qu'il existe entre les fonctions (M), la même relation qu'entre les racines de l'équation

$$y^6 + my^3 + n = 0.$$

Pour résoudre celle-ci, on fera

$$y^3 = t,$$

ce qui la transforme dans la suivante,

$$t^2 + mt + n = 0,$$

dont les racines sont

$$t' = -\frac{m}{2} + \sqrt{\frac{m^2}{4} - n},$$

$$t'' = -\frac{m}{2} - \sqrt{\frac{m^2}{4} - n},$$

et on obtiendra les six valeurs de y par la résolution des équations

$$y^3 - t' = 0, \quad y^3 - t'' = 0,$$

qui, sous les hypothèses

$$y = z\sqrt[3]{t'}, \quad y = z\sqrt[3]{t''},$$

deviennent, après avoir divisé la première par t', et la seconde par t'',

$$z^3 - 1 = 0,$$

dont les racines sont

$$z = 1, \quad z = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2} = \alpha, \quad z = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2} = \alpha';$$

ensorte que les six valeurs de y, seront

$$y = \sqrt[3]{t'}, \quad y = \alpha \sqrt[3]{t'}, \quad y = \alpha' \sqrt[3]{t'},$$
$$y = \sqrt[3]{t''}, \quad y = \alpha \sqrt[3]{t''}, \quad y = \alpha' \sqrt[3]{t''},$$

ou, parce que $\alpha' = \alpha^2$,

$$y = \sqrt[3]{t'}, \quad y = \alpha \sqrt[3]{t'}, \quad y = \alpha^2 \sqrt[3]{t'},$$
$$y = \sqrt[3]{t''}, \quad y = \alpha \sqrt[3]{t''}, \quad y = \alpha^2 \sqrt[3]{t''}.$$

Telles sont donc les six racines d'une équation du sixième degré, résoluble à la manière d'une équation du second. Il faut donc que deux des combinaisons (M), étant prises pour $\sqrt[3]{t'}$ et $\sqrt[3]{t''}$, deux des autres soient $\alpha \sqrt[3]{t'}$ et $\alpha^2 \sqrt[3]{t'}$, et que les deux qui restent, soient $\alpha \sqrt[3]{t''}$ et $\alpha^2 \sqrt[3]{t''}$. Soit

$$Ax' + Bx'' + Cx''' = \sqrt[3]{t'} \ldots\ldots (2),$$

la combinaison $Ax' + Bx''' + Cx''$ ne peut devenir $\alpha \sqrt[3]{t'}$, ou $\alpha^2 \sqrt[3]{t'}$, parce qu'en comparant les coefficiens des mêmes racines dans les égalités

$$Ax' + Bx''' + Cx'' = \alpha Ax' + \alpha Bx'' + \alpha Cx''',$$
$$Ax' + Bx''' + Cx'' = \alpha^2 Ax' + \alpha^2 Bx'' + \alpha^2 Cx''',$$

on aurait

$$A = \alpha A, \quad \text{d'où} \quad \alpha = 1,$$
$$A = \alpha^2 A, \quad \text{d'où} \quad \alpha^2 = 1,$$

résultats qui ne peuvent avoir lieu. La combinaison $Ax'' + Bx' + Cx'''$ ne peut devenir $\alpha \sqrt[3]{t'}$ ou $\alpha^2 \sqrt[3]{t'}$, parce que, dans le premier cas, on aurait $\alpha = 1$, et, dans le second, $\alpha^2 = 1$. On ne peut donc faire que les deux hypothèses suivantes,

$$Ax'' + Bx''' + Cx' = \alpha Ax' + \alpha Bx'' + \alpha Cx''' = \alpha \sqrt[3]{t'} \ldots (3),$$

$$Ax''' + Bx' + Cx'' = \alpha^2 Ax' + \alpha^2 Bx'' + \alpha^2 Cx''' = \alpha^2 \sqrt[3]{t'}, \ldots (4);$$

puis écrivant

$$Ax' + Bx''' + Cx'' = \sqrt[3]{t''} \ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

on supposera

$$Ax''' + Bx'' + Cx' = \alpha Ax' + \alpha Bx''' + \alpha Cx'' = \alpha \sqrt[3]{t''} \ldots (6),$$

$$Ax'' + Bx' + Cx''' = \alpha^2 Ax' + \alpha^2 Bx''' + \alpha^2 Cx'' = \alpha^2 \sqrt[3]{t''} \ldots (7).$$

Comparant les coefficiens des mêmes lettres dans les équations (3), (4), (6) et (7), on déduira

de (3).... $\alpha A = C$, $\alpha B = A$, $\alpha C = B$,
de (4).... $\alpha^2 A = B$, $\alpha^2 B = C$, $\alpha^2 C = A$,
de (6).... $\alpha A = C$, $\alpha B = A$, $\alpha C = B$,
de (7).... $\alpha^2 A = B$, $\alpha^2 B = C$, $\alpha^2 C = A$.

Les équations des deux dernières lignes étant identiquement les mêmes que celles des deux premières, il suffira d'employer celles-ci : or des six premières équations, les trois suivantes

$$C = \alpha A, \quad B = \alpha^2 A, \quad A = \alpha B \quad \text{ou} \quad A = \alpha^3 A,$$

rendent les trois autres identiques, sans cependant déterminer le coefficient A; on pourra donc, pour simplifier, faire $A = 1$, ensorte que

$$A = 1, \quad B = \alpha^2, \quad C = \alpha.$$

Faisant, pour abréger,

$$\sqrt[3]{t'} \quad \text{ou} \quad r = x' + \alpha^2 x'' + \alpha x''' \ldots (8),$$

$$\sqrt[3]{t''} \quad \text{ou} \quad s = x' + \alpha^2 x''' + \alpha x'' \ldots (9),$$

on aura r, αr, $\alpha^2 r$; s, αs, $\alpha^2 s$ pour les six racines de la transformée résoluble à la manière d'une équation du second degré; nommant y l'inconnue, on trouvera, en observant que $1+\alpha+\alpha^2=0$, et que $\alpha^3=1$,

$$(y-r)(y-\alpha r)(y-\alpha^2 r)=y^3-r^3,$$
$$(y-s)(y-\alpha s)(y-\alpha^2 s)=y^3-s^3,$$

et conséquemment,

$$y^6-(s^3+r^3)\,y^3+r^3s^3=0\ldots\ldots(\mathrm{N}),$$

équation qui satisfait à la condition énoncée. Il ne s'agit plus que de trouver, en coefficiens de la proposée, les valeurs de r^3+s^3 et de r^3s^3, ce qui est possible, parce que ces quantités sont, comme on va le voir, des fonctions invariables des racines x', x'' et x'''.

Si on élève au cube la fonction r, on aura, en observant que $\alpha^3=1$,

$$r^3=x'^3+x''^3+x'''^3+6x'x''x'''+3\alpha\,(x'^2x'''+x''^2x'+x'''^2x'')$$
$$+3\alpha^2(x'^2x''+x''^2x'''+x'''^2x');$$

changeant x''' en x'', et réciproquement, r devient s, d'après (8) et (9) : on aura donc, sans refaire le calcul,

$$s^3=x'^3+x'''^3+x''^3+6x'x'''x''+3\alpha\,(x'^2x''+x''^2x'''+x'''^2x')$$
$$+3\alpha^2(x'^2x'''+x''^2x'+x'''^2x'').$$

Posons, pour abréger,

$$x'^3+x''^3+x'''^3+6x'x''x'''=\mathrm{L},$$
$$x'^2x''+x''^2x'''+x'''^2x'=\mathrm{M},$$
$$x'^2x'''+x''^2x'+x'''^2x''=\mathrm{N},$$

on aura

$$r^3=\mathrm{L}+3\alpha\mathrm{N}+3\alpha^2\mathrm{M},$$
$$s^3=\mathrm{L}+3\alpha\mathrm{M}+3\alpha^2\mathrm{N},$$

donc la fonction

$$r^3+s^3=2\mathrm{L}+3\,(\alpha+\alpha^2)\,(\mathrm{M}+\mathrm{N});$$

mais, comme nous l'avons déjà observé,

$$1+\alpha+\alpha^2=0, \quad \text{donc} \quad \alpha+\alpha^2=-1,$$

et conséquemment

$$r^3+s^3=2L-3(M+N)\ldots\ldots(P).$$

Faisant ensuite le produit de r^3 par s^3, il viendra, toutes réductions faites,

$$r^3s^3=L^2-3L(M+N)+9(M+N)^2-27MN\ldots\ldots(Q).$$

Pour évaluer commodément la fonction symétrique des racines, représentée par L, on partira des trois équations,

$$x'^3+px'+q=0,$$
$$x''^3+px''+q=0,$$
$$x'''^3+px'''+q=0,$$

desquelles on déduit

$$x'^3+x''^3+x'''^3=-3q,$$

à cause de $x'+x''+x'''=0$, et on a d'ailleurs,

$$x'x''x'''=-q,$$

donc

$$L=-9q.$$

Il reste à calculer $M+N$ et MN : à cet effet, en partant de la première des formules (38) qui donne

$$Ta^m.b^n=Sa^m.Sb^n-Sa^{m+n};$$

et faisant $m=2$, $n=1$, puis $a=x'$, $b=x''$, on trouve

$$M+N=x'^2x''+x''^2x'+x''^2x'''+x'''^2x''+x'''^2x'+x'^2x'''$$
$$=Tx'^2x''=Sx'^2Sx'-Sx'^3=3q,$$

parce que $Sx'=0$; ensuite,

$$MN = (x'^2x''+x''^2x'''+x'''^2x')\,(x'^2x'''+x''^2x'+x'''^2x'')$$
$$= x'^4x''x'''+x'^2x''^2x'''^2+x'^3x'''^3$$
$$+ x''^4x'x'''+x'^2x''^2x'''^2+x'^3x''^3$$
$$+ x'''^4x'x''+x'^2x''^2x'''^2+x''^3x'''^3;$$

or,

$$x'^4x''x'''+x''^4x'x'''+x'''^4x'x''=x'x''x'''(x'^3+x''^3+x'''^3)=3q^2,$$
$$x'^2x''^2x'''^2+x'^2x''^2x'''^2+x'^2x''^2x'''^2=3(x'x''x''')^2=3q^2$$
$$x'^3x'''^3+x'^3x''^3+x''^3x'''^3=\frac{(x'^3+x''^3+x'''^3)^2-(x'^6+x''^6+x'''^6)}{2}$$
$$=3q^2+p^3,$$

en observant, par rapport à cette dernière évaluation, que, dans le cas de $n=m$, le deuxième membre de la formule qui exprime $T\alpha^m b^n$ (38), doit être divisé par 2, pour n'exprimer que la collection des termes dissemblables de la forme $\alpha^n\beta^n$: c'est d'ailleurs ce dont on peut s'assurer en effectuant le produit

$$(x'^3+x''^3+x'''^3)\,(x'^3+x''^3+x'''^3)$$
$$=2\,(x'^3x'''^3+x'^3x''^3+x''^3x'''^3)+(x'^6+x''^6+x'''^6).$$

donc

$$MN = p^3 + 9q^2.$$

Faisant ces substitutions dans (P) et (Q), on trouvera

$$r^3 + s^3 = -27q\,,\quad r^3s^3 = -27p^3,$$

de sorte que la réduite (N) deviendra

$$y^6 + 27qy^3 - 27p^3 = 0\,,$$

laquelle, par l'hypothèse,

$$y^3 = t\,,$$

se change dans la suivante,

$$t^2 + 27qt - 27p^3 = 0\,,$$

équation qui donne pour t les deux valeurs

$$t' = 27\left[-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right];$$

$$t'' = 27\left[-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right]:$$

on aura donc

$$r = x' + \alpha^2 x'' + \alpha x''' = \sqrt[3]{t'},$$

$$s = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' = \sqrt[3]{t''}.$$

Or les radicaux $\sqrt[3]{t'}$, $\sqrt[3]{t''}$ sont susceptibles chacun de trois valeurs, savoir :

$$\sqrt[3]{t'},\quad \alpha\sqrt[3]{t'},\quad \alpha^2\sqrt[3]{t'};\quad \sqrt[3]{t''},\quad \alpha\sqrt[3]{t''},\quad \alpha^2\sqrt[3]{t''};$$

mais on observera que les racines de la proposée, doivent satisfaire à la condition

$$x'x'' + x'x''' + x''x''' = +p = -\tfrac{1}{3}\sqrt[3]{t'} \times \sqrt[3]{t''},$$

d'après les valeurs précédemment trouvées pour t' et t'' : on pourra donc prendre pour r et s, $\sqrt[3]{t'}$ et $\sqrt[3]{t''}$, ou $\alpha\sqrt[3]{t'}$ et $\alpha^2\sqrt[3]{t''}$; ou bien $\alpha^2\sqrt[3]{t'}$ et $\alpha\sqrt[3]{t''}$, parce qu'on a aussi

$$-3p = \alpha\sqrt[3]{t'} \times \alpha^2\sqrt[3]{t''},$$

$$-3p = \alpha^2\sqrt[3]{t'} \times \alpha\sqrt[3]{t''}:$$

ensorte que, pour évaluer les racines x', x'', x''', on pourra employer indifféremment l'un ou l'autre de ces trois systèmes d'équation :

$$\left.\begin{array}{ll}(1^\circ.)\ldots & x' + x'' + x''' = 0 \\ (2^\circ.)\ldots & x' + \alpha^2 x'' + \alpha x''' = \sqrt[3]{t'} \\ (3^\circ.)\ldots & x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' = \sqrt[3]{t''}\end{array}\right\}\ldots(10),$$

$$\left.\begin{array}{l}x' + x'' + x''' = 0 \\ \alpha x' + x'' + \alpha^2 x''' = \alpha\sqrt[3]{t'} \\ \alpha^2 x' + x'' + \alpha x''' = \alpha^2\sqrt[3]{t''}\end{array}\right\}\ldots(11),$$

$$\left.\begin{array}{l}x' + x'' + x''' = 0 \\ \alpha^2 x' + \alpha x'' + x''' = \alpha^2\sqrt[3]{t'} \\ \alpha x' + \alpha^2 x'' + x''' = \alpha\sqrt[3]{t''}\end{array}\right\}\ldots(12),$$

la première équation de chaque système répétant (1). Cette multiplicité de valeurs des racines x', x'' et x''', tient à ce que $\sqrt[3]{t'}$ et $\sqrt[3]{t''}$ ne contiennent que le cube de p, ensorte que les racines x', x'' et x''' qu'on vient de trouver, résolvent, outre la proposée, les deux autres équations

$$x^3 + \alpha px + q = 0,$$
$$x^3 + \alpha^2 px + q = 0.$$

Employant le premier des trois systèmes, ajoutant les trois équations qu'il contient, et faisant toujours attention que $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$, il viendra

$$x' = \frac{\sqrt[3]{t'} + \sqrt[3]{t''}}{3},$$

multipliant (2°.) par α, et (3°.) par α^2, puis ajoutant, on aura

$$x'' = \frac{\alpha\sqrt[3]{t'} + \alpha^2\sqrt[3]{t''}}{3};$$

multipliant (2°.) par α^2, et (3°.) par α, puis ajoutant, on trouvera

$$x''' = \frac{\alpha^2\sqrt[3]{t'} + \alpha\sqrt[3]{t''}}{3}.$$

Ecrivant dans x', x'' et x''' pour t' et t'' les valeurs obtenues précédemment, et pour α, α^2 leurs valeurs, on aura enfin,

$$x' = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

$$x'' = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

$$x''' = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

53. Soit enfin l'équation générale du quatrième degré, délivrée de son second terme, c'est-à-dire,

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

dont x', x'', x''' et x^{IV} soient les racines. Nous chercherons, comme nous l'avons fait à l'égard des équations des second et troisième degrés, une fonction de ces racines, qui ne dépende que d'une équation d'un degré inférieur au qua-

trième, et dont les valeurs combinées avec l'équation

$$x' + x'' + x''' + x^{\text{iv}} = 0 \ldots\ldots (1),$$

donnent facilement les quatre racines. Nous ferons encore l'hypothèse qui a réussi jusqu'ici, savoir, que cette fonction renferme les racines sous une forme linéaire, ou qu'elle soit

$$Ax' + Bx'' + Cx''' + Dx^{\text{iv}},$$

A, B, C et D étant des coefficiens indépendans de x', x'', x''' et x^{iv}. Cette fonction est susceptible de vingt-quatre combinaisons différentes ; elle dépendra donc d'une équation du vingt-quatrième degré : mais si on suppose

$$A = B,$$

ces vingt-quatre combinaisons se réduiront à douze ; et si, de plus, on fait

$$C = D,$$

les douze se réduiront à six ; ensorte que la fonction

$$A\,(x' + x'') + C\,(x''' + x^{\text{iv}})$$

ne dépendra que d'une équation du sixième degré dont les six racines sont

$$\begin{array}{l}
A\,(x' + x'') + C\,(x''' + x^{\text{iv}}), \\
A\,(x''' + x^{\text{iv}}) + C\,(x' + x''), \\
A\,(x' + x^{\text{iv}}) + C\,(x'' + x'''), \\
A\,(x'' + x''') + C\,(x' + x^{\text{iv}}), \\
A\,(x' + x''') + C\,(x'' + x^{\text{iv}}), \\
A\,(x'' + x^{\text{iv}}) + C\,(x' + x''').
\end{array}$$

Ces fonctions, en y faisant encore

$$A = -C,$$

deviendront égales deux à deux, et de signes contraires ; l'équation dont elles seront les racines, ne renfermera donc

que les puissances paires de l'inconnue ; conséquemment elle pourra se résoudre à la manière des équations du troisième degré. Ces combinaisons seront

$$A\,(x' + x'' - x''' - x^{\text{IV}}),$$
$$A\,(x''' + x^{\text{IV}} - x' - x''),$$
$$A\,(x' + x^{\text{IV}} - x'' - x'''),$$
$$A\,(x'' + x''' - x' - x^{\text{IV}}),$$
$$A\,(x' + x''' - x'' - x^{\text{IV}}),$$
$$A\,(x'' + x^{\text{IV}} - x' - x''').$$

Supposons, pour plus de simplicité, $A = 1$, l'équation cherchée sera donc

$$[z^2-(x'+x''-x'''-x^{\text{IV}})^2]\,[z^2-(x'+x'''-x''-x^{\text{IV}})^2]\,[z^2-(x'+x^{\text{IV}}-x''-x''')^2]=0,$$

et faisant $z^2 = t$,

$$[t-(x'+x''-x'''-x^{\text{IV}})^2]\,[t-(x'+x'''-x''-x^{\text{IV}})^2]\,[t-(x'+x^{\text{IV}}-x''-x''')^2]=0.$$

Il s'agit maintenant d'exprimer les coefficiens de cette réduite au moyen de ceux de la proposée. Or on a

$$(x'+x''-x'''-x^{\text{IV}})^2 = x'^2+x''^2+x'''^2+x^{\text{IV}2}$$
$$-\,2\,(x'x''+x'x'''+x'x^{\text{IV}}+x''x'''+x''x^{\text{IV}}+x'''x^{\text{IV}})$$
$$+\,4x'x'' + 4x'''x^{\text{IV}},$$

et si l'on observe que de

$$(x'+x''+x'''+x^{\text{IV}})\,(x'+x''+x'''+x^{\text{IV}}) = 0,$$

résulte

$$-2\,(x'x''+x'x'''+x'x^{\text{IV}}+x''x'''+x''x^{\text{IV}}+x'''x^{\text{IV}})$$
$$= x'^2 + x''^2 + x'''^2 + x^{\text{IV}2},$$

on conclut (chap. V)

$$(x'+x''-x'''-x^{\text{IV}})^2 = -\,4p + 4\,(x'x''+x'''x^{\text{IV}}).$$

Changeant dans la relation précédente, x'' en x''', et réciproquement, on aura

$$(x'+x'''-x''-x^{\text{IV}})^2=-4p+4(x'x'''+x''x^{\text{IV}});$$

changeant dans celle-ci x''' en x^{IV}, et réciproquement, il viendra

$$(x'+x^{\text{IV}}-x''-x''')^2=-4p+4(x'x^{\text{IV}}+x''x'''):$$

l'équation en t est donc

$$[t+4p-4(x'x''+x'''x^{\text{IV}})][t+4p-4(x'x'''+x''x^{\text{IV}})]$$
$$[t+4p-4(x'x^{\text{IV}}+x''x''')]=0;$$

et supposant

$$t=4u,\quad u+p=y,$$

puis divisant par 4, elle se change dans la suivante,

$$[y-(x'x''+x'''x^{\text{IV}})][y-(x'x'''+x''x^{\text{IV}})]$$
$$[y-(x'x^{\text{IV}}+x''x''')]=0,$$

et faisant les multiplications indiquées,

$$y^3-(x'x''+x'x'''+x'x^{\text{IV}}+x''x'''+x''x^{\text{IV}}+x'''x^{\text{IV}})y^2$$
$$+\left\{\begin{array}{l}(x'x''+x^{\text{IV}}x''')(x'x'''+x''x^{\text{IV}})\\+(x'x''+x^{\text{IV}}x''')(x'x^{\text{IV}}+x''x''')\\+(x'x'''+x''x^{\text{IV}})(x'x^{\text{IV}}+x''x''')\end{array}\right\}y$$
$$-(x'x''+x'''x^{\text{IV}})(x'x'''+x''x^{\text{IV}})(x'x^{\text{IV}}+x''x''')=0.$$

Or,

$$x'x''+x'x'''+x'x^{\text{IV}}+x''x'''+x''x^{\text{IV}}+x'''x^{\text{IV}}=p\ldots.(2),$$

$$(x'x''+x^{\text{IV}}x''')(x'x'''+x''x^{\text{IV}})$$
$$=x'^2x''x'''+x''^2x'x^{\text{IV}}+x'''^2x'x^{\text{IV}}+x^{\text{IV}2}x''x''',$$

$$(x'x''+x^{\text{IV}}x''')(x'x^{\text{IV}}+x''x''')$$
$$=x'^2x''x^{\text{IV}}+x''^2x'x'''+x'''^2x''x^{\text{IV}}+x^{\text{IV}2}x'x''',$$

$$(x'x'''+x''x^{\text{IV}})(x'x^{\text{IV}}+x''x''')$$
$$=x'^2x'''x^{\text{IV}}+x''^2x'''x^{\text{IV}}+x'''^2x'x''+x^{\text{IV}2}x'x''.$$

Ajoutant ces trois résultats, on trouve, en désignant la somme des trois premiers membres par S,

$$S=\begin{cases} x'(x'x''x'''+x'x''x^{\text{iv}}+x'x'''x^{\text{iv}}+x''x'''x^{\text{iv}})-x'x''x'''x^{\text{iv}} \\ +x''(x'x''x'''+x'x''x^{\text{iv}}+x'x'''x^{\text{iv}}+x''x'''x^{\text{iv}})-x'x''x'''x^{\text{iv}} \\ +x'''(x'x''x'''+x'x''x^{\text{iv}}+x'x'''x^{\text{iv}}+x''x'''x^{\text{iv}})-x'x''x'''x^{\text{iv}} \\ +x^{\text{iv}}(x'x''x'''+x'x''x^{\text{iv}}+x'x'''x^{\text{iv}}+x''x'''x^{\text{iv}})-x'x''x'''x^{\text{iv}} \end{cases}$$

$$=-q\,(x'+x''+x'''+x^{\text{iv}})-4r=-4r\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3),$$

à cause de $x'+x''+x'''+x^{\text{iv}}=0$. Passant au dernier terme, on a

$$\begin{aligned}&(x'x''+x'''x^{\text{iv}})\,(x'x'''+x''x^{\text{iv}})\,(x'x^{\text{iv}}+x''x''')\\ =\;&x'^3x''x'''x^{\text{iv}}+x'^2x''^2x'''^2\\ &+x''^3x'x'''x^{\text{iv}}+x'^2x''^2x^{\text{iv}2}\\ &+x'''^3x'x''x^{\text{iv}}+x'^2x'''^2x^{\text{iv}2}\\ &+x^{\text{iv}3}x'x''x'''+x''^2x'''^2x^{\text{iv}2}.\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}&x'^3x''x'''x^{\text{iv}}+x''^3x'x'''x^{\text{iv}}+x'''^3x'x''x^{\text{iv}}+x^{\text{iv}3}x'x''x'''\\ &=(x'^2+x''^2+x'''^2+x^{\text{iv}2})\,x'x''x'''x^{\text{iv}}=-2pr\ldots\ldots(4).\end{aligned}$$

Pour évaluer la fonction

$$x'^2x''^2x'''^2+x'^2x''^2x^{\text{iv}2}+x'^2x'''^2x^{\text{iv}2}+x''^2x'''^2x^{\text{iv}2},$$

on développera

$$\begin{aligned}&(x'x''x'''+x'x''x^{\text{iv}}+x'x'''x^{\text{iv}}+x''x'''x^{\text{iv}})^2\\ &=x'^2x''^2x'''^2+x'^2x''^2x^{\text{iv}2}+x'^2x'''^2x^{\text{iv}2}+x''^2x'''^2x^{\text{iv}2}\\ &+2\,(x'^2x''^2x'''x^{\text{iv}}+x'^2x'''^2x''x^{\text{iv}}+x'^2x^{\text{iv}2}x''x''')\\ &+2\,(x''^2x'''^2x'x^{\text{iv}}+x''^2x^{\text{iv}2}x'x'''+x'''^2x^{\text{iv}2}x'x''),\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}&x'^2x''^2x'''^2+x'^2x''^2x^{\text{iv}2}+x'^2x'''^2x^{\text{iv}2}+x''^2x'''^2x^{\text{iv}2}\\ &=(x'x''x'''+x'x''x^{\text{iv}}+x'x'''x^{\text{iv}}+x''x'''x^{\text{iv}})^2\\ &-2x'x''x'''x^{\text{iv}}(x'x''+x'x'''+x'x^{\text{iv}}+x''x'''+x''x^{\text{iv}}+x'''x^{\text{iv}})\\ &=q^2-2pr\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5).\end{aligned}$$

Substituant ces valeurs (2), (3), (4) et (5) dans l'équation en y, elle deviendra

$$y^3 - py^2 - 4ry + 4pr - q^2 = 0;$$

mettant pour y sa valeur $u+p$, on aura pour résultat

$$u^3 + 2pu^2 + (p^2 - 4r)\,u - q^2 = 0.$$

Soient u', u'', u''' les trois racines de cette équation : on trouvera, en observant que $t = 4u$,

$$(x' + x'' - x''' - x^{\text{iv}})^2 = 4u',$$
$$(x' + x''' - x'' - x^{\text{iv}})^2 = 4u'',$$
$$(x' + x^{\text{iv}} - x'' - x''')^2 = 4u''',$$

d'où

$$x' + x'' - x''' - x^{\text{iv}} = \pm 2\sqrt{u'} \ldots\ldots (19),$$
$$x' + x''' - x'' - x^{\text{iv}} = \pm 2\sqrt{u''} \ldots\ldots (20),$$
$$x' + x^{\text{iv}} - x'' - x''' = \pm 2\sqrt{u'''} \ldots\ldots (21),$$

ces équations combinées avec la condition (1), savoir :

$$x' + x'' + x''' + x^{\text{iv}} = 0$$

donnent, en prenant les radicaux avec le signe $+$,

$$x' = \tfrac{1}{2}[+\sqrt{u'} + \sqrt{u''} + \sqrt{u'''}],$$
$$x'' = \tfrac{1}{2}[+\sqrt{u'} - \sqrt{u''} - \sqrt{u'''}],$$
$$x''' = \tfrac{1}{2}[-\sqrt{u'} + \sqrt{u''} - \sqrt{u'''}],$$
$$x^{\text{iv}} = \tfrac{1}{2}[-\sqrt{u'} - \sqrt{u''} + \sqrt{u'''}].$$

Chacun des radicaux pouvant être pris avec le signe $-$, il en résulte pour x', x'', x''' et x^{iv}, ces quatre valeurs :

$$x' = \tfrac{1}{2}[-\sqrt{u'} - \sqrt{u''} - \sqrt{u'''}],$$
$$x'' = \tfrac{1}{2}[-\sqrt{u'} + \sqrt{u''} + \sqrt{u'''}],$$
$$x''' = \tfrac{1}{2}[+\sqrt{u'} - \sqrt{u''} + \sqrt{u'''}],$$
$$x^{\text{iv}} = \tfrac{1}{2}[+\sqrt{u'} + \sqrt{u''} - \sqrt{u'''}].$$

Mais on a (chap. V)

$$(x'+x''-x'''-x^{\text{IV}})(x'+x'''-x''-x^{\text{IV}})(x'+x^{\text{IV}}-x''-x''')$$
$$=2(x'^3+x''^3+x'''^3+x^{\text{IV}3})$$
$$+2(x'x''x'''+x'x''x^{\text{IV}}+x'x'''x^{\text{IV}}+x''x'''x^{\text{IV}})=-8q,$$

ensorte que le coefficient q étant positif dans la proposée, il faudra prendre un ou trois radicaux négativement : s'il est négatif, on pourra prendre les trois radicaux en plus, ou deux en moins et un en plus. Cette considération réduit donc les huit racines à quatre.

54. M. *Lagrange*, après avoir examiné et comparé les différentes méthodes connues pour la résolution des équations, a trouvé que ces méthodes se réduisent toutes, en dernière analyse, à employer une équation secondaire qu'on appelle *résolvante*, dont la racine est de la forme

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{\text{IV}} + \ldots..$$

en désignant par x', x'', x''', etc. les racines de l'équation proposée, et par α une des racines de l'unité, de même degré que l'équation ; cette racine α étant autre que l'unité. En partant de cette forme générale des racines, cet illustre géomètre a cherché, *à priori*, le degré de l'équation résolvante, et les diviseurs qu'elle peut avoir, et il a fait voir pourquoi cette équation qui est toujours d'un degré plus élevé que la proposée, est susceptible d'abaissement pour les équations des troisième et quatrième degrés, et peut servir à les résoudre.

L'équation proposée étant

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - \ldots\ldots - Tx + V = 0,$$

on sait (Ire sect.), qu'on a

$$A = x'x''x''' + \text{etc.},$$
$$B = x'x'' + x'x''' + \text{etc.} + x''x''' + \text{etc.},$$
$$C = x'x''x''' + \text{etc.}$$

Soit t l'inconnue de l'équation résolvante : on aura

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{\text{IV}} \ldots\ldots + \alpha^{m-1} x^{(m)} :$$

il est d'abord clair que, dans l'équation résolvante, on peut échanger entr'elles, à volonté, les racines x', x'', x''', etc., puisque, jusqu'ici, rien ne les distingue l'une de l'autre ; d'où il suit qu'on aura toutes les différentes valeurs de t, en faisant toutes les permutations possibles entre les racines x', x'', x''', etc., et ces valeurs seront nécessairement toutes les racines de la réduite en t, qu'il s'agit de former.

Or on sait par la théorie des combinaisons, que le nombre des permutations qui peuvent avoir lieu entre m choses, est exprimé par $1.2.3.\ldots.m$; donc l'équation en t sera du degré $1.2.3.\ldots.m$; mais on va reconnaître que cette équation est susceptible d'abaissement par la forme même de ces racines.

Le résultat des permutations des racines x', x'', x''', etc. entr'elles, sera le même que celui des puissances de α entre elles, et la fonction t ne pourra recevoir de valeurs différentes que par ces permutations de x', x'', x''', etc.

Pour faire mieux entendre la chose, supposons qu'il s'agisse d'une équation du troisième degré, pour laquelle la résolvante sera

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''',$$

$\alpha^0 = 1$, α^1, α^2 étant les trois racines cubiques de l'unité, ou les puissances successives de l'une de ces racines, autre que l'unité (chap. IX). Si l'on fait tous les arrangemens possibles des trois lettres x', x'', x''', et qu'on multiplie toujours la première lettre à gauche par α^0, la seconde par α, et la troisième par α^2, on aura ces six racines de l'équation résolvante :

$$\begin{array}{l} x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''', \\ x'' + \alpha x' + \alpha^2 x''', \\ x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'', \\ x''' + \alpha x' + \alpha^2 x'', \\ x'' + \alpha x''' + \alpha^2 x', \\ x''' + \alpha x'' + \alpha^2 x', \end{array}$$

trouvées (50) où on avait

$$r = x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'',$$
$$\alpha r = x'' + \alpha x' + \alpha^2 x''',$$
$$\alpha^2 r = x''' + \alpha x'' + \alpha^2 x',$$
$$s = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''',$$
$$\alpha s = x''' + \alpha x' + \alpha^2 x'';$$
$$\alpha^2 s = x'' + \alpha x''' + \alpha^2 x'.$$

Or pour que la première racine

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x'''$$

devienne

$$\alpha t = x''' + \alpha x' + \alpha^2 x'',$$

il faut dans t changer x' en x''', x'' en x' et x''' en x'', c'est-à-dire, augmenter tous les accens de deux accens, et ne conserver que l'excès du nombre des accens sur trois. Pour que la même racine devienne

$$\alpha^2 t = x'' + \alpha x''' + \alpha^2 x',$$

il faut changer x' en x'', x'' en x''' et x''' en x', ou ajouter un accent, en ne conservant encore que l'excès du nombre des accens sur trois.

Les trois autres racines

$$t = x' + \alpha x''' + \alpha^2 x'',$$
$$\alpha t = x'' + \alpha x' + \alpha^2 x''',$$
$$\alpha^2 t = x''' + \alpha x'' + \alpha^2 x',$$

s'obtiennent en changeant dans les précédentes, x'' en x''', et réciproquement, parce que déjà x' occupe toutes les places possibles dans les trois premières racines.

Donc, en général, αt sera le résultat des permutations simultanées faites dans t de x' en $x^{(m)}$, x'' en x', x''' en x'', x^{iv} en x''', etc., permutations qui se font en augmentant dans t chacun des accens de $m-1$ accens, et retranchant toujours m accens, lorsque leur nombre excède m : de même $\alpha^2 t$ sera

le résultat des permutations simultanées dans t, de x' en $x^{(m-1)}$, x'' en $x^{(m)}$, x''' en x', x^{iv} en x''....., ou de l'addition de $m-2$ accens, en retranchant toujours m accens, lorsque leur nombre excède m, et ainsi de suite, en observant que $\alpha^m = 1$, $\alpha^{m+1} = \alpha$, etc.

Il importe surtout de remarquer que, dans ces racines,

$$\begin{aligned} t &= x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \ldots + \alpha^{m-1} x^{(m)}, \\ \alpha t &= x^{(m)} + \alpha x' + \alpha^2 x'' + \ldots + \alpha^{(m-1)} x^{(m-1)}, \\ \alpha^2 t &= x^{(m-1)} + \alpha x^{(m)} + \alpha^2 x' + \text{ etc.}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

la racine x' occupe déjà toutes les places possibles, et que lorsqu'on est arrivé à $\alpha^{m-1}t$, pour avoir le surplus des racines, il ne faut que faire, dans les précédentes, les permutations des autres racines x'', x''', x^{iv}.....$x^{(m)}$.

En général, les racines étant en nombre m, on aurait m racines de la résolvante, savoir, t, αt, $\alpha^2 t$....$\alpha^{m-1}t$, dans lesquelles il faudrait faire les permutations des $m-1$ autres racines, ce qui donnerait, en total,

$$1.2.3.\ldots.(m-1)\, m,$$

racines de cette résolvante. Donc cette équation en t devra être telle qu'elle ne change pas, en y changeant t en αt, en $\alpha^2 t$, en $\alpha^3 t$, etc.; d'où il est facile de conclure qne cette équation ne pourra contenir que des puissances de t dont les exposans soient multiples de m, en observant qu'à cause de $\alpha^m = 1$, on a aussi

$$\alpha^{2m} = 1, \quad \alpha^{3m} = 1, \quad \text{etc.}$$

Si donc on fait $t^m = \theta$, on aura une équation en θ qui ne sera que du degré $1.2.3\ldots.(m-1)$, et dont les racines seront les différentes valeurs de θ, résultantes des permutations des $m-1$ racines x'', x'''.....$x^{(m)}$ entr'elles.

L'expression de θ sera, à cause de $\alpha^m = 1$, $\alpha^{2m} = 0$, etc., de la forme

$$\theta = \xi^0 + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \alpha^3\xi''' + \ldots + \alpha^{m-1}\xi^{(m-1)},$$

dans laquelle ξ°, ξ', ξ'', etc. seront des fonctions déterminées de x', x'', x''', etc., lesquelles auront, en général, la propriété d'être invariables par les permutations simultanées qui font passer de t à αt, à $\alpha^2 t$, etc., puisque θ est également t^m, $(\alpha t)^m$, $(\alpha^2 t)^m$, etc.

Lorsque les quantités ξ°, ξ', ξ'', etc. seront connues, on aura tout de suite les valeurs de toutes les racines x', x'', x''', etc. de la proposée ; car puisque $\theta = t^m$, on aura

$$t = \sqrt[m]{\theta},$$

et si on dénote par 1, α, β, γ, etc. les racines de l'équation $y^m - 1 = 0$, et qu'on dénote aussi par θ°, θ', θ'', etc., les valeurs de θ qui répondent aussi à la substitution successive de 1, α, β, γ, etc., à la place de α dans l'expression de θ ci-dessus, on aura, à cause de

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \ldots\ldots + \alpha^{m-1} x^{(m)},$$

où on substituera aussi pour α les mêmes valeurs, les équations suivantes,

$$x' + x'' + x''' + \ldots\ldots + x^{(m)} = \sqrt[m]{\theta^{\circ}},$$
$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \ldots\ldots + \alpha^{m-1} x^{(m)} = \sqrt[m]{\theta'},$$
$$x' + \beta x'' + \beta^2 x''' + \ldots\ldots + \beta^{m-1} x^{(m)} = \sqrt[m]{\theta''},$$

etc. :

ces équations étant toutes ajoutées, donneront, d'après les propriétés des racines 1, α, β, γ, etc. (47),

$$x' = \frac{\sqrt[m]{\theta^{\circ}} + \sqrt[m]{\theta'} + \sqrt[m]{\theta''} + \ldots\ldots + \sqrt[m]{\theta^{(m-1)}}}{m};$$

ensuite, si on les multiplie respectivement par 1, α^{m-1}, β^{m-1}, γ^{m-1}, etc., et qu'on les ajoute de nouveau ensemble, on aura

par les mêmes propriétés,

$$x'' = \frac{\sqrt[m]{\theta^0} + \alpha^{m-1}\sqrt[m]{\theta'} + \beta^{m-1}\sqrt[m]{\theta''} + \gamma^{m-1}\sqrt[m]{\theta'''} + \text{etc.}}{m};$$

on trouverait de la même manière,

$$x''' = \frac{\sqrt[m]{\theta^0} + \alpha^{m-2}\sqrt[m]{\theta'} + \beta^{m-2}\sqrt[m]{\theta''} + \gamma^{m-2}\sqrt[m]{\theta'''} + \text{etc.}}{m}$$

et ainsi de suite.

Nous remarquerons que

$$\sqrt[m]{\theta^0} = x' + x'' + x''' + \ldots + x^{(m)} = A;$$

donc, comme en faisant $\alpha = 1$ dans θ, on a

$$\theta^0 = A^m = \xi^0 + \xi' + \xi'' + \text{etc.},$$

et par conséquent,

$$\xi^0 = A^m - \xi' - \xi'' - \xi''' - \text{etc.},$$

on trouvera

$$\theta = A^m + (\alpha - 1)\,\xi' + (\alpha^2 - 1)\,\xi'' + (\alpha^3 - 1)\,\xi''' + \text{etc.} \ldots (1),$$

et l'on obtiendra encore les valeurs de θ', θ'', θ''', etc., en mettant pour α, les racines α, β, γ, etc. de l'équation

$$y^{m-1} + y^{m-2} + y^{m-3} + \ldots + 1 = 0.$$

La difficulté se réduit donc à trouver les valeurs de ξ', ξ'', ξ''', etc. qui entrent dans l'expression de θ; mais, dans cette recherche, il convient de distinguer le cas où m est un nombre premier, de ceux où m est un nombre composé.

Supposons d'abord que m soit un nombre premier. On a prouvé (47) que si, dans la série des puissances α, α^2, $\alpha^3 \ldots \alpha^{m-1}$, on substitue à α une quelconque de ces mêmes puissances, on retrouvera toujours la même série de puissances, seulement

dans un ordre différent. Or il est visible que, dans la fonction t, le changement de α en α^2, répond aux permutations simultanées de x'' en x''', x''' en x^{v}, etc.; que le changement de α en α^3 répondra aux permutations simultanées de x'' en x^{iv}, de x''' en x^{vii}, etc. et ainsi de suite. Donc les changemens successifs de α en α^2, $\alpha^3 \ldots \alpha^{m-1}$ répondront à autant de permutations où x'' prendra la place de x''', $x^{iv} \ldots x^{(m)}$, ce qui fait $m-1$ permutations dont chacune pourra ensuite être combinée avec toutes les permutations possibles entre les autres $m-2$ racines x''', $x^{iv} \ldots x^{(m)}$. On ne considère pas ici la substitution 1 pour α, parce que, dans la valeur de θ ci-dessus, α ne représente plus que les racines de l'équation

$$y^{m-1} + y^{m-2} + \ldots\ldots + 1 = 0.$$

Si ensuite on tenait compte des permutations de x', on retrouverait les $1.2.3\ldots\ldots(m-1)\,m$ valeurs de t. Mais ici comme on fait abstraction de $\alpha = 1$, il faut aussi ne pas considérer x'.

Examinons la fonction θ: comme dans cette fonction, les changemens de α en α^2, α^3, etc., répondent à des permutations de ξ' en ξ'' en ξ''', etc. correspondantes à celles de x'' en x''', en x^{iv}, etc. dans la fonction t, il est facile d'en conclure que ces quantités ξ', ξ'', ξ''', etc. seront les $m-1$ racines d'une équation en ξ du degré $m-1$, dont les coefficiens, fonctions de ξ', ξ'', ξ''', etc., seront conséquemment des fonctions de x', x'', x''', etc., qui ne seront plus susceptibles que d'autant de valeurs différentes qu'il y aura de permutations entre les $m-2$ racines x''', $x^{iv} \ldots x^{(m)}$, c'est-à-dire de $1.2.3\ldots\ldots(m-2)$ valeurs, et dépendront par conséquent d'équations du degré $1.2.3\ldots(m-2)$; ensorte que l'équation qui donnera ξ', ξ'', etc. étant

$$\xi^{m-1} - M\xi^{m-2} + N\xi^{m-3} - \text{etc.}\ldots = 0\ldots\ldots(2),$$

chacun des coefficiens M, N, etc., aura $1.2\ldots(m-2)$ valeurs M′, M″, M‴, etc., autant de valeurs N′, N″, N‴, etc.,

et on pourra regarder M′, M″, etc., N′, N″, etc. comme les racines d'équations en M, en N, etc., chacune du degré $1.2\ldots.(m-2)$, dont les coefficiens seront des fonctions invariables de M′, M″, etc., de N′, N″, etc., lesquelles seront nécessairement de pareilles fonctions des racines de la proposée en x, et conséquemment déterminables au moyen des coefficiens de cette proposée. Ainsi ξ admet $1.2\ldots(m-2)(m-1)$ valeurs, et t en prend $1.2\ldots.(m-2)(m-1)m$.

Mais si, dans les coefficiens M, N, etc. de l'équation ci-dessus en ξ, on fait dans les fonctions M, N, etc. les $1.2\ldots.(m-2)$ permutations entre les racines x''', x^{iv}, etc., on aura autant de pareilles équations qui, multipliées l'une par l'autre, donneront une équation finale en ξ du degré $1.2\ldots.(m-1)$, dans laquelle les coefficiens seront des fonctions invariables des racines x', x'', etc., et par conséquent déterminables en coefficiens A, B, C, etc. de la proposée. L'équation

$$\xi^{m-1} - M\xi^{m-2} + \text{etc.} = 0$$

sera donc un diviseur de celle-ci : faisant la division à la manière ordinaire, et égalant à zéro les $m-1$ termes du reste, on aura autant d'équations dont les premières $m-2$ donneront les valeurs de N, P, etc. en fonctions rationnelles de M. Ainsi il suffira de trouver l'équation en M du degré $1.2.3\ldots.(m-2)$, et d'en connaître une racine, pour avoir les quantités ξ', $\xi''\ldots.$ qui entrent dans l'expression de θ.

Mais il paraît plus simple de chercher directement les valeurs θ', θ'', θ''', etc. qui seront les racines d'une équation en θ du degré $m-1$, savoir, de

$$\theta^{m-1} - T\theta^{m-2} + U\theta^{m-3} - \text{etc.} = 0\ldots.(3),$$

et on n'aura pour chacun de ces coefficiens T, U, V, etc., que $1.2\ldots..(m-2)$ valeurs provenant des permutations entre les $m-2$ racines x'', x''', etc. Ainsi, pour la détermination de T, on sera conduit à une équation de ce degré qu'on pourra former par le moyen de ces racines, puis on trouvera

les valeurs des autres coefficiens U, V, etc. en fonctions rationnelles de T, comme nous l'avons dit plus haut relativement aux coefficiens de l'équation en ξ. Ainsi l'équation du cinquième degré dépendra de la résolution d'une équation du sixième.

Passons au cas de $m = np$, n étant un nombre premier : nous avons vu (chap. IX) que toutes les racines de l'équation $y^n - 1$, sont communes à l'équation $y^m - 1 = 0$. Ainsi dans la fonction

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \ldots\ldots + \alpha^{m-1} x^{(m)},$$

nous prendrons pour α une des racines de l'équation $y^n - 1 = 0$; on aura alors $\alpha^n = 1$, $\alpha^{n+1} = \alpha$, $\alpha^{n+2} = \alpha^2$, etc. ; $\alpha^{2n} = 1$, $\alpha^{2n+1} = \alpha$, $\alpha^{2n+2} = \alpha^2$.... jusqu'à $\alpha^m = 1$; et, d'après ces réductions, l'expression de t se réduira à cette forme plus simple,

$$t = X' + \alpha X'' + \alpha^2 X''' + \ldots\ldots \alpha^{n-1} X^{(n)} \ldots\ldots (4),$$

en faisant, pour abréger,

$$X' = x' + x^{(n+1)} + x^{(2n+1)} + \ldots + x^{(m-n+1)},$$
$$X'' = x'' + x^{(n+2)} + x^{(2n+2)} + \ldots + x^{(m-n+2)},$$
$$X''' = x''' + x^{(n+3)} + x^{(2n+3)} + \ldots + x^{(m-n+3)},$$
etc.
$$X^{(n)} = x^{(n)} + x^{(2n)} + x^{(3n)} + \ldots + x^{(m)}.$$

Faisant $t^n = \theta$, on aura, à cause de $\alpha^n = 1$,

$$\theta = \xi^0 + \alpha \xi' + \alpha^2 \xi'' + \ldots\ldots + \alpha^{n-1} \xi^{(n-1)} \ldots\ldots (5),$$

dans laquelle les quantités ξ^0, ξ', ξ'', etc. seront des fonctions connues de X', X''....., lesquelles auront la propriété d'être invariables par les échanges simultanées de X' en X'', X'' en X'''......$X^{(n)}$ en X (*).

(*) En effet, pour le sixième degré, $m = 3 \times 2$, et on a, à cause

Connaissant ξ^0, ξ', ξ'', etc., on aura, comme on l'a vu ci-dessus,

$$\left.\begin{aligned} X' &= \frac{\sqrt[n]{\theta^0}+\sqrt[n]{\theta'}+\sqrt[n]{\theta''}+\text{etc.}}{n} \\ X'' &= \frac{\sqrt[n]{\theta^0}+\alpha^{n-1}\sqrt[n]{\theta'}+\beta^{n-1}\sqrt[n]{\theta''}+\text{etc.}}{n} \\ X''' &= \frac{\sqrt[n]{\theta^0}+\alpha^{n-2}\sqrt[n]{\theta'}+\beta^{n-2}\sqrt[n]{\theta''}+\text{etc.}}{n} \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots(6),$$

α, β, γ, etc. étant avec l'unité, les racines de l'équation

$$y^n - 1 = 0,$$

et on a toujours

$$\sqrt[n]{\theta^0} = X'+X''\ldots+X^{(n)} = x'+x''+x'''\ldots+x^{(m)} = A \ldots(7).$$

Mais on ne connaît par là que les quantités X', X'', X''', etc.; pour achever la résolution de l'équation proposée en x, il faut encore tirer les valeurs de ses racines x', x'', x''', etc. de celles de X', X'', X''', etc. A cet effet, on regardera les p

---

de $m = 6$,

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x^{IV} + \alpha^4 x^{V} + \alpha^5 x^{VI};$$

mais $\alpha^3 = 1$, $\alpha^4 = \alpha$, $\alpha^6 = \alpha^2$, en observant que $n = 3$; donc

$$t = x' + x^{IV} + \alpha(x'' + x^{V}) + \alpha^2(x''' + x^{VI});$$

conséquemment,

$$X' = x' + x^{IV},$$
$$X'' = x'' + x^{V},$$
$$X''' = x''' + x^{VI};$$

d'où résultent

$$t = X' + \alpha X'' + \alpha^2 X''',$$
$$\alpha t = X''' + \alpha X' + \alpha^2 X'',$$
$$\alpha^2 t = X'' + \alpha X''' + \alpha^2 X';$$

donc t^3, $(\alpha t)^3$, $(\alpha^2 t)^3$ ne différeront que par les échanges simultanées de X' en X'', X'' en X'''.

racines x', $x^{(n+1)}$, $x^{(2n+1)}$ qui composent la valeur de X', comme étant les racines d'une équation du $p^{ième}$ degré, et qui sera de cette forme,

$$x^p - X'x^{p-1} + \lambda x^{p-2} - \mu x^{p-3} + \nu x^{p-4} - \text{etc.} = 0,$$

dans laquelle les coefficiens λ, μ, ν, etc. seront inconnus; mais comme cette équation est censée renfermer p des m racines de la proposée

$$x^m - Ax^{m-1} + Bx^{m-2} - Cx^{m-3} + \text{etc.} = 0,$$

où $m = np$, elle devra être un diviseur de celle-ci; par conséquent, il n'y aura qu'à faire la division ordinaire, en supposant nuls les termes affectés de x^{p-1}, x^{p-2}, etc. dans le reste. On aura, par ce moyen, p équations en X', λ, μ, etc. dont les $p - 1$ premières donneront les valeurs de λ, μ, etc. en X' par des équations linéaires. Ainsi X' étant connu, on aura λ, μ, etc., et il ne s'agira plus que de résoudre cette équation du degré p. De même, en substituant X'' à la place de X', on aura l'équation qui donnera x'', $x^{(n+2)}$, etc., et ainsi de suite.

On voit par là que cette méthode revient à décomposer l'équation du degré $m = np$, en n équations, chacune du degré p.

Cherchons maintenant le degré de l'équation d'où dépendront les coefficiens de l'équation en ξ dont ξ', ξ'', etc. sont les racines.

Les quantités ξ', ξ'', etc. seront, comme on l'a vu plus haut, les racines d'une équation en ξ du degré $n - 1$, dont les coefficiens dépendront encore d'une équation du degré $1.2\ldots(n-2)$, parce que ces coefficiens, que nous désignerons encore par M, N, etc., seront des fonctions de X', X'', X''', etc. susceptibles d'autant de valeurs différentes M', M'', etc., N', N'', etc., qu'il y aura de permutations entre les $n - 2$ quantités X''', $X^{\text{IV}}\ldots X^{(n)}$; donc ces équations en M, N, etc., chacune du degré $1.2\ldots(n-2)$, auront pour coefficiens des fonctions invariables de ceux de l'équation en X dont X', X'', etc. seraient les racines : or ces coefficiens de l'équation en X, ne sont

pas connus ; il n'y a que ceux de l'équation donnée qui le soient : il s'agit donc de voir comment ceux-là pourront dépendre de ceux-ci.

Imaginons qu'on ait substitué pour X', X'', etc., leurs valeurs en x', x'', x''', etc. : les coefficiens dont il s'agit deviendront des fonctions connues de ces racines, et pour trouver les équations d'où ces fonctions dépendent, la difficulté se réduira à chercher de combien de valeurs différentes ces fonctions seront susceptibles, par toutes les permutations possibles entre x', x'', $x''' \ldots . x^{(m)}$.

Le nombre total des permutations entre ces m racines, est $1.2 \ldots . m$; mais s'il y a de ces permutations qui ne produisent aucun changement dans les fonctions dont il s'agit, il faudra diviser le nombre total des permutations par celui de ces permutations, parce que ces nombres de permutations ne s'ajoutent pas, mais se multiplient.

Or les racines x', $x^{(n+1)} \ldots . x^{(m-n+1)}$ dont la somme est X', et qui sont au nombre de p, à cause de $m = np$, sont susceptibles de $1.2 \ldots . p$ permutations ; mais comme ces racines entrent dans X' sous une forme invariable, leurs permutations ne produisent aucun changement dans la valeur de X' : on aura donc d'abord le diviseur $1.2 \ldots . p$.

L'expression de X'' étant dans le même cas, donnera de nouveau le diviseur $1.2 \ldots . p$: donc les deux fonctions X', X'' donneront le diviseur $(1.2 \ldots \ldots p)^2$. Les n fonctions X', $X'' \ldots \ldots X^{(n)}$ donneront, par conséquent, le diviseur $(1.2.3 \ldots . p)^n$.

Comme les coefficiens de l'équation en X, sont des fonctions invariables des n racines X', $X'' \ldots . X^{(n)}$, qui sont susceptibles en elles-mêmes de $1.2 \ldots . n$ permutations, lesquelles répondent à d'autres permutations de x', x'', etc., on aura encore le diviseur $1.2 \ldots . n$.

D'où l'on peut conclure que les coefficiens de cette équation en X, regardés comme des fonctions des m racines $x' \ldots x^{(m)}$,

ne seront susceptibles que de $\frac{1.2.3\ldots m}{1.2.3.4\ldots n(1.2.3\ldots p)^n}$ valeurs différentes, et ne dépendront que d'une équation de ce degré.

Ainsi, les coefficiens M, N, etc. de l'équation du degré $1.2.3\ldots(n-2)$, qui sont des fonctions rationnelles de ceux de l'équation en X, dépendront d'une équation de ce degré.

En donnant, comme ci-dessus, à ces coefficiens M, N, etc., toutes les valeurs qui répondent aux racines de cette dernière équation, et multipliant l'une par l'autre toutes les équations résultantes, on aura enfin une équation du degré

$$\frac{1.2.3\ldots m}{1.2\ldots n(1.2.3\ldots p)^n}\times 1.2.3\ldots(n-2)$$
$$=\frac{1.2.3\ldots m}{(n-1)n(1.2.3\ldots p)^n}:$$

ce sera l'équation d'où dépendront les coefficiens de l'équation en ξ du degré $n-1$, dont les racines seront ξ', ξ'', etc. C'est donc à la résolution d'une équation de ce degré que se réduira, en dernière analyse, celle de la proposée.

Soient $m=4$, $n=2$, $p=2$; on aura

$$\frac{1.2.3.4}{2(2)^2}=3.$$

Pour $m=6$, $n=2$, $p=3$, on aura

$$\frac{1.2.3.4.5.6}{2(1.2.3)^2}=10;$$

et si on fait $n=3$, $p=2$, on aura

$$\frac{1.2.3.4.5.6}{2.3.(1.2)^3}=15,$$

et ainsi des autres.

55. Passons aux applications qui éclairciront ce qui précède.

Pour l'équation du second degré

$$x^2 - Ax + B = 0,$$

on a $m = 2$, nombre premier. Prenant pour α une racine de l'équation

$$y^2 - 1 = 0,$$

on posera

$$t = x' + \alpha x'',$$

d'où

$$\theta = t^2 = x'^2 + x''^2 + 2\alpha x'x'',$$

à cause de $\alpha^2 = 1$: donc

$$\xi' = 2x'x'' = 2B :$$

or l'équation $y^2 - 1 = 0$ donne

$$y = 1, \quad y = -1.$$

Pour $\alpha = 1$, la valeur de θ devient

$$\theta^0 = x'^2 + x''^2 + 2x'x'' = (x' + x'')^2 = A^2 :$$

pour $\alpha = -1$, la formule

$$\theta = A^m + (\alpha - 1)\xi' + \text{etc.}$$

donne

$$\theta' = A^2 - 2\xi' = A^2 - 4B.$$

Ainsi les deux racines

$$x' = \frac{\sqrt[m]{\theta^0} + \sqrt[m]{\theta'} + \text{etc.}}{m} = \frac{A + \sqrt{A^2 - 4B}}{2},$$

$$x'' = \frac{\sqrt[m]{\theta^0} + \alpha^{m-1}\sqrt[m]{\theta'} + \text{etc.}}{m} = \frac{A - \sqrt{A^2 - 4B}}{2}.$$

Soit maintenant l'équation générale du troisième degré

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0,$$

ayant pour racine x', x'', x''' : on a ici $m=3$, nombre premier : la fonction t sera donc, en prenant pour α une racine de l'équation $y^3-1=0$,

$$t=x'+\alpha x''+\alpha^2x''',$$

et la fonction $\theta=t^3$ sera, à cause de $\alpha^3=1$,

$$\theta=\xi^0+\alpha\xi'+\alpha^2\xi'',$$

où l'on aura

$$\begin{aligned}\xi^0&=x'^3+x''^3+x'''^3+6x'x''x''',\\ \xi'&=3(x'^2x''+x''^2x'''+x''^2x'),\\ \xi''&=3(x'^2x'''+x''^2x'+x'''^2x'').\end{aligned}$$

Les quantités ξ', ξ'' sont les racines d'une équation du degré $m-1=2$, dont les coefficiens dépendent d'une équation du degré $1.2\ldots(m-2)=1$, et sont par conséquent des fonctions invariables de A, B, C. On aura donc l'équation

$$\xi^2-M\xi+N=0,$$

où $M=\xi'+\xi''$, $N=\xi'\xi''$ sont des fonctions invariables de x', x'', x'''.

En effet, on trouve (chap. VII),

$$\begin{aligned}M&=3AB-9C,\\ N&=9B^3+(A^3-6AB)C+81C^2:\end{aligned}$$

résolvant donc l'équation du second degré ci-dessus, après avoir remplacé M et N par leurs valeurs en A, B, C, on aura les deux racines ξ', ξ'' qu'on portera dans la formule (1), puis faisant $m=3$, et substituant pour α les deux racines de l'équation

$$y^2+y+1=0,$$

on aura ainsi les valeurs de θ' et θ'', et conséquemment

$$\left.\begin{aligned} x' &= \frac{A + \sqrt[3]{\theta'} + \sqrt[3]{\theta''}}{3} \\ x'' &= \frac{A + \alpha^2\sqrt[3]{\theta'} + \mathsf{C}\sqrt[3]{\theta''}}{3} \\ x''' &= \frac{A + \alpha\sqrt[3]{\theta'} + \mathsf{C}\sqrt[3]{\theta''}}{3} \end{aligned}\right\} \text{ ou } \left\{\begin{aligned} x' &= \frac{A + \sqrt[3]{\theta'} + \sqrt[3]{\theta''}}{3} \\ x'' &= \frac{A + \mathsf{C}\sqrt[3]{\theta'} + \alpha\sqrt[3]{\theta''}}{3} \\ x''' &= \frac{A + \alpha\sqrt[3]{\theta'} + \mathsf{C}\sqrt[3]{\theta''}}{3} \end{aligned}\right.$$

à cause de $\mathsf{C} = \alpha^2$, d'où $\mathsf{C}^2 = \alpha$; les deux quantités α et C étant les racines de l'équation

$$y^2 + y + 1 = 0,$$

laquelle donne

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad \mathsf{C} = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}.$$

Mais on peut avoir des expressions plus simples des racines x', x'', x''' par le moyen de l'équation (3) en θ, savoir,

$$\theta^2 - T\theta + U = 0,$$

où $T = \theta' + \theta''$, $U = \theta'\theta''$. Or de la formule $\theta = \xi^\circ + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \text{etc.}$, on déduit

$$\begin{aligned} \theta^\circ &= \xi^\circ + \xi' + \xi'' = A^3, \\ \theta' &= \xi^\circ + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'', \\ \theta'' &= \xi^\circ + \mathsf{C}\xi' + \mathsf{C}^2\xi'', \end{aligned}$$

et de là

$$\theta^\circ + \theta' + \theta'' = 3\xi^\circ,$$

d'où

$$T = \theta' + \theta'' = 3\xi^\circ - \theta^\circ = 3\xi^\circ - A^3;$$

mais d'ailleurs,

$$\xi^\circ = A^3 - \xi' - \xi'' = A^3 - M;$$

donc

$$T = 2A^3 - 3M:$$

en multipliant θ' par θ'', et tenant compte de $\xi'\xi'' = \text{N}$, on trouve

$$\begin{aligned} \text{U} = \theta'\theta'' &= \xi^{\circ 2} - \xi^{\circ}(\xi' + \xi'') - \xi'\xi'' + \xi'^2 + \xi''^2 \\ &= (\text{A}^3 - \text{M})^2 - (\text{A}^3 - \text{M})\,\text{M} - \text{N} + \text{M}^2 - 2\text{N} \\ &= \text{A}^6 - 3\text{MA}^3 + 3\,(\text{M}^2 - \text{N})\,; \end{aligned}$$

donc par la substitution pour M et N des valeurs en A, B, C trouvées ci-dessus, on a

$$\begin{aligned} \text{T} &= 2\text{A}^3 - 9\text{AB} + 27\text{C}, \\ \text{U} &= \text{A}^6 - 9\text{A}^4\text{B} + 27\text{A}^2\text{B}^2 - 27\text{B}^3 = (\text{A}^2 - 3\text{B})^3, \end{aligned}$$

les deux racines de l'équation en θ, étant prises pour θ' et θ'', et substituées dans les expressions précédentes de x', x'', x''', on aura la résolution la plus simple de l'équation du troisième degré.

Venons à l'équation du quatrième degré, représentée par

$$x^4 - \text{A}x^3 + \text{B}x^2 - \text{C}x + \text{D} = 0\,;$$

comme on a ici $m = 4 = 2.2$, on fera $n = 2$, et on prendra pour α une racine de l'équation $y^2 - 1 = 0$, ensorte que $\alpha^2 = 1$. On fera ainsi, d'après la formule (4),

$$t = \text{X}' + \alpha\text{X}'', \quad \text{X}' = x' + x''', \quad \text{X}'' = x'' + x^{\text{IV}};$$

de là on aura, en vertu de la formule (5),

$$\theta = t^2 = \xi^{\circ} + \alpha\xi' \quad \text{et} \quad \xi^{\circ} = \text{X}'^2 + \text{X}''^2, \quad \xi' = 2\text{X}'\text{X}''.$$

Ainsi l'équation en ξ dont ξ' est racine, ne sera que du degré $n - 1 = 2 - 1 = 1$, et ses coefficiens ne dépendront que d'une équation du degré $\frac{1.2.3.4}{2.(2)^2} = 3$. De sorte que l'on aura en ξ' une équation du troisième degré, telle que

$$\xi'^3 - \text{M}\xi'^2 + \text{N}\xi' - \text{P} = 0.$$

Les racines de cette équation seront dues aux permutations

de x', x'', x''', x^{iv} qui donneront des valeurs différentes de

$$\xi' = 2X'X'' = (x' + x''')(x'' + x^{\text{iv}}).$$

Or il est facile de voir que ces valeurs différentes ne seront que les trois suivantes :

$$2\,(x' + x''')\,(x'' + x^{\text{iv}}),$$
$$2\,(x' + x'')\,(x''' + x^{\text{iv}}),$$
$$2\,(x' + x^{\text{iv}})\,(x'' + x''');$$

qu'on obtient en changeant x''' en x'' et en x^{iv}, puisque les facteurs $x' + x'''$, $x'' + x^{\text{iv}}$ sont invariables par les changemens de x' en x''' et de x'' en x^{iv}, et qu'il faut rejeter les permutations qui changeraient l'un de ces facteurs dans l'autre. D'après ces racines, on pourra former les coefficiens M et N et P qui se trouveront exprimés par des fonctions invariables de x', x'', x''', x^{iv}, et conséquemment déterminables en A, B, C, D.

Pour faciliter cette recherche, nous remarquerons que par l'équation proposée, on a

$$\begin{aligned} B &= x'x'' + x'x''' + x'x^{\text{iv}} + x''x''' + x''x^{\text{iv}} + x'''x^{\text{iv}} \\ &= (x' + x''')\,(x'' + x^{\text{iv}}) + x'x''' + x''x^{\text{iv}}, \\ &= (x' + x'')\,(x''' + x^{\text{iv}}) + x'x'' + x'''x^{\text{iv}}, \\ &= (x' + x^{\text{iv}})\,(x'' + x''') + x'x^{\text{iv}} + x''x'''; \end{aligned}$$

d'où il suit que si on désigne par u l'inconnue d'une équation qui aurait pour racines ces trois quantités,

$$x'x''' + x''x^{\text{iv}}, \quad x'x'' + x'''x^{\text{iv}}, \quad x'x^{\text{iv}} + x''x'''.$$

on aura

$$\xi' = 2B - 2u.$$

L'équation en ξ' se transformera donc en

$$u^3 - Ru^2 + Su - T = 0,$$

et on aura

$$R = x'x''' + x''x^{\text{iv}} + x'x'' + x'''x^{\text{iv}} + x'x^{\text{iv}} + x''x''' = B.$$

Nous avons trouvé (53) pour la somme des produits deux à deux des trois racines u, que nous avons désignée par S,

$$S=(x'+x''+x'''+x^{IV})(x'x''x'''+x'x''x^{IV}+x'x'''x^{IV}+x''x'''x^{IV})$$
$$-4x'x''x'''x^{IV}$$
$$=AC-4D:$$

la somme des produits des trois mêmes racines, est (*idem*)

$$T=(x'^2+x''^2+x'''^2+x^{IV2})\,x'x''x'''x^{IV}$$
$$+(x'x''x'''+x'x''x^{IV}+x'x'''x^{IV}+x''x'''x^{IV})^2$$
$$-2x'x''x'''x^{IV}(x'x''+x'x'''+x'x^{IV}+x''x'''+x''x^{IV}+x'''x^{IV})$$
$$=D\,(x'^2+x''^2+x'''^2+x^{IV})^2-2DB+C^2$$
$$=D\,(A^2-2B)-2DB+C^2=D\,(A^2-4B)+C^2;$$

ensorte que l'équation en u devient

$$u^3-Bu^2+(AC-4D)\,u-(A^2-4B)\,D-C^2=0.$$

Soit u' une des racines, on aura

$$\xi'=2B-2u';$$

mais en faisant $n=2$ et $\alpha=-1$, on aura

$$\theta'=\xi^0-\xi'=(X'^2+X'')^2-\xi'-\xi'=A^2-2\xi';$$

donc

$$\theta'=A^2-4B+4u',$$

et enfin, d'après les formnles (6) et (7),

$$X'=\frac{A+\sqrt{\theta'}}{2},\quad X''=\frac{A-\sqrt{\theta'}}{2}.$$

Maintenant comme

$$X'=x'+x''',$$

on peut regarder x', x'' comme les deux racines de l'équation du second degré

$$x^2-X'x+\lambda=0;$$

et pour avoir λ, il n'y aura qu'à diviser l'équation proposée

du quatrième degré par celle-ci; le premier terme du reste égalé à zéro, donnera

$$\lambda = \frac{X'^3 - AX'^2 + BX' - C}{2X' - A}.$$

Ainsi en résolvant l'équation du second degré, on aura

$$x' = \frac{X' + \sqrt{X'^2 - 4\lambda}}{2}, \quad x'' = \frac{X' - \sqrt{X'^2 - 4\lambda}}{2};$$

et comme

$$X'' = x''' + x^{\text{iv}},$$

on aura les racines x''', x^{iv}, en changeant dans ces expressions X' en X'', ce qui n'exige que le changement du signe du radical $\sqrt{\theta'}$.

Cette solution, dit *Lagrange*, revient à celle de *Descartes*, dans laquelle on résout l'équation du quatrième degré en deux du deuxième, moyennant une du troisième.

On peut substituer d'abord, en place de u, sa valeur $\frac{\theta - A^2 + 4B}{4}$, ce qui donnera une équation du troisième degré et complette en θ, dont les coefficiens seront en A, B, C et D, et dont θ' sera une racine quelconque à volonté; mais en employant ses trois racines, on peut obtenir tout d'un coup les quatre racines x', x'', x''', x^{iv}; car en faisant $\alpha = -1$, on a

$$t = x' + x''' - x'' - x^{\text{iv}},$$

et conséquemment,

$$\theta = t^2 = (x' + x''' - x'' - x^{\text{iv}})^2,$$

expression qui n'est susceptible que de trois valeurs différentes,

$$(x' + x''' - x'' - x^{\text{iv}})^2,$$
$$(x' + x'' - x''' - x^{\text{iv}})^2,$$
$$(x' + x^{\text{iv}} - x'' - x''')^2,$$

en les désignant par θ', θ'', θ''' qui seront les trois racines de l'équation en θ, on aura

$$x' + x'' - x''' - x^{\text{IV}} = \sqrt{\theta'},$$
$$x' + x''' - x'' - x^{\text{IV}} = \sqrt{\theta''},$$
$$x' + x^{\text{IV}} - x'' - x''' = \sqrt{\theta'''};$$

ces trois équations jointes à celle-ci,

$$x' + x'' + x''' + x^{\text{IV}} = \text{A},$$

valeur de t qui répond à $\alpha = 1$, serviront à déterminer chacune des racines x', x'', x''', x^{IV}, et on trouvera

$$x' = \frac{\text{A} + \sqrt{\theta'} + \sqrt{\theta''} + \sqrt{\theta'''}}{4},$$
$$x'' = \frac{\text{A} - \sqrt{\theta'} + \sqrt{\theta''} - \sqrt{\theta'''}}{4},$$
$$x''' = \frac{\text{A} + \sqrt{\theta'} - \sqrt{\theta''} - \sqrt{\theta'''}}{4},$$
$$x^{\text{IV}} = \frac{\text{A} - \sqrt{\theta'} - \sqrt{\theta''} + \sqrt{\theta'''}}{4}.$$

Cette solution, la plus simple de toutes, est due à *Euler*: nous avons levé (53) l'espèce d'ambiguité qu'elle présente à cause des radicaux carrés qui peuvent être pris chacun en plus et en moins.

On retrouvera, dans le treizième chapitre, de nouvelles applications à la résolution des équations binomes.

56. Passons maintenant à l'examen des racines, et à l'effet de simplifier cette discussion, supposons, comme nous l'avons fait (52) et (53), l'équation débarrassée de son second terme. On a prouvé (chap. II) qu'une équation quelconque a toutes ses racines réelles, lorsque l'équation aux carrés des différences n'a que des variations de signes ; mais que si elle contient seulement une permanence, la proposée doit avoir, au moins, deux racines imaginaires : c'est de là que nous avons conclu (34)

les conditions de réalité et d'imaginarité des racines de l'équation

$$x^3 - Ax^2 + Bx - C = 0;$$

en faisant $A = 0$, $B = p$, $C = -q$, on trouve que la réalité des trois racines de l'équation

$$x^3 + px + q = 0,$$

est annoncée par

$$p < 0, \quad \frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4};$$

si l'une de ces inégalités n'a pas lieu, deux des racines de la proposée sont imaginaires. On parvient aux mêmes conclusions en discutant les formules des racines de l'équation du troisième degré.

Reprenons donc les trois racines obtenues (52), savoir,

$$x' = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

$$x'' = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$+ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

$$x''' = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

$$+ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}.$$

Si p est positif, ou si $\frac{q^2}{4} > \frac{p^3}{27}$ dans le cas de p négatif, la racine $\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ sera réelle, et conséquemment aussi la

première racine x'; mais x'' et x''' seront imaginaires, comme il est facile de le déduire de la forme même de ces racines. En effet, si on pose

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=m,$$

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}=n,\quad -\tfrac{1}{2}=l,\quad \frac{\sqrt{3}}{2}=k,$$

on aura

$$\begin{aligned} x'' &= (l+k\sqrt{-1})\,m+(l-k\sqrt{-1})\,n \\ &= l\,(m+n)+k\,(m-n)\,\sqrt{-1}, \\ x''' &= (l-k\sqrt{-1})\,m+(l+k\sqrt{-1})\,n \\ &= l\,(m+n)-k\,(m-n)\,\sqrt{-1}, \end{aligned}$$

quantités imaginaires de la forme $A \pm B\sqrt{-1}$, puisque k, l, m et n sont des quantités réelles. Dans le cas de

$$p < 0 \quad\text{et}\quad \frac{p^3}{27}=\frac{q^2}{4},$$

on a $m=n$, et

$$x'=2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}},\quad x''=-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}},\quad x'''=-\sqrt[3]{-\frac{q}{2}},$$

ensorte que les trois racines sont réelles, et les deux dernières sont égales entr'elles.

Les trois racines sont encore réelles dans le cas où celles de la réduite du second degré, sont imaginaires, c'est-à-dire, lorsque la quantité $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ qui se trouve sous le signe radical, est négative, et on sait, *à priori*, qu'effectivement elles le sont; car la condition

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$$

suppose ces deux-ci,

$$p < 0 \quad \text{et} \quad \frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}.$$

Alors on peut poser

$$x' = \sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{a-b\sqrt{-1}},$$

$$x'' = (l+k\sqrt{-1})\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}} + (l-k\sqrt{-1})\sqrt[3]{a-b\sqrt{-1}},$$

$$x''' = (l-k\sqrt{-1})\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}} + (l+k\sqrt{-1})\sqrt[3]{a-b\sqrt{-1}};$$

et on ne découvre plus aussi facilement, d'après la forme de ces racines, si elles sont toutes trois réelles. En admettant les développemens en série de $\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}$ et $\sqrt[3]{a-b\sqrt{-1}}$, on trouve que les termes imaginaires disparaissent par l'opposition des signes dans la première, et que, les multiplications faites dans les deux autres, les résultats ne contiennent plus que des termes réels; mais toutes trois sont alors données par des suites infinies; et comme on n'a pu, jusqu'ici, obtenir ces racines sous une forme en même temps réelle et finie, à moins d'employer les lignes trigonométriques, comme on le verra plus loin, on a désigné cette circonstance sous le nom de *cas irréductible*.

Nous examinerons donc à quoi tient l'introduction d'une imaginaire dans ces racines qu'on sait, *à priori*, devoir être réelles. A cet effet, nous reprendrons l'équation

$$x^3 + px + q = 0:$$

en supposant que x', x'' et x''' en soient les trois racines, on aura

$$x^3-(x'+x''+x''')x^2+(x'x''+x'x'''+x''x''')x-x'x''x''' = x^3+px+q,$$

d'où résultent ces égalités

$$x'+x''+x'''=0,\quad x'x''+x'x'''+x''x'''=p,\quad x'x''x'''=-q.$$

Comme l'équation proposée est d'un degré impair, on est assuré d'avance qu'elle a, au moins, une racine réelle, et la désignant par x''', on déduira de

$$x''' = -(x'+x''),$$

que la somme $x'+x''$ des deux autres racines, est aussi réelle. Cette valeur, substituée dans les deux dernières équations, donnera

$$x'^2+x'x''+x''^2=-p,\quad x'x''(x'+x'')=q,$$

d'où il faudrait conclure x' et x''. La dernière donne

$$x'x'' = \frac{q}{x'+x''};$$

donc $x'x''$ est aussi une quantité réelle. Considérons maintenant la quantité $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ ou $27q^2+4p^3$, du signe de laquelle dépend le cas irréductible : si on l'exprime au moyen de x' et de x'', on trouvera, après les réductions faites,

$$27q^2+4p^3=-(2x'^3-2x''^3+3x'^2x''-3x'x''^2)^2,$$

d'où

$$\begin{aligned}\sqrt{-(27q^2+4p^3)} &= 2x'^3-2x''^3+3x'^2x''-3x'x''^2\\ &= (x'-x'')(2x'^2+2x''^2+5x'x'')\\ &= (x'-x'')[2(x'+x'')^2+x'x''].\end{aligned}$$

Or les deux quantités $x'+x''$ et $x'x''$ sont réelles, comme on l'a déjà vu ; donc, pour que la différence $x'-x''$ soit réelle, il faut que la quantité $(27q^2+4p^3)$ soit négative, ce qui est le cas irréductible ; d'où il suit qu'alors les deux autres racines x' et x'' seront aussi réelles. Cherchons maintenant à évaluer les racines x' et x'' en coefficiens de la proposée :

nous avons trouvé l'équation

$$x'^3 - x''^3 + \tfrac{3}{2}x'^2x'' - \tfrac{3}{2}x'x''^2 = \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\sqrt{27q^2 + 4p^3}:$$

ajoutant au premier membre $m \times x'x''(x' + x'')$, et au second mq, à cause de l'équation trouvée plus haut,

$$q = x'x''(x' + x''),$$

on aura

$$x'^3 - x''^3 + (\tfrac{3}{2} + m)\,x'^2x'' + (m - \tfrac{3}{2})\,x'x''^2$$
$$= \tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\sqrt{27q^2 + 4p^3} + mq\ldots\ldots(1).$$

Il s'agit de déterminer m par la condition que le premier membre devienne un cube parfait : à cet effet, on le comparera avec

$$(\alpha x' - \alpha^2 x'')^3 = x'^3 - x''^3 - 3\alpha x'^2x'' + 3\alpha^2 x'x''^2,$$

α et α^2 étant deux des trois racines cubiques de l'unité, savoir,

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad \alpha^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2};$$

d'où on déduit

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{3}{2} + m &= -3\alpha = -3\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) \\ -\tfrac{3}{2} + m &= 3\alpha^2 = +3\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) \end{aligned}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{aligned} m &= \frac{-3\sqrt{-3}}{2} \\ m &= \frac{-3\sqrt{-3}}{2} \end{aligned}\right.$$

On a aussi

$$(\alpha^2 x' - \alpha x'')^3 = x'^3 - x''^3 - 3\alpha^2 x'^2x'' + 3\alpha x'x''^2,$$

et comparant avec le premier membre de (1), on obtient

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{3}{2} + m &= -3\left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right) \\ -\tfrac{3}{2} + m &= 3\left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right) \end{aligned}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{aligned} m &= \frac{3\sqrt{-3}}{2} \\ m &= \frac{3\sqrt{-3}}{2}. \end{aligned}\right.$$

On a donc pour déterminer x' et x'', les deux équations

$$\alpha x' - \alpha^2 x'' = \sqrt[3]{\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\sqrt{27q^2+4p^3} - \frac{3\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\,q\right]}$$

$$= \sqrt[3]{\left[\frac{-3\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\left(q - \frac{1}{3\sqrt{3}}\sqrt{27q^2+4p^3}\right)\right]} = \mathrm{P},$$

$$\alpha^2 x' - \alpha x'' = \sqrt[3]{\left[\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\sqrt{27q^2+4p^3} + \frac{3\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\,q\right]}$$

$$= \sqrt[3]{\left[\frac{+3\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}\left(q + \frac{1}{3\sqrt{3}}\sqrt{27q^2+4p^3}\right)\right]} = \mathrm{Q}.$$

Il reste donc à éliminer x' et x'' entre les deux équations

$$\alpha x' - \alpha^2 x'' = \mathrm{P} \ldots\ldots (2),$$
$$\alpha^2 x' - \alpha x'' = \mathrm{Q} \ldots\ldots (3):$$

à cet effet, multipliant (2) par α^2, et (3) par α, puis retranchant le premier produit du second, on aura

$$x'' = \frac{\alpha \mathrm{Q} - \alpha^2 \mathrm{P}}{\alpha - \alpha^2} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)}$$
$$+ \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)};$$

puis multipliant (2) par α, et (3) par α^2, et retranchant le premier produit du second, il viendra

$$x' = \frac{\alpha^2 \mathrm{Q} - \alpha \mathrm{P}}{\alpha - \alpha^2} = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)}$$
$$+ \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)}.$$

Mais de $x' + x'' + x''' = 0$, on déduit $x''' = -(x' + x'')$,

et conséquemment,

$$x''' = \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)} + \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{2} + \frac{p^3}{27}}\right)}.$$

Ces racines sont, en écrivant x' pour x''', x'' pour x', et x''' pour x'', celles qu'on a précédemment obtenues, et on remarque que l'imaginaire $\sqrt{-1}$ s'est introduite pour favoriser l'extraction de deux racines cubiques, et fournir deux fonctions linéaires des racines, qui, combinées avec $x''' = -(x' + x'')$, servent à évaluer les trois racines de la proposée.

On démontre encore, comme il suit, que les trois racines seront réelles, si p est négatif, et si, de plus,

$$\frac{1}{27} p^3 = \text{ou} > \frac{q^2}{4}.$$

A cet effet, soit x' la racine réelle de l'équation

$$x^3 + px + q = 0:$$

on aura donc aussi,

$$x'^3 + px' + q = 0, \quad \text{d'où} \quad q = -x'^3 - px';$$

conséquemment,

$$x^3 - x'^3 + p(x - x') = 0,$$

et divisant par $x - x'$,

$$x^2 + x'x + x'^2 + p = 0,$$

qui renferme les deux autres racines de la proposée, et donne

$$x = -\frac{x'}{2} \pm \sqrt{-\tfrac{3}{4}x'^2 - p}.$$

Pour que ces deux valeurs de x soient réelles, on doit avoir

$$p < 0 \quad \text{et} \quad \tfrac{3}{4}x'^2 = \text{ou} < p, \quad \text{ou} \quad x' = \text{ou} < \sqrt{\frac{4p}{3}}:$$

mais si, dans le second membre de

$$q = -x'^3 + px',$$

on écrit au lieu de x' la quantité $\sqrt{\frac{4p}{3}}$, qui est supposée égale ou plus grande, on aura

$$q = \text{ou} < -\frac{4p}{3}\sqrt{\frac{4p}{3}} + p\sqrt{\frac{4p}{3}},$$

et, en réduisant,

$$q = \text{ou} < -\frac{p}{3}\sqrt{\frac{4p}{3}}; \quad \text{donc} \quad q^2 = \text{ou} < \frac{4p^3}{27},$$

ou enfin,

$$\frac{q^2}{4} = \text{ou} < \frac{p^3}{27}.$$

Deux des racines seront imaginaires, si l'on a

$$\frac{q^2}{4} > \frac{p^3}{27}.$$

Reprenons l'équation

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

pour laquelle on a trouvé (53),

$$\begin{aligned}
x' &= \tfrac{1}{2}[+\sqrt{u'} + \sqrt{u''} + \sqrt{u'''}],\\
x'' &= \tfrac{1}{2}[+\sqrt{u'} - \sqrt{u''} - \sqrt{u'''}],\\
x''' &= \tfrac{1}{2}[-\sqrt{u'} + \sqrt{u''} - \sqrt{u'''}],\\
x^{\text{IV}} &= \tfrac{1}{2}[-\sqrt{u'} - \sqrt{u''} + \sqrt{u'''}],
\end{aligned}$$

dans le cas de q négatif, et

$$\begin{aligned}
x' &= \tfrac{1}{2}[-\sqrt{u'} - \sqrt{u''} - \sqrt{u'''}],\\
x'' &= \tfrac{1}{2}[-\sqrt{u'} + \sqrt{u''} + \sqrt{u'''}],\\
x''' &= \tfrac{1}{2}[+\sqrt{u'} - \sqrt{u''} + \sqrt{u'''}],\\
x^{\text{IV}} &= \tfrac{1}{2}[+\sqrt{u'} + \sqrt{u''} - \sqrt{u'''}],
\end{aligned}$$

lorsque q est positif, u', u'', u''' étant les trois racines de la réduite du troisième degré,

$$u^3 + 2pu^2 + (p^2 - 4r)\, u - q^2 = 0.$$

Si les racines u', u'' et u''' sont réelles et positives, il est visible que les quatre racines de la proposée seront réelles; mais si parmi les racines de la réduite, il y en a de négatives, les quatre racines de la proposée seront imaginaires; il faut cependant en excepter le cas où des trois racines réelles de la réduite, l'une u' est positive, et les autres u'' et u''' sont négatives et égales; car alors des quatre racines x', x'', x''' et x^{iv}, deux seront réelles, et les deux autres imaginaires. Ainsi, outre la condition de la réalité des trois racines de la réduite, il faudra encore, pour le premier cas, suivant la règle de *Descartes* (Ire sect.), que les coefficiens des termes de cette réduite, soient alternativement positifs et négatifs, et que par conséquent on ait

$$p < 0 \qquad \text{et} \qquad p^2 > 4r.$$

Si l'une de ces conditions manque, la proposée aura ses quatre racines imaginaires, à moins qu'on ne tombe dans le cas ci-dessus cité. Si la réduite n'a qu'une seule racine réelle, on observera d'abord qu'à cause du dernier terme négatif de cette réduite, la racine réelle sera nécessairement positive; or les deux racines imaginaires étant de la forme $a \pm b\sqrt{-1}$, si l'on prend u' pour la racine réelle, u'' et u''' pour les deux imaginaires, les deux racines x' et x'' seront réelles, puisque (chap. Ier), [form. (1) et (2)] $\sqrt{a + b\sqrt{-1}} + \sqrt{a - b\sqrt{-1}}$ est une quantité réelle $= \sqrt{2a + 2\sqrt{a^2 + b^2}}$, et, qu'au contraire, $\sqrt{a + b\sqrt{-1}} - \sqrt{a - b\sqrt{-1}}$ est une quantité imaginaire; ensorte que des quatre racines trouvées, les deux premières seront réelles, et les deux autres imaginaires.

57. Nous rapporterons ici la méthode qui paraît avoir servi à la première résolution des équations du troisième degré,

et qu'on appelle communément méthode de *Cardan*, quoiqu'il semble, dit *Lagrange*, que c'est de *Hudde* que nous la tenons.

Toute équation du troisième degré, privée de son second terme, est de la forme

$$x^3 + px + q = 0:$$

supposons

$$x = y + z,$$

ce qui revient à partager le nombre x en deux parties y et z, dont l'une pourra, conséquemment, être prise à volonté, pourvu que l'autre en soit le complément à x : la substitution dans la proposée, donnera la transformée

$$y^3 + 3y^2z + 3yz^2 + z^3 + p(y+z) + q = 0;$$

or

$$3y^2z + 3yz^2 = 3yz(y+z),$$

de sorte qu'on aura

$$y^3 + z^3 + (3yz+p)(y+z) + q = 0:$$

si maintenant on suppose à z une valeur telle, qu'on ait

$$3yz + p = 0\ldots\ldots(1),$$

il restera de l'équation précédente,

$$y^3 + z^3 + q = 0\ldots\ldots(2),$$

équations au moyen desquelles on pourra évaluer y et z, et conséquemment x. De la première on tire

$$z = -\frac{p}{3y},$$

substituant dans la seconde et réduisant, on obtient cette équation du sixième degré, qu'on appelle la *réduite*,

$$y^6 + qy^3 - \frac{p^3}{27} = 0,$$

laquelle ne contenant que deux puissances de l'inconnue, dont

l'une est double de l'autre, est résoluble à la manière des équations du second degré, et donne sur-le-champ

$$y^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

et extrayant la racine cubique,

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}};$$

mais

$$x = y + z = y - \frac{p}{3y};$$

en mettant pour z sa valeur $-\frac{p}{3y}$; et d'ailleurs,

$$\left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\right) \times \left(\sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\right) = -\frac{p}{3},$$

d'où l'on déduit

$$-\frac{p}{3y} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}};$$

donc

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

expression où l'on voit que le radical carré qui se trouve sous le radical cubique, est pris en plus et en moins, ensorte qu'il ne peut y avoir aucune ambiguité. Soient α et α^2 les deux racines cubiques imaginaires de l'unité, et

$$\text{A} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

$$\text{B} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

on aura

$$\left.\begin{aligned} y &= \sqrt[3]{A} \\ y &= \alpha\sqrt[3]{A} \\ y &= \alpha^2\sqrt[3]{A} \end{aligned}\right\} \text{ d'où } \left\{\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{A} - \frac{p}{3\sqrt[3]{A}} \\ x &= \alpha\sqrt[3]{A} - \frac{p}{3\alpha\sqrt[3]{A}} \\ x &= \alpha^2\sqrt[3]{A} - \frac{p}{3\alpha^2\sqrt[3]{A}}; \end{aligned}\right.$$

mais à cause de

$$\sqrt[3]{B} = -\frac{p}{3\sqrt[3]{A}}, \quad \alpha^3 = 1,$$

d'où

$$\frac{1}{\alpha} = \alpha^2 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\alpha^2} = \alpha,$$

les trois racines de la proposée, seront exprimées ainsi qu'il suit :

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B},$$
$$x = \alpha\sqrt[3]{A} + \alpha^2\sqrt[3]{B},$$
$$x = \alpha^2\sqrt[3]{A} + \alpha\sqrt[3]{B}.$$

On aurait pu parvenir directement aux résultats que nous venons de trouver, en remarquant que les équations (1) et (2) donnent

$$y^3z^3 = -\frac{p^3}{27}, \quad y^3 + z^3 = -q,$$

d'où l'on conclut, sur-le-champ, que y^3 et z^3 sont les racines d'une équation du second degré dont la première puissance de l'inconnue sera multipliée par q, et dont le terme connu sera $-\frac{p^3}{27}$: cette équation sera donc

$$u^2 + qu - \frac{p^3}{27} = 0;$$

et nommant A et B ses deux racines, on aura

$$y = \sqrt[3]{A}, \quad z = \sqrt[3]{B},$$

A et B ayant les mêmes acceptions que ci-dessus. Or on a

$$y = \sqrt[3]{A}, \quad y = \alpha \sqrt[3]{A}, \quad y = \alpha^2 \sqrt[3]{A},$$
$$z = \sqrt[3]{B}, \quad z = \alpha \sqrt[3]{B}, \quad z = \alpha^2 \sqrt[3]{B},$$

d'où on croirait pouvoir conclure neuf racines; mais l'équation

$$yz = -\frac{p}{3},$$

dont nous n'avons employé que le cube, limite le nombre de ces combinaisons; or de ce que le produit

$$yz = -\frac{p}{3},$$

on conclut que les valeurs de z, qu'on doit combiner par voie d'addition avec $\sqrt[3]{A}$, $\alpha\sqrt[3]{A}$, $\alpha^2\sqrt[3]{A}$, sont $\sqrt[3]{B}$, $\alpha^2\sqrt[3]{B}$, $\alpha\sqrt[3]{B}$, en observant que $\alpha^3 = 1$: d'où résultent les trois valeurs de x trouvées plus haut.

58. On peut aussi parvenir aux formules des racines du quatrième degré, d'une manière moins directe que celle qui a été exposée ci-dessus, mais qui, d'un autre côté, a l'avantage d'être analogue à celle de *Cardan*, pour le troisième degré. Soit, à cet effet, l'équation

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

on supposera

$$x = y + z + t,$$

et on aura d'abord

$$x^2 = (y^2 + z^2 + t^2) + 2(yz + yt + zt),$$

et carrant de nouveau,

$$x^4 = (y^2+z^2+t^2)^2$$
$$+4(y^2+z^2+t^2)(yz+yt+zt)+4(yz+yt+zt)^2;$$

d'ailleurs,

$$(yz+yt+zt)^2 = y^2z^2+y^2t^2+z^2t^2+2yzt(y+z+t):$$

substituant ces valeurs de x, x^2, x^4 dans la proposée, et rassemblant les termes qui se trouvent multipliés par $y+z+t$, ainsi que ceux qui ont pour facteur commun $yz+yt+zt$, on aura la transformée

$$(y^2+z^2+t^2)^2+p(y^2+z^2+t^2)$$
$$+[4(y^2+z^2+t^2)+2p][yz+yt+zt]$$
$$+4(y^2z^2+y^2t^2+z^2t^2)+(8yzt+q)(y+z+t)+r=0.$$

Maintenant, à l'imitation de l'hypothèse qui a réussi dans la résolution de l'équation du troisième degré, nous supposerons

$$8yzt+q=0\ldots\ldots(1),$$
$$4(y^2+z^2+t^2)+2p=0\ldots\ldots(2),$$

et il restera l'équation

$$(y^2+z^2+t^2)^2+p(y^2+z^2+t^2)$$
$$+4(y^2z^2+y^2t^2+z^2t^2)+r=0\ldots\ldots(3).$$

Au moyen des équations (1), (2) et (3), on déterminera les trois quantités y, z et t. La seconde donne d'abord

$$y^2+z^2+t^2=-\frac{p}{2};$$

cette valeur substituée dans (3), la change dans la suivante

$$y^2z^2+y^2t^2+z^2t^2=\frac{p^2}{16}-\frac{r}{4};$$

de plus, la première étant élevée au carré, donne

$$y^2z^2t^2=\frac{q^2}{64}:$$

donc, d'après la théorie générale de la formation des équations, les quantités y^2, z^2 et t^2 seront les racines d'une équation du troisième degré de la forme

$$u^3 + \frac{p}{2} u^2 + \left(\frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}\right) u - \frac{q^2}{64} = 0,$$

de sorte que si l'on désigne par u', u'' et u''' les trois racines de cette équation qu'on appelle *la réduite*, on aura

$$y = \sqrt{u'}, \quad z = \sqrt{u''}, \quad t = \sqrt{u'''},$$

u', u'' et u''' n'ayant pas ici, identiquement, les mêmes valeurs que ci-dessus, et la valeur de x, sera exprimée par

$$\sqrt{u'} + \sqrt{u''} + \sqrt{u'''}.$$

Comme ces trois radicaux peuvent être pris chacun avec les signes plus et moins, on aurait, en faisant toutes les combinaisons possibles, et rejetant celles qui se répètent, huit valeurs différentes de x. Mais il faut observer que, dans l'analyse précédente, nous avons employé

$$y^2z^2t^2 = \frac{q^2}{64},$$

ou le carré de

$$yzt = -\frac{q}{8};$$

il faudra donc que le produit des trois quantités x, y et z, c'est-à-dire, des trois radicaux $\sqrt{u'}$, $\sqrt{u''}$, $\sqrt{u'''}$, soit de signe contraire à celui de la quantité q : d'où il suit,

1°. Que q étant une quantité négative dans la proposée, on devra prendre les trois radicaux en plus, ou deux en moins et un en plus, ce qui ne donne que les quatre combinaisons

$$\begin{aligned}
x' &= + \sqrt{u'} + \sqrt{u''} + \sqrt{u'''},\\
x'' &= + \sqrt{u'} - \sqrt{u''} - \sqrt{u'''},\\
x''' &= - \sqrt{u'} + \sqrt{u''} - \sqrt{u'''},\\
x^{\text{IV}} &= - \sqrt{u'} - \sqrt{u''} + \sqrt{u'''},
\end{aligned}$$

qui seront conséquemment les quatre racines de la proposée.

2°. Que q étant une quantité positive dans la proposée, il devra se trouver dans l'expression de x, ou trois radicaux négatifs, ou un négatif et deux positifs, ce qui fournira les quatre combinaisons

$$x' = -\sqrt{u'}-\sqrt{u''}-\sqrt{u'''},$$
$$x'' = -\sqrt{u'}+\sqrt{u''}+\sqrt{u'''},$$
$$x''' = +\sqrt{u'}-\sqrt{u''}+\sqrt{u'''},$$
$$x^{\text{iv}} = +\sqrt{u'}+\sqrt{u''}-\sqrt{u'''}.$$

Ces formules sont de même forme que celles auxquelles on est parvenu (56).

59. On trouve dans le tome II des *Annales Mathématiques*, une méthode fort simple pour la résolution de l'équation générale du quatrième degré, méthode due à M. *Pilatte*, professeur de mathématiques spéciales au lycée d'Angers.

Reprenons l'équation

$$x^4+px^2+qx+r=0 \ldots\ldots(\text{A}),$$

et soit $x=y+t$: en substituant et ordonnant par rapport à y, il viendra

$$\left.\begin{matrix} y^4+4ty^3+6t^2 \\ +p \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} y^2+4t^3 \\ +2pt \\ +q \end{matrix}\right| \begin{matrix} y+t^4 \\ +pt^2 \\ +qt \\ +r \end{matrix} = 0 \ldots\ldots(\text{B}).$$

Posons

$$4ty^3+(4t^3+2pt+q)\,y=0 \ldots\ldots(\text{C}):$$

l'équation (B) deviendra

$$y^4+(6t^2+p)\,y^2+(t^4+pt^2+qt+r)=0 \ldots\ldots(\text{D});$$

mais l'équation (C) délivrée du facteur y, donne

$$y^2 = -t^2 - \frac{p}{2} - \frac{q}{4t} \ldots\ldots (E):$$

substituant cette valeur et son carré dans (D), on obtient la réduite

$$t^6 + \frac{p}{2}t^4 + \left(\frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}\right)t^2 - \frac{q^2}{64} = 0 \ldots\ldots (F);$$

c'est-à-dire, sous l'hypothèse $t^2 = u$,

$$u^3 + \frac{p}{2}u^2 + \left(\frac{p^2}{16} - \frac{r}{4}\right)u - \frac{q^2}{64} = 0 \ldots\ldots (G),$$

réduite trouvée (58). Soient t', t'', t''', $-t'$, $-t''$, $-t'''$ les six racines de (F); celles de (G) seront t'^2, t''^2, t'''^2, et on aura

$$\frac{p}{2} = -t'^2 - t''^2 - t'''^2, \quad \frac{q^2}{64} = t'^2 t''^2 t'''^2,$$

d'où

$$\frac{q}{8} = t't''t''',$$

en observant que q étant positif dans la proposée, $\frac{q}{8}$ doit être positif. Ainsi lorsqu'on prendra la racine t', par exemple, avec le signe plus, il faudra prendre sous un même signe chacune des deux autres t'' et t''', et lorsqu'on prendra t' avec le signe moins, il faudra prendre t'' et t''' avec des signes contraires; d'où il résulte qu'en changeant d'abord t en $+t'$ dans (E), on aura

$$y^2 = -t'^2 + t'^2 + t''^2 + t'''^2 - \frac{2t't''t'''}{t'} = (t'' - t''')^2,$$

d'où

$$y = \pm (t'' - t'''),$$

et qu'en changeant t en $-t'$, on aura

$$y^2 = -t'^2 + t'^2 + t''^2 + t'''^2 - \frac{-2t' \times -t''t'''}{-t'} = (t'' + t''')^2,$$

d'où

$$y = \pm (t'' + t''') :$$

reportant les deux premières valeurs dans la relation $x = y + t$, en y changeant t en $+ t'$, on trouve

$$x = t' + t'' - t''',$$
$$x = t' - t'' + t''' :$$

reportant les deux autres dans la même relation, en y changeant t en $-t'$, on obtient les deux dernières racines

$$x = - t' + t'' + t''',$$
$$x = - t' - t'' - t''',$$

racines trouvées plus haut, pour q positif.

On retomberait sur les quatre mêmes racines, en prenant successivement t'' et t''' sous les deux signes, et en ayant égard à la condition de q positif dans la proposée.

Mais q étant négatif, pour t' positif, les deux autres racines ont des signes contraires, et pour t' négatif, elles ont les mêmes signes, ensorte que, dans le premier cas, l'équation (E) donne pour $t = + t'$,

$$y^2 = t''^2 + t'''^2 - \frac{2t' \times - t''t'''}{t'} = (t'' + t''')^2,$$

d'où

$$y = \pm (t'' + t'''),$$

et pour $t = - t'$, la même donne

$$y^2 = t''^2 + t'''^2 - \frac{-2t' \times t''t'''}{-t'} = (t'' - t''')^2,$$

d'où

$$y = \pm (t'' - t''') :$$

reportant les deux premières valeurs de y dans $x = y + t'$, et les deux dernières dans $x = y - t'$; on retrouve les quatre racines qui, plus haut, répondent, en effet, au cas de q négatif.

60. *Euler*, conduit par la forme des racines des second et troisième degrés, dans les équations sans second terme, racines qui sont de la forme

$$x = \sqrt{a}, \quad x = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b},$$

conjectura que celles du quatrième, du cinquième degré, enfin du degré m, seraient

$$x = \sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b} + \sqrt[4]{c},$$
$$x = \sqrt[5]{a} + \sqrt[5]{b} + \sqrt[5]{c} + \sqrt[5]{d},$$
$$\vdots$$
$$x = \sqrt[m]{a} + \sqrt[m]{b} + \sqrt[m]{c} + \sqrt[m]{d} + \text{etc.}$$

le nombre des radicaux étant $m - 1$. Mais les difficultés qu'il rencontra dans l'équation du cinquième degré, lui firent modifier la forme précédente, et adopter la loi suivante, à commencer du second degré jusqu'au degré m,

$$x = a\sqrt{u}, \quad x = a\sqrt[3]{u} + b\sqrt[3]{u^2}, \quad x = a\sqrt[4]{u} + b\sqrt[4]{u^2} + c\sqrt[4]{u^3}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x = a\sqrt[m]{u} + b\sqrt[m]{u^2} + c\sqrt[m]{u^3} + d\sqrt[m]{u^4} + \ldots\ldots + k\sqrt[m]{u^{m-1}},$$

les quantités a, b, c...... k étant indéterminées et en nombre $m - 1$. Si l'on suppose

$$\sqrt[m]{u} = y, \quad \text{d'où} \quad y^m - u = 0\ldots\ldots(\text{M}),$$

on aura

$$x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + \ldots\ldots + ky^{m-1}\ldots\ldots(\text{N}).$$

Si l'on élimine y entre ces deux équations, 1°. l'équation finale ne montera qu'au degré m; 2°. elle n'aura point de second terme. Pour donner un exemple simple de ce procédé d'élimination sur lequel on peut d'ailleurs consulter l'*Algèbre*

de *Bezout*, posons les deux équations

$$y^3 - u = 0. \quad \ldots.(1),$$
$$by^2 + ay - x = 0. \ldots\ldots(2):$$

pour éliminer y, je multiplie la dernière par y, et mettant pour y^3 sa valeur déduite de la première, j'ai

$$ay^2 - xy + bu = 0\ldots\ldots(3):$$

je multiplie de même celle-ci par y, et remplaçant y^3 par u, il vient

$$xy^2 - buy - au = 0\ldots\ldots(4):$$

Des deux équations (2) et (3), je déduis, suivant la méthode des équations du premier degré à deux inconnues, les valeurs de y^2 et de y que je substitue dans (4), et il vient, après les réductions,

$$x^3 - 3abux - u\,(a^3 + b^3) = 0,$$

équation du troisième degré, sans second terme. On voit qu'après avoir éliminé y^2 entre les équations (2) et (3), y ne renfermera x qu'à la première puissance, ensorte que dans y^2 entrera x^2, et la substitution pour y^2 et pour y dans (4), donnera un polynome du troisième degré en x : ce raisonnement est facile à généraliser.

On observera encore qu'en comparant le résultat de l'élimination de y, entre les équations (1) et (2), avec une équation donnée du troisième degré, sans second terme, on n'aura pour évaluer les trois indéterminées a, b et u, que deux équations : on pourra donc disposer de u, qu'on pourra faire $= 1$. Dans cette hypothèse, on tombe sur les équations auxiliaires

$$y^3 - 1 = 0, \quad x = ay + by^2.$$

Il reste à faire voir que l'équation finale sera sans second terme. A cet effet, désignons par α, β, γ, δ, les quatre racines, autres que l'unité, de l'équation

$$y^5 - 1 = 0,$$

ensorte que, pour l'équation du cinquième degré, les cinq expressions

$$y = \sqrt[5]{u}$$

seront

$$y=\sqrt[5]{u}, \quad y=\alpha\sqrt[5]{u}, \quad y=\beta\sqrt[5]{u}, \quad y=\gamma\sqrt[5]{u}, \quad y=\delta\sqrt[5]{u},$$

et les cinq racines

$$x = a\sqrt[5]{u} + b\sqrt[5]{u^2} + c\sqrt[5]{u^3} + d\sqrt[5]{u^4},$$

deviendront

$$x = a\sqrt[5]{u} + b\sqrt[5]{u^2} + c\sqrt[5]{u^3} + d\sqrt[5]{u^4},$$
$$x = a\alpha\sqrt[5]{u} + b\alpha^2\sqrt[5]{u^2} + c\alpha^3\sqrt[5]{u^3} + d\alpha^4\sqrt[5]{u^4},$$
$$x = a\beta\sqrt[5]{u} + b\beta^2\sqrt[5]{u^2} + c\beta^3\sqrt[5]{u^3} + d\beta^4\sqrt[5]{u^4},$$
$$x = a\gamma\sqrt[5]{u} + b\gamma^2\sqrt[5]{u^2} + c\gamma^3\sqrt[5]{u^3} + d\gamma^4\sqrt[5]{u^4},$$
$$x = a\delta\sqrt[5]{u} + b\delta^2\sqrt[5]{u^2} + c\delta^3\sqrt[5]{u^3} + d\delta^4\sqrt[5]{u^4};$$

mais en désignant par σ la somme des premières puissances des racines, on a

$$\begin{aligned}\sigma = &(1 + \alpha + \beta + \gamma + \delta)\, a\sqrt[5]{u}\\ &+ (1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)\, b\sqrt[5]{u^2}\\ &+ (1 + \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3)\, c\sqrt[5]{u^3}\\ &+ (1 + \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4)\, d\sqrt[5]{u^4}.\end{aligned}$$

or (47) les coefficiens entre parenthèses sont nuls; conséquemment $\sigma = 0$: donc le coefficient du second terme de l'équation finale en x, est nul, ce qu'il s'agissait de prouver.

CHAPITRE XI.

Résolution par les lignes trigonométriques des équations $x^m \mp a^m = o$, $x^{2m} - 2px^m + q = o$:

Construction des racines de ces équations.

61. Soit d'abord l'équation binome

$$x^m \mp a^m = o:$$

si on pose $x = ay$, on aura

$$a^m y^m \mp a^m = o, \quad \text{d'où} \quad y^m \mp 1 = o.$$

Ainsi la résolution de l'équation $x^m \mp a^m$ est réduite à celle de $y^m \mp 1 = o$, et on repassera des racines de celle-ci aux racines de la première, en multipliant chaque racine y par a.

Nous ne nous occuperons ici que de la résolution trigonométrique de l'équation $y^m \mp 1 = o$, nous réservant de donner dans l'un des chapitres suivans, la résolution algébrique de l'équation $y^m - 1 = o$.

62. Nous démontrerons d'abord ce théorème fondamental,

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi . \sqrt{-1})^m = (\cos m\varphi \pm \sin m\varphi . \sqrt{-1}),$$

m étant un nombre quelconque, et le rayon étant l'unité ; mais d'abord nous l'établirons pour m, nombre entier, et nous le généraliserons ensuite.

1°. Si l'on multiplie ensemble deux facteurs tels que

$$\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}, \quad \cos\varphi' + \sin\varphi' . \sqrt{-1},$$

on aura pour produit, après les réductions,

$$\cos(\varphi+\varphi') + \sin(\varphi+\varphi').\sqrt{-1},$$

lequel est de même forme que chacun des facteurs; il est remarquable que la multiplication de ces sortes de quantités, s'exécute en ajoutant seulement les arcs, ce qui est une propriété analogue à celle des logarithmes. On en conclura successivement

$$(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})^2 = \cos 2\varphi + \sin 2\varphi.\sqrt{-1},$$
$$(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})^3 = \cos 3\varphi + \sin 3\varphi.\sqrt{-1},$$
$$(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})^4 = \cos 4\varphi + \sin 4\varphi.\sqrt{-1},$$

et, en général, m étant un nombre entier positif, il sera démontré que

$$(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})^m = \cos m\varphi + \sin m\varphi.\sqrt{-1},$$

et en prenant $\sqrt{-1}$ avec le signe $-$, on aura cette formule conjuguée,

$$(\cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1})^m = \cos m\varphi - \sin m\varphi.\sqrt{-1}.$$

2°. Pour généraliser, soit

$$\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1} = f(\varphi),$$

f désignant *fonction de;* on aura

$$\cos t + \sin t.\sqrt{-1} = f(t);$$

mais le produit des deux premiers membres, étant

$$\cos(\varphi+t) + \sin(\varphi+t).\sqrt{-1},$$

c'est-à dire, composé en $\varphi+t$, de la même manière que l'un des facteurs l'est en φ ou en t, on aura nécessairement

$$\cos(\varphi+t) + \sin(\varphi+t).\sqrt{-1} = f(\varphi+t),$$

c'est-à-dire,

$$f(\varphi)\times f(t) = f(\varphi+t),$$

équation de définition des fonctions exponentielles : d'où l'on conclut que $f(\varphi)$ et $f(t)$ sont de telles fonctions, et qu'on a

$$f(\varphi) = a^\varphi, \quad f(t) = a^t,$$

c'est-à-dire,

$$\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1} = a^\varphi.$$

Maintenant il nous est facile de déduire de là le théorème de *Moivre*, m étant un nombre quelconque. En effet, soit qu'on élève a_φ à la puissance m, ou qu'on écrive $m\varphi$ pour φ, on obtient toujours $a^{m\varphi}$: qu'on opère de l'une et de l'autre manière sur le premier membre de l'identité précédente, et on obtiendra les deux suivantes,

$$(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})^m = a^{m\varphi},$$
$$\cos m\varphi + \sin m\varphi.\sqrt{-1} = a^{m\varphi},$$

qui, en tenant compte du double signe du radical, donnent celle-ci

$$(\cos\varphi \pm \sin\varphi.\sqrt{-1})^m = \cos m\varphi \pm \sin m\varphi.\sqrt{-1}\ldots\ldots(1).$$

Soit $m\varphi = \varphi'$, d'où $\varphi = \frac{\varphi'}{m}$: on aura

$$\left(\cos\frac{\varphi'}{m} \pm \sin\frac{\varphi'}{m}.\sqrt{-1}\right)^m = \cos\varphi' \pm \sin\varphi'.\sqrt{-1},$$

et conséquemment,

$$\cos\frac{\varphi'}{m} \pm \sin\frac{\varphi'}{m}.\sqrt{-1} = (\cos\varphi' \pm \sin\varphi'.\sqrt{-1})^{\frac{1}{m}}\ldots\ldots(2).$$

De la formule (1), on peut déduire sur-le-champ les deux suivantes,

$$2\cos m\varphi = (\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})^m + (\cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1})^m,$$
$$2\sin m\varphi.\sqrt{-1} = (\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})^m - (\cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1})^m.$$

63. Ces préliminaires établis, soit l'équation proposée

$$x^m - 1 = 0:$$

si l'on observe que

$$1 = \cos 2\lambda\pi + \sin 2\lambda\pi.\sqrt{-1},$$

π désignant la demi-circonférence, et λ étant un nombre entier, et qu'on écrive dans la proposée, au lieu de l'unité, cette expression, on aura

$$x^m = \cos 2\lambda\pi + \sin 2\lambda\pi.\sqrt{-1},$$

d'où, d'après la formule (2),

$$x = \cos \frac{2\lambda\pi}{m} + \sin \frac{2\lambda\pi}{m}.\sqrt{-1}.$$

Toutes les racines de la proposée seront donc comprises dans la formule

$$x = \cos \frac{2\lambda}{m}\pi + \sin \frac{2\lambda}{m}\pi.\sqrt{-1}\ldots\ldots(3),$$

et on les obtiendra en faisant successivement $\lambda = 0, = 1, =$ etc. jusqu'à $m-1$ inclusivement : il serait inutile de faire $\lambda = m$ ou $\lambda > m$, puisqu'il résulterait de ces hypothèses, les mêmes valeurs que pour $\lambda < m$: en effet, à des valeurs de λ, telles que

$$\lambda = m, \qquad \lambda = m+1, \qquad \lambda = m+2, \qquad \text{etc.}$$

correspondront les arcs

$$\frac{2m}{m}\pi = 2\pi, \quad \frac{2(m+1)}{m}\pi = 2\pi + \frac{2}{m}\pi, \quad \frac{2(m+2)}{m}\pi = 2\pi + \frac{4}{m}\pi, \text{ etc.}$$

dont les sinus et cosinus sont respectivement égaux à ceux des arcs

$$2\pi, \qquad \frac{2\pi}{m}, \qquad \frac{4\pi}{m}, \qquad \text{etc.}$$

déjà donnés par les suppositions

$$\lambda = 0, \qquad \lambda = 1, \qquad \lambda = 2, \qquad \text{etc.}$$

Nous remarquerons d'abord que toutes les racines de

l'équation

$$x^m - 1 = 0$$

sont inégales entr'elles (37), ce qui est d'ailleurs évident, puisque, dans la circonférence, il n'y a pas deux arcs qui aient à la fois même sinus et même cosinus en nombres et en signes : de plus, il est facile de voir que ces racines seront imaginaires, excepté la première, qui répond à $\lambda = 0$, et celle qui est donnée par $\lambda = \frac{m}{2}$, lorsque m est un nombre pair. En effet, pour que la partie imaginaire de l'expression de x disparaisse, il faut qu'on ait

$$\sin \frac{2\lambda}{m} \pi = 0,$$

ce qui arrive, 1°. lorsque

$$\frac{2\lambda}{m} = 0, \quad \text{d'où} \quad \lambda = 0;$$

2°. lorsque

$$\frac{2\lambda}{m} = 1, \quad \text{d'où} \quad \lambda = \frac{m}{2},$$

condition qui ne peut être satisfaite que lorsque m est pair, puisque λ doit être un nombre entier. On a dans le premier cas,

$$x = \cos 0 = 1,$$

et, dans le second cas,

$$x = \cos \pi = -1.$$

Ainsi, lorsque m est impair, l'équation

$$x^m - 1 = 0$$

ne comporte qu'une seule racine réelle donnée par $\lambda = 0$ dans (3), et lorsque m est un nombre pair, la même équation comporte deux racines réelles correspondantes à $\lambda = 0$ et à $\lambda = \frac{m}{2}$. Donc, en général, quel que soit m pair ou impair, les racines imaginaires seront en nombre pair, ce qu'on sait déjà.

Nous allons maintenant prouver que toutes les racines de l'équation $x^m - 1 = 0$, sont comprises dans la formule

$$x=\cos\frac{2\lambda}{m}\pi\pm\sin\frac{2\lambda}{m}\pi.\sqrt{-1}\ldots\ldots(4);$$

mais alors il ne faut aller que de $\lambda=0$ à $\lambda=\frac{m-1}{2}$ pour m impair, et pour m pair, de $\lambda=0$ à $\lambda=\frac{m}{2}$ nombre entier. Supposons d'abord m nombre impair, et considérons deux valeurs de λ, équidistantes des valeurs $\lambda=1$, $\lambda=m-1$, auxquelles répondent les $m-1$ racines imaginaires, et soient, par exemple, $\lambda=4$, $\lambda=m-4$: on aura pour ces substitutions dans la formule (4), ces racines,

$$x=\cos\frac{4}{m}.2\pi+\sin\frac{4}{m}2\pi.\sqrt{1},$$
$$x=\cos\left(\frac{m-4}{m}\right)2\pi+\sin\left(\frac{m-4}{m}\right)2\pi.\sqrt{-1}:$$

or la somme des arcs $\frac{4}{m}2\pi+\frac{m-4}{m}2\pi$, étant égale à une circonférence, et ces arcs devant être comptés d'une même origine, nécessairement les cosinus seront les mêmes, et les sinus ne différeront que par le signe; ensorte que ces deux racines seront représentées par

$$x=\cos\frac{4}{m}2\pi\pm\sin\frac{4}{m}2\pi.\sqrt{-1},$$

et comme on démontrerait la même chose à l'égard de deux autres formules prises de la même manière, il s'ensuit que toutes les racines seront données par (4), en donnant à λ des valeurs consécutives depuis $\lambda=0$ jusqu'à $\lambda=\frac{m-1}{2}$. Le même raisonnement s'applique au cas de m pair; alors les valeurs extrêmes de λ, savoir, 0 et $\frac{m}{2}$, portées dans (4), donnent les deux racines réelles, et les valeurs intermédiaires de λ, en nombre $\frac{m-2}{2}$, fournissent chacune deux racines imaginaires.

Soit, pour premier exemple, l'équation

$$x^5-1=0,$$

pour laquelle $m=5$: on aura

$$x=\cos\frac{2\lambda}{5}\pi \pm \sin\frac{2\lambda}{5}\pi.\sqrt{-1},$$

et pour $\lambda=0$,

$$\cos\frac{2\lambda}{5}\pi=1,\quad \sin\frac{2\lambda}{5}\pi=0,\quad x=1;$$

pour $\lambda=1$,

$$\cos\frac{2\lambda}{5}\pi=\cos\tfrac{2}{5}\pi,\quad \sin\frac{2\lambda}{5}\pi=\sin\tfrac{2}{5}\pi,$$
$$x=\cos\tfrac{2}{5}\pi\pm\sin\tfrac{2}{5}\pi.\sqrt{-1};$$

enfin pour $\lambda=2$,

$$\cos\frac{2\lambda}{5}\pi=\cos\tfrac{4}{5}\pi,\quad \sin\frac{2\lambda}{5}\pi=\sin\tfrac{4}{5}\pi,$$
$$x=\cos\tfrac{4}{5}\pi\pm\sin\tfrac{4}{5}\pi.\sqrt{-1}.$$

L'hypothèse de $\lambda=3$ donnerait

$$x=\cos\tfrac{6}{5}\pi\pm\sin\tfrac{6}{5}\pi.\sqrt{-1}=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right)\pm\sin\left(\pi+\frac{\pi}{5}\right).\sqrt{-1}$$
$$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right)\pm\sin\left(\pi-\frac{\pi}{5}\right).\sqrt{-1}=\cos\tfrac{4}{5}\pi\pm\sin\tfrac{4}{5}\pi.\sqrt{-1},$$

valeurs déjà trouvées dans l'hypothèse de $\lambda=2$. La supposition de $\lambda=4$ donnerait

$$x=\cos\tfrac{8}{5}\pi\pm\sin\tfrac{8}{5}\pi.\sqrt{-1}=\cos(\pi+\tfrac{3}{5}\pi)\pm\sin(\pi+\tfrac{3}{5}\pi).\sqrt{-1}$$
$$=\cos(\pi-\tfrac{3}{5}\pi)\pm\sin(\pi-\tfrac{3}{5}\pi).\sqrt{-1}=\cos\tfrac{2}{5}\pi\pm\sin\tfrac{2}{5}\pi).\sqrt{-1},$$

valeurs correspondantes à $\lambda=1$.

Les produits des facteurs correspondans aux racines données par $\lambda=1$ et par $\lambda=2$, sont

$$x^2-2x\cos\tfrac{2}{5}\pi+1 \quad\text{et}\quad x^2-2x\cos\tfrac{4}{5}\pi+1,$$

ensorte que

$$x^5-1=(x-1)(x^2-2x\cos\tfrac{2}{5}\pi+1)(x^2-2x\cos\tfrac{4}{5}\pi+1).$$

Soit, pour second exemple, l'équation

$$x^6-1=0,$$

pour laquelle on a $m=6$ et

$$x = \cos\frac{2\lambda}{6}\pi \pm \sin\frac{2\lambda}{6}\pi.\sqrt{-1}.$$

Pour $\lambda = 0$, on trouve

$$x = \cos 0\pi \pm \sin 0\pi.\sqrt{-1} = +1,$$

$\lambda = 1\ldots\ldots$ $x = \cos\frac{1}{3}\pi \pm \sin\frac{1}{3}\pi.\sqrt{-1},$

$\lambda = 2\ldots\ldots$ $x = \cos\frac{2}{3}\pi \pm \sin\frac{2}{3}\pi.\sqrt{-1},$

$\lambda = 3\ldots\ldots$ $x = \cos\pi \pm \sin\pi.\sqrt{-1} = -1,$

et conséquemment,

$$(x^2-1)(x^2-2x\cos\tfrac{1}{3}\pi+1)(x^2-2x\cos\tfrac{2}{3}\pi+1) = x^6-1 = 0.$$

64. On trouverait de la même manière, que la formule des racines de l'équation

$$x^m + 1 = 0,$$

est

$$x = \cos\left(\frac{2\lambda+1}{m}\right)\pi \pm \sin\left(\frac{2\lambda+1}{m}\right)\pi.\sqrt{-1}\ldots\ldots(5),$$

en observant que

$$\cos(2\lambda+1)\pi \pm \sin(2\lambda+1)\pi.\sqrt{-1} = -1:$$

On appliquera cette formule à la résolution des équations

$$x^5+1=0, \quad x^6+1=0, \quad \text{etc.}$$

65. Les racines de l'équation

$$x^m - 1 = 0,$$

se construisent d'une manière fort simple au moyen du cercle : en effet, après avoir divisé la circonférence ARBR′A (fig. 1) en un nombre $2m$ de parties égales, numéroté toutes ces divisions en commençant par l'extrémité A qui sera zéro, et joint les numéros pairs, ce qui donne un polygone régulier AMM′, etc. : si des sommets des angles de ce polynome, on abaisse des perpendiculaires sur le diamètre, elles seront

$\sin \frac{2\lambda}{m} \pi$, et les distances au centre seront $\cos \frac{2\lambda}{m} \pi$: ces perpendiculaires représenteront donc les coefficiens de $\sqrt{-1}$, et les distances au centre, donneront la partie réelle des racines. Au point A, on a

$$x = \cos 0 + \sin 0 . \sqrt{-1} = +1.$$

Si m est pair, il y aura en B un point de division de numéro pair, pour lequel

$$x = \cos \pi + \sin \pi . \sqrt{-1} = -1.$$

Maintenant, dans le cas de $\frac{m}{2}$ nombre pair, il y aura en R un point de division de numéro pair, auquel répondra

$$x = \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} . \sqrt{-1} = + \sqrt{-1};$$

et comme une racine imaginaire de la forme $\alpha + \mathcal{C} \sqrt{-1}$ en suppose une autre telle que $\alpha - \mathcal{C} \sqrt{-1}$ (chap. Ier), ce qui d'ailleurs résulte de la construction, on aura aussi, dans ce cas,

$$x = - \sqrt{-1}.$$

Pour $x^6 - 1$, par exemple, on a deux divisions paires au-dessus du diamètre, deux au-dessous, et deux aux extrémités du diamètre, lesquelles donnent les six racines. Pour $x^5 - 1 = 0$, on a deux divisions paires au-dessus du diamètre, deux au-dessous, et une à l'origine, ce qui donne cinq racines.

Les racines de l'équation

$$x^m + 1 = 0,$$

se construiraient de la même manière, en joignant les numéros impairs, parce que les arcs ainsi déterminés, sont compris dans $\frac{2\lambda + 1}{m} \pi$.

66. Il est facile de déduire de ce qui précède, que toute racine paire, ainsi que toute puissance irrationnelle d'une

quantité négative, est imaginaire. En effet,

$$-a^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \times -1^{\frac{1}{n}}.$$

Or, d'après ce qui précède,

$$-1 = \cos(2\lambda+1)\pi + \sin(2\lambda+1)\pi.\sqrt{-1};$$

donc

$$-1^{\frac{1}{n}} = \cos\left(\frac{2\lambda+1}{n}\right)\pi + \sin\left(\frac{2\lambda+1}{n}\right)\pi.\sqrt{-1};$$

mais pour que le terme qui contient $\sqrt{-1}$ s'évanouisse, il faut que $\frac{2\lambda+1}{n}$ puisse devenir un nombre entier, ce qui est impossible, lorsque n est un nombre pair.

On a aussi, par exemple,

$$-1^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \cos\left(\frac{2\lambda+1}{\sqrt{2}}\right)\pi + \sin\left(\frac{2\lambda+1}{\sqrt{2}}\right)\pi.\sqrt{-1},$$

$$-1^{\sqrt{2}} = \cos(2\lambda+1)\pi\sqrt{2} + \sin(2\lambda+1)\pi\sqrt{2}.\sqrt{-1}:$$

or, $\frac{2\lambda+1}{\sqrt{2}}$ et $(2\lambda+1)\sqrt{2}$ ne seront jamais des nombres entiers.

67. Si l'on désigne par r la valeur numérique de $\sqrt[m]{c}$, calculée par la méthode exposée (Ire sect.), on obtiendra les m valeurs de $\sqrt[m]{c}$, en multipliant r par les m racines de l'unité; ensorte que ces racines seront données par la formule

$$r \times \left(\cos\frac{2\lambda}{m}\pi \pm \sin\frac{2\lambda}{m}\pi.\sqrt{-1}\right),$$

en donnant à λ les valeurs 0, 1, 2, etc.; et les m valeurs de $\sqrt[m]{-c}$ seront données par

$$r \times \left(\cos\frac{(2\lambda+1)}{m}\pi \pm \sin\frac{(2\lambda+1)}{m}\pi.\sqrt{-1}\right).$$

On peut obtenir de deux manières les mn valeurs du produit $\sqrt[m]{a^p} \times \sqrt[n]{b^q}$: 1°. en désignant ce produit par z, on a

$$z^{mn} = a^{pn}b^{qm}, \quad \text{d'où} \quad z = \sqrt[mn]{a^{pn}b^{qm}},$$

et les mn racines de cette équation sont toutes celles du produit; 2°. en calculant les m valeurs de $\sqrt[m]{a^p}$, les n valeurs de $\sqrt[n]{b^q}$, et multipliant successivement les premiers par chacune des secondes.

Le produit $\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b}$ étant $\sqrt[m]{ab}$, et chacun de ces radicaux $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[m]{b}$ admettant m valeurs, il paraîtrait résulter de ce que nous venons de dire, que $\sqrt[m]{ab}$ doit admettre $m \times m$ ou m^2 valeurs, ce qui est faux. Pour lever cette difficulté, désignons par α, β, γ les valeurs numériques de $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[m]{b}$, $\sqrt[m]{ab}$; nous aurons

$$\sqrt[m]{a} = \alpha \left(\cos \frac{2\lambda\pi}{m} \pm \sin \frac{2\lambda\pi}{m}.\sqrt{-1}\right),$$
$$\sqrt[m]{b} = \beta \left(\cos \frac{2\lambda'\pi}{m} \pm \sin \frac{2\lambda'\pi}{m}.\sqrt{-1}\right),$$
$$\sqrt[m]{ab} = \gamma \left(\cos \frac{2\lambda''\pi}{m} \pm \sin \frac{2\lambda''\pi}{m}.\sqrt{-1}\right);$$

multipliant entr'elles les deux premières équations, on aura

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} = \alpha\beta \left(\cos \frac{2(\lambda+\lambda')}{m}\pi \pm \sin \frac{2(\lambda+\lambda')}{m}\pi.\sqrt{-1}\right):$$

or, m étant pair, les plus grandes valeurs de λ et λ' sont $\frac{m}{2}$, ensorte que la plus grande valeur de $\lambda + \lambda'$ est m; mais les valeurs de $\lambda + \lambda'$, depuis $\frac{m}{2}$ jusqu'à m, répétant celles

de o à $\frac{m}{2}$, le produit ne peut admettre que $2 \times \frac{m}{2} = m$ valeurs. Ce même raisonnement aurait lieu pour m nombre impair.

Il est bon de remarquer que des deux radicaux $\sqrt[n]{a^p}$, $\sqrt[mn]{a^{pn}}$, le premier a m valeurs, tandis que le second a mn valeurs différentes.

Pour multiplier $\sqrt[4]{1}$ par $\sqrt{-1}$, on réduira le second radical à l'indice 4, et il deviendra

$$\sqrt[4]{(-1)^2} = \sqrt[4]{1},$$

ensorte que le produit est $\sqrt[4]{1}$. On reconnaîtra par le fait que les quatre valeurs de $\sqrt[4]{1}$, multipliées chacune par les deux valeurs de $\sqrt{-1}$, se réduisent aux quatre valeurs de $\sqrt[4]{1}$, ce qui lève toute difficulté.

68. Nous parviendrons, par une autre voie, à quelques propriétés déjà démontrées (chap. IV). Reprenons la formule

$$x = \cos\frac{2\lambda}{m}\pi + \sin\frac{2\lambda}{m}\pi.\sqrt{-1}:$$

le second membre

$$\cos\frac{2\lambda}{m}\pi + \sin\frac{2\lambda}{m}\pi.\sqrt{-1} = \left(\cos\frac{2}{m}\pi + \sin\frac{2}{m}\pi.\sqrt{-1}\right)^{\lambda}:$$

donc si l'on suppose

$$\cos\frac{2}{m}\pi + \sin\frac{2}{m}\pi.\sqrt{-1} = \alpha,$$

α étant alors la racine correspondante à $\lambda = 1$, toutes les autres racines seront représentées par les puissances successives α^2, α^3..... α^m qui correspondent, en effet, à $\lambda = 2$, $= 3$...... $= m$, ce qui rentre dans une propriété démontrée (chap. IX).

Pour $\lambda = \frac{m}{2}$, la formule précédente donne

$$\alpha^{\frac{m}{2}} = -1,$$

en supposant m nombre pair.

Tous les produits 2 à 2, 3 à 3, etc. des racines de l'équation $x^m - 1 = 0$, sont racines de cette équation; car ces produits étant de la forme α^n, si l'on divise n par m, on aura un quotient q et un reste r; ensorte que

$$\alpha^n = \alpha^{mq+r} = (\alpha^m)^q \times \alpha^r = \alpha^r,$$

à cause de $\alpha^m = 1$; or r étant $< m$, α^r est racine.

Lorsque les nombres m et p sont premiers entr'eux, et $p < m$, α^p désigne une racine quelconque de l'équation $x^m - 1$, et les m racines de cette équation, sont les puissances successives $1, 2 \ldots . m$ de α^p. En effet, de la formule

$$\alpha = \cos\frac{2\pi}{m} + \sin\frac{2\pi}{m}.\sqrt{-1},$$

on déduit

$$\alpha^p = \cos\frac{p}{m}2\pi + \sin\frac{p}{m}2\pi.\sqrt{-1}$$

et

$$\alpha^{kp} = \cos\frac{pk}{m}2\pi + \sin\frac{pk}{m}2\pi.\sqrt{-1}:$$

or en divisant pk par m, on a le quotient q et le reste r; donc

$$pk = mq + r, \quad \frac{pk}{m} \times 2\pi = \left(\frac{mq+r}{m}\right)2\pi = 2q\pi + \frac{2r\pi}{m};$$

mais le sinus et le cosinus ne changent pas, lorsqu'on diminue l'arc d'un multiple quelconque de la circonférence; donc

$$\alpha^{kp} = \cos\left(2q\pi + \frac{2r\pi}{m}\right) + \sin\left(2q\pi + \frac{2r\pi}{m}\right).\sqrt{-1}$$
$$= \cos\frac{2r\pi}{m} + \sin\frac{2r\pi}{m}.\sqrt{-1}.$$

Cela posé, lorsqu'on donne à k les m valeurs $1, 2 \ldots . m$,

les m valeurs correspondantes de r, sont $0, 1, 2 \ldots . m-1$, pris dans un certain ordre (*). Substituant ces m valeurs de r dans la formule précédente, les m valeurs $\alpha^p, \alpha^{2p} \ldots \alpha^{mp}$ qui en résulteront, seront précisément les m valeurs de x que l'on déduirait de la formule

$$x = \cos \frac{2\lambda}{m} \pi + \sin \frac{2\lambda}{m} \pi . \sqrt{-1},$$

en donnant à λ les valeurs $0, 1, 2 \ldots . m-1$, et ces valeurs de x, sont les m racines de l'équation

$$x^m - 1 = 0.$$

Lorsque m et p ne sont pas premiers entr'eux, les puissances de α^p ne donnent pas toutes les racines de l'équation $x^m - 1 = 0$. En effet, dans ce cas, la propriété énoncée dans la note et la conséquence que nous en avons tirée, n'ont plus lieu.

Le produit de deux racines quelconques des équations $x^p = 1$, $x^q = 1$, est racine de l'équation $x^{pq} - 1 = 0$. Soient α une racine de la première équation, et β une racine de la seconde : soient λ' et λ'' les valeurs de λ qui, substituées

(*) *Les nombres* p *et* m *étant premiers entr'eux, et* p *moindre que* m, *les restes des divisions des nombres* p, 2p, 3p..... mp *par* m, *sont* 0, 1, 2..... m − 1. Il suffit de prouver que ces restes sont différens, ou qu'on ne peut trouver deux restes égaux : soient m', m'' deux nombres moindres que m : si les divisions de $m'p$, $m''p$ par m, pouvaient donner deux restes égaux à r, en représentant les quotiens par q et q', et supposant $m' > m''$, on aurait

$$m'p = mq + r, \quad m''p = mq' + r',$$

d'où

$$(m' - m'')p = (q - q')m, \quad \text{et} \quad \frac{m}{p} = \frac{m' - m''}{q - q'}.$$

Or p et m étant premiers entr'eux, la fraction $\frac{m}{p}$ est irréductible ; mais $m' - m''$ est $< m$, donc la fraction $\frac{m}{p}$ serait égale à une fraction exprimée par de moindres termes ; ce qui est impossible (Ire sect.).

dans

$$x = \cos\frac{2\lambda}{m}\pi + \sin\frac{2\lambda}{m}\pi.\sqrt{-1},$$

donnent ces racines α et β : on aura

$$\alpha = \cos\frac{\lambda'}{p}2\pi + \sin\frac{\lambda'}{p}2\pi.\sqrt{-1}, \beta = \cos\frac{\lambda''}{q}2\pi + \sin\frac{\lambda''}{q}2\pi.\sqrt{-1}:$$

effectuant le produit de α par β, on trouvera

$$\alpha\beta = \cos\left(\frac{\lambda'q + \lambda''p}{pq}\right)2\pi + \sin\left(\frac{\lambda'q + \lambda''p}{pq}\right)2\pi.\sqrt{-1}:$$

élevant à la puissance pq, on aura

$$(\alpha\beta)^{pq} = \cos(\lambda'q + \lambda''p)\,2\pi + \sin(\lambda'q + \lambda'p)\,2\pi.\sqrt{-1} = 1;$$

donc $(\alpha\beta)^{pq}$ est racine de $x^{pq} - 1 = 0$.

Lorsque p et q sont premiers entr'eux, les produits deux à deux des racines des équations $x^p = 1$, $x^q = 1$, sont toutes les racines de l'équation

$$x^{pq} - 1 = 0,$$

qui admet pq racines différentes; or les p racines de la première équation, multipliées par les q racines de la seconde, donneront pq produits dont chacun sera, comme on vient de le voir, racine de

$$x^{pq} - 1 = 0:$$

il reste donc à démontrer que tous ces produits seront différens. A cet effet, désignant par α', α'' deux racines quelconques de

$$x^p - 1 = 0,$$

et par β', β'' deux racines aussi quelconques de l'équation

$$x^q - 1 = 0,$$

on aura

$$\alpha' = \cos \frac{\lambda'}{p} 2\pi + \sin \frac{\lambda'}{p} 2\pi . \sqrt{-1},$$

$$\alpha'' = \cos \frac{L'}{p} 2\pi + \sin \frac{L'}{p} 2\pi . \sqrt{-1},$$

$$\zeta' = \cos \frac{\lambda''}{q} 2\pi + \sin \frac{\lambda''}{q} 2\pi . \sqrt{-1},$$

$$\zeta'' = \cos \frac{L''}{q} 2\pi + \sin \frac{L''}{q} 2\pi . \sqrt{-1},$$

conséquemment,

$$\alpha'\zeta' = \cos \left(\frac{\lambda' q + \lambda'' p}{pq}\right) + \sin \left(\frac{\lambda' q + \lambda'' p}{pq}\right) . \sqrt{-1},$$

$$\alpha''\zeta'' = \cos \left(\frac{L' q + L'' p}{pq}\right) + \sin \left(\frac{L' q + L'' p}{pq}\right) . \sqrt{-1};$$

or, si $\alpha'\zeta'$ pouvait être égal à $\alpha''\zeta''$, on aurait

$$\lambda' q + \lambda'' p = L' q + L'' p, \quad \text{d'où} \quad \frac{p}{q} = \frac{L' - \lambda'}{\lambda'' - L''}.$$

mais λ' et L' étant moindres que p, λ'' et L'' moindres que q, la fraction $\frac{p}{q}$ dont les deux termes sont premiers entr'eux, ne serait pas irréductible, ce qui est absurde (Ire sect.). On peut généraliser cette proposition.

69. *Si dans un cercle* (fig. 2) *décrit avec un rayon* = a, *on mène un diamètre* AB *quelconque ; qu'à partir de l'extrémité* A *de ce diamètre, on divise la circonférence en* 2m *parties égales, et qu'on note par* 0, 1, 2, 3. . . . 2m — 1 *ces divisions, en faisant répondre* 0 *au point* A *; si d'un point quelconque* O *pris sur le diamètre, on mène des droites à tous les points de division, le produit de celles qui sont menées aux numéros pairs, est égal à la différence des puissances* m *du rayon et de la distance du point* O *au centre, et le produit de toutes celles menées aux numéros impairs, est égal à la somme des mêmes puissances.*

Abaissant du point M′ la perpendiculaire M′P, on a

$$\overline{OM'}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{PM'}^2 ;$$

mais M′P représente le sinus de l'arc AM′ dans le cercle pour le rayon $= a$, et CP en est le cosinus; on aura donc, en prenant les sinus et cosinus tabulaires calculés pour un rayon égal à l'unité,

$$PM' = a \sin AM' ;$$
$$CP = a \cos AM',$$

d'ailleurs représentant OC par x, on a

$$OP = x - CP = x - a \cos AM',$$

et

$$OM'^2 = x^2 - 2ax \cos AM' + a^2 \cos^2 AM' + a^2 \sin^2 AM'$$
$$= x^2 - 2ax \cos AM' + a^2$$
$$= x^2 - 2ax \cos \frac{2\pi}{2m} + a^2.$$

Les valeurs de $\overline{OM''}^2$, $\overline{OM'''}^2$, etc. s'obtiendront en substituant dans celle qu'on a trouvée pour OM′, les arcs AM″, AM‴, etc. à l'arc AM′. Si on ne prend que les arcs de l'origine A aux numéros pairs, et qu'on désigne toujours par π la demi-circonférence, on aura

$$AM'' = \frac{2\pi}{m}, \quad AM^{iv} = \frac{4\pi}{m}, \quad \text{etc.},$$

d'où

$$\overline{OM''}^2 = x^2 - 2ax \cos \frac{2\pi}{m} + a^2,$$

$$\overline{OM^{iv}}^2 = x^2 - 2ax \cos \frac{4\pi}{m} + a^2,$$

etc.

Mais les lignes OM″, OM^{iv}, etc. ont au-dessous du diamètre, leurs correspondantes Om″, Om^{iv}, etc. qui leur sont respecti-

vement égales, ensorte qu'on pourra écrire $OM'' \times Om''$, au lieu de $\overline{OM''}^2$, etc. : on remarquera en même temps, que

$$OA = x - a \quad \text{et} \quad OB = x + a.$$

Cela posé, les facteurs de l'équation

$$x^m - 1 = 0$$

étant, d'après la formule (4), pour m nombre impair ;

$$x - 1, \quad x^2 - 2x \cos \frac{2\pi}{m} + 1, \quad x^2 - 2x \cos \frac{4\pi}{m} + 1, \text{ etc.};$$

si l'on restitue a au lieu du rayon $= 1$, pour rétablir l'homogénéité, on aura

$$x^m - a^m = (x-a)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2\pi}{m} + a^2\right)\left(x^2 - 2ax\cos\frac{4\pi}{m} + a^2\right), \text{ etc.}$$

$$= OA \times OM'' \times OM^{\text{IV}} \times OM^{\text{VI}}, \text{ etc.} \times Om'' \times Om^{\text{IV}} \times Om^{\text{VI}}, \text{ etc.}$$

Dans le cas de m nombre pair, parmi toutes les lignes menées du point O aux numéros pairs, se trouveront les lignes OA et OB qui correspondront aux deux extrémités du diamètre.

Les arcs qui aboutissent aux divisions impaires, étant égaux à $\frac{2\pi}{2m} = \frac{\pi}{m}$, $\frac{6\pi}{2m} = \frac{3\pi}{m}$, etc., on trouvera

$$\overline{OM'}^2 = x^2 - 2ax \cos \frac{1\pi}{m} + a^2,$$

$$\overline{OM'''}^2 = x^2 - 2ax \cos \frac{3\pi}{m} + a^2,$$

$$\overline{OM^{\text{V}}}^2 = x^2 - 2ax \cos \frac{5\pi}{m} + a^2,$$

etc.

Mais dans le cas de m nombre impair, il résulte de la for-

mule (6) que

$$x^m+a^m=(x+a)\left(x^2-2ax\cos\frac{\pi}{m}+a^2\right)\left(x^2-2ax\cos\frac{3\pi}{m}+a^2\right),$$

etc.;

substituant donc les valeurs précédentes, et observant que $OB=x+a$, on aura

$$x^m+a^m=OB\times OM'\times OM'''\times OM^v, \text{ etc.}$$
$$\times Om'\times Om'''\times Om^v, \text{ etc.}$$

Dans le cas de m nombre pair, les extrémités A et B du diamètre, porteront des numéros pairs, ensorte que la ligne OB n'entrera plus en facteur.

On a donc cette propriété dans le cas de m nombre pair : *le produit de toutes les lignes menées du point* O *à toutes les divisions paires et impaires, en y comprenant celles qui aboutissent aux deux extrémités du diamètre, sera*

$$(x^m-a^m)(x^m+a^m)=x^{2m}-a^{2m}=0.$$

70. Les équations de la forme

$$x^{2m}-2px^m+q=0$$

peuvent être traitées comme celles qui ne renferment que deux termes : en résolvant la précédente à la manière du second degré, on en tire

$$x^m=p\pm\sqrt{p^2-q}.$$

Tant que p^2 sera plus grand que q, les valeurs de x^m seront réelles; en les représentant par α et β, on aura les deux équations

$$x^m-\alpha=0,\quad x^m-\beta=0,$$

dont on sait trouver les racines d'après ce qui précède.

Lorsqu'on aura $p^2<q$, les valeurs de x^m seront imagi-

naires, et on leur donnera la forme

$$x^m = p \pm \sqrt{-1}\,\sqrt{q-p^2};$$

si l'on pose

$$p = a, \quad \sqrt{q-p^2} = b,$$

on aura

$$x^m = a \pm b\,\sqrt{-1},$$

et il ne s'agira plus que d'extraire une racine du degré m de l'expression

$$a \pm b\,\sqrt{-1}.$$

Comme on ne peut supposer, en général,

$$a \pm b\sqrt{-1} = \cos\varphi \pm \sin\varphi.\sqrt{-1},$$

parce qu'on n'a pas toujours

$$a^2 + b^2 = 1,$$

on fera

$$a = k\cos\varphi, \quad b = k\sin\varphi,$$

d'où

$$a^2 = k^2\cos^2\varphi, \quad b^2 = k^2\sin^2\varphi,$$

et conséquemment,

$$a^2 + b^2 = k^2 \quad \text{d'où} \quad k = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{q};$$

donc

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{p}{\sqrt{q}}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{\sqrt{q-p^2}}{\sqrt{q}},$$

ensorte que

$$x^m = a \pm b\,\sqrt{-1} = k(\cos\varphi \pm \sin\varphi.\sqrt{-1});$$

mais comme les arcs φ, $\varphi + 2\pi$, $\varphi + 4\pi \ldots\ldots \varphi + 2\lambda\pi$, n étant un nombre entier quelconque, ont même sinus et même cosinus, on aura

$$x^m = k\,[\cos(\varphi + 2\lambda\pi) \pm \sin(\varphi + 2\lambda\pi).\sqrt{-1}]$$

et

$$x = k^{\frac{1}{m}}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2\lambda\pi}{m}\right) \pm \sin\left(\frac{\varphi+2\lambda\pi}{m}\right).\sqrt{-1}\right],$$

expression générale de la racine cherchée ; en faisant snccessivement $\lambda = 0, = 1, = 2$, etc., on en tire

$$x' = k^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\varphi}{m} \pm \sin\frac{\varphi}{m}.\sqrt{-1}\right),$$

$$x'' = k^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{m} \pm \sin\frac{\varphi+2\pi}{m}.\sqrt{-1}\right),$$

$$x''' = k^{\frac{1}{m}}\left(\cos\frac{\varphi+4\pi}{m} \pm \sin\frac{\varphi+4\pi}{m}.\sqrt{-1}\right),$$

etc.

Le nombre de ces racines ne peut aller au-delà de $2m$; car en faisant $\lambda = m$, $\lambda = m+1$, on retrouve les racines correspondantes à $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, etc. Si l'on multiplie l'un par l'autre les facteurs simples

$$x - k^{\frac{1}{m}}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2\lambda\pi}{m}\right) + \sin\left(\frac{\varphi+2\lambda\pi}{m}\right).\sqrt{-1}\right],$$

$$x - k^{\frac{1}{m}}\left[\cos\left(\frac{\varphi+2\lambda\pi}{m}\right) - \sin\left(\frac{\varphi+2\lambda\pi}{m}\right).\sqrt{-1}\right],$$

le produit

$$x^2 - 2k^{\frac{1}{m}}\, x \cos\left(\frac{\varphi+2\lambda\pi}{m}\right) + k^{\frac{2}{m}} \ldots \text{(A)}$$

représentera les facteurs du second degré de la proposée.

La résolution de l'équation

$$x^{2m} - 2px^m + q = 0$$

renferme la démonstration du théorème de *Moivre*, qui comprend, comme cas particulier, celui de *Cotes* (69). En

voici l'énoncé : *Si on partage un arc* AG (fig. 3) *en un nombre* m *de parties égales chacune à* AM, *et qu'à partir du point* M, *on divise la circonférence en autant de parties égales que* AM *est contenu de fois dans* AG, *et qu'en suite d'un point quelconque* O *pris sur le diamètre ou sur son prolongement, on mène les lignes* OM, O1, O2, *etc. à tous les points de division, le produit des carrés de ces lignes, sera égal à*

$$x^{2m} - 2x^m \cos\varphi + 1,$$

en nommant φ *l'arc* AG, x *la ligne qui joint le point* O *et le centre du cercle, et supposant, pour plus de commodité, le rayon égal à l'unité.*

Pour nous expliquer sur un cas particulier, soit $m = 4$, ce qui donnera les quatre lignes OM, O1, O2, O3 : on aura

$$\overline{OM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{MP}^2 = (x - CP)^2 + \overline{MP}^2$$

$$= x^2 - 2x\cos\frac{\varphi}{4} + \cos^2\frac{\varphi}{4} + \sin^2\frac{\varphi}{4} = x^2 - 2x\cos\frac{\varphi}{4} + 1,$$

$$\overline{O1}^2 = \left[x - \cos\left(\frac{\varphi + 2\pi}{4}\right)\right]^2 + \sin^2\left(\frac{\varphi + 2\pi}{4}\right)$$

$$= x^2 - 2x\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi}{4}\right) + 1,$$

$$\overline{O2}^2 = \left[x - \cos\left(\frac{\varphi + 4\pi}{4}\right)\right]^2 + \sin^2\left(\frac{\varphi + 4\pi}{4}\right)$$

$$= x^2 - 2x\cos\left(\frac{\varphi + 4\pi}{4}\right) + 1,$$

$$\overline{O3}^2 = \left[x - \cos\left(\frac{\varphi + 6\pi}{4}\right)\right]^2 + \sin^2\left(\frac{\varphi + 6\pi}{4}\right)$$

$$= x^2 - 2x\cos\left(\frac{\varphi + 6\pi}{4}\right) + 1.$$

Mais la résolution de l'équation

$$x^8 - 2x^4\cos\varphi + 1 = 0,$$

qui revient à $x^8 - 2px^4 + q = 0$, dans l'hypothèse de $q = 1$, pour laquelle on a $k = 1$ et $p = \cos\varphi$, donne, d'après la formule (A),

$$x^8 - x^4 \cos\varphi + 1 = \left[x^2 - 2x\cos\frac{\varphi}{4} + 1\right]$$
$$\left[x^2 - 2x\cos\left(\frac{\varphi+2\pi}{4}\right) + 1\right]$$
$$\left[x^2 - 2x\cos\left(\frac{\varphi+4\pi}{4}\right) + 1\right]$$
$$\left[x^2 - 2x\cos\left(\frac{\varphi+6\pi}{4}\right) + 1\right];$$

d'où l'on conclut

$$\overline{OM}^2 \times \overline{O1}^2 \times \overline{O2}^2 \times \overline{O3}^2 = x^8 - 2x^4 \cos\varphi + 1.$$

Pour $\varphi = \pi$, on a

$$\cos\varphi = -1,$$

et l'équation

$$x^8 - 2x^4 \cos\varphi + 1 = 0$$

devient

$$x^8 + 2x^4 + 1 = 0 = (x^4 + 1)^2.$$

Pour $\varphi = 0$, on a

$$\cos\varphi = 1,$$

et la proposée devient

$$x^8 - 2x^4 + 1 = 0 = (x^4 - 1)^2.$$

Dans ce dernier cas, l'arc AG devient nul, le point M est en A, la circonférence se trouve divisée, à partir du point A ou M, en quatre parties égales, tandis que, dans le théorème (69), elle était divisée en huit parties égales pour l'équation $x^4 - 1 = 0$; mais alors on ne prenait que les lignes menées du point O aux numéros pairs qui deviennent ici tous les numéros 0, 1, 2, 3 : on observera de plus que le produit $x^4 - 1$ se trouve représenté par $OA \times O1 \times O2 \times O3$. Dans le cas de $\varphi = \pi$, les arcs donnés par la construction, sont $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$, ou $1 \times \frac{2\pi}{8}$, $3 \times \frac{2\pi}{8}$, $5 \times \frac{2\pi}{8}$, $7 \times \frac{2\pi}{8}$,

c'est-à-dire, les multiples impairs de la circonférence divisée en huit parties égales. Ainsi x^4+1 devient le produit de toutes les lignes menées du point extérieur aux numéros impairs de la circonférence divisée en huit parties égales.

On voit donc que le théorème de *Moivre* contient celui de *Cotes*.

71. *Lagrange* a donné du théorème de *Cotes*, une démonstration uniquement fondée sur des principes connus à l'époque où ce second géomètre écrivait. Il est clair qu'il suffisait de trouver la décomposition en facteurs réels du second degré de

$$x^m \pm 1 = 0,$$

puisque de là suit le théorème de *Cotes*, et que réciproquement du théorème de *Cotes* résulte cette décomposition.

On avait remarqué avant *Cotes* que les cosinus

$$\cos 0y, \quad \cos y, \quad \cos 2y, \quad \cos 3y, \quad \text{etc.},$$

formaient une suite récurrente dont l'échelle de relation (*) est -1, $+2\cos y$, c'est-à-dire, que pour avoir la valeur d'un terme de cette suite, il faut multiplier le précédent par $2\cos y$, et du produit retrancher l'antépénultième terme. Cette remarque était due au géomètre français *Viete*. En effet, de la formule connue

$$2\cos a\cos b = \cos(a+b) + \cos(a-b),$$

on déduit, en faisant $b=a=y$,

$$2\cos^2 y = \cos 2y + \cos 0, \quad \text{d'où} \quad \cos 2y = 2\cos^2 y - \cos 0,$$

ce qui vérifie la proposition à l'égard du troisième terme. Pour l'étendre à un terme quelconque, faisons $a=(m-1)b$, et nous aurons

$$2\cos b\cos(m-1)b = \cos mb + \cos(m-2)b,$$

(*) Voyez le chap. XX de la première section, et le chap. XXV de celle-ci.

d'où résulte, en changeant $m-1$ en m, et b en y,

$$2\cos y\cos my = \cos(m+1)y + \cos(m-1)y;$$

et

$$\cos(m+1)y = 2\cos y\cos my - \cos(m-1)y \ldots (1).$$

Maintenant qu'on pose

$$2\cos y = x + \frac{1}{x}:$$

je dis qu'on aura

$$2\cos my = x^m + \frac{1}{x^m} \ldots\ldots (2):$$

en effet, en supposant que les deux termes consécutifs $2\cos(m-1)y$ et $2\cos my$, soient de la forme $x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}$, $x^m+\frac{1}{x^m}$, on aura, par la substitution dans (1), après avoir multiplié de part et d'autre par 2,

$$2\cos(m+1)y = \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^m+\frac{1}{x^m}\right)-\left(x^{m-1}+\frac{1}{x^{m-1}}\right)$$
$$= x^{m+1} + \frac{1}{x^{m+1}}.$$

Ainsi, pourvu que les deux premiers termes $2\cos oy$ et $2\cos y$ soient de la forme $x^m+\frac{1}{x^m}$, en faisant $m=0$ et $m=1$, ce qui est en effet, tous les autres seront nécessairement de la même forme.

Maintenant les deux équations

$$2\cos y = x + \frac{1}{x}, \quad 2\cos my = x^m + \frac{1}{x^m},$$

donnent ces deux-ci,

$$x^2 - 2x\cos y + 1 = 0, \quad x^{2m} - 2x^m\cos my + 1 = 0;$$

qui doivent donc avoir lieu en même temps; par conséquent il faut qu'elles aient une racine commune. Soit a cette racine: comme ces équations demeurent les mêmes en x et en $\frac{1}{x}$, il s'ensuit que $\frac{1}{a}$ sera encore une racine commune aux mêmes équations, ce qu'il est facile de prouver par le calcul; car la première résolue, donne

$$x = \cos y \pm \sin y . \sqrt{-1}:$$

ces racines substituées dans le premier membre de la seconde, donnent

$$\cos 2my \pm \sin 2my . \sqrt{-1} - 2(\cos my \pm \sin my . \sqrt{-1}) \cos my + 1$$

qui, en exprimant $\cos 2my$ et $\sin 2my$ en $\cos my$ et $\sin my$, se réduit à zéro. Donc $x^2 - 2x \cos y + 1$ sera un diviseur de

$$x^{2m} - 2x^m \cos my + 1 = 0.$$

Qu'on pose $my = \varphi$, d'où $y = \frac{\varphi}{m}$: on aura

$$x^{2m} - 2x^m \cos \varphi + 1 = 0,$$

divisible par $x^2 - 2x \cos \frac{\varphi}{m} + 1$: or $\cos \varphi = \cos(\varphi + 2\lambda\pi)$, λ étant un nombre entier quelconque, et π la demi-circonférence: donc en faisant $\lambda = 0, = 1 \ldots, = m - 1$, on aura cette décomposition

$$\begin{aligned} x^{2m} - 2x^m \cos \varphi + 1 = & \left[x^2 - 2x \cos \frac{\varphi}{m} + 1\right] \\ & \times \left[x^2 - 2x \cos\left(\frac{\varphi + 2\pi}{m}\right) + 1\right] \\ & \times \left[x^2 - 2x \cos\left(\frac{\varphi + 4\pi}{m}\right) + 1\right] \\ & \vdots \\ & \times \left[x^2 - 2x \cos\left(\frac{\varphi + 2(m-1)\pi}{m}\right) + 1\right]. \end{aligned}$$

Pour $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, la formule précédente devient $(x^m \mp 1)^2$.

CHAPITRE XII.

Résolution trigonométrique des équations des second et troisième degrés : trisection de l'angle.

72. CONSIDÉRONS l'équation du second degré

$$x^2 + px \pm q = 0,$$

dans laquelle nous supposerons d'abord q positif : faisant

$$x = z\sqrt{q} \ldots\ldots (1),$$

on aura

$$qz^2 + pz\sqrt{q} + q = 0, \quad \text{d'où} \quad z^2 + \frac{p}{\sqrt{q}} z + 1 = 0,$$

et divisant par z, il viendra

$$z + \frac{1}{z} = -\frac{p}{\sqrt{q}} \ldots\ldots (2).$$

1°. Si $-\frac{p}{2\sqrt{q}}$ est, abstraction faite du signe, moindre que l'unité, auquel cas les deux racines sont imaginaires, puisqu'il résulte de cette hypothèse que $\frac{p^2}{4} < q$, on fera

$$z = \cos u + \sin u . \sqrt{-1},$$

ensorte que l'équation (2) deviendra

$$-\frac{p}{\sqrt{q}} = \cos u + \sin u . \sqrt{-1} + \frac{1}{\cos u + \sin u . \sqrt{-1}}$$
$$= 2 \cos u,$$

en multipliant les deux termes de la fraction par

$$\cos u - \sin u . \sqrt{-1} :$$

on déduit de là,

$$\cos u = -\frac{p}{2\sqrt{q}};$$

Les tables de sinus feront connaître l'angle u; et comme à la même valeur de $\cos u$, répondent les angles $+u$ et $-u$, on aura pour z, et conséquemment pour x, deux valeurs qui seront imaginaires.

2°. Si le nombre $-\frac{p}{2\sqrt{q}}$ est, abstraction faite du signe, plus grand que l'unité, et alors $\frac{p^2}{4} < q$, on fera

$$z = \tang u,$$

et on aura

$$z + \frac{1}{z} = \tang u + \frac{1}{\tang u} = \frac{\sin^2 u + \cos^2 u}{\sin u \cos u} = \frac{2}{\sin 2u} = -\frac{p}{\sqrt{q}},$$

d'où on tire

$$\sin 2u = -\frac{2\sqrt{q}}{p}.$$

Les tables de sinus donneront le plus petit des angles qui répondent à cette expression de $\sin 2u$, prise positivement : cet angle pris avec le signe moins, sera la valeur de $2u$; mais à ce sinus répondent les deux arcs $2u$ et $\pi - 2u$, π étant la demi-circonférence : on aura donc pour les deux valeurs de x,

$$x = \sqrt{q} \times \tang u, \quad x = \sqrt{q} \times \tang\left(\frac{\pi}{2} - u\right),$$

racines réelles et négatives, à cause de l'arc u négatif.

3°. Dans le cas de q négatif, auquel répond, d'après l'hypothèse (1),

$$z - \frac{1}{z} = -\frac{p}{\sqrt{q}},$$

on fera

$$z = \text{tang } u ,$$

d'où

$$z - \frac{1}{z} = \left(\text{tang } u - \frac{1}{\text{tang } u}\right) = -\frac{1 - \text{tang}^2 u}{\text{tang } u} = -\frac{2}{\text{tang } 2u};$$

et conséquemment,

$$\text{tang } 2u = +\frac{2\sqrt{q}}{p}.$$

Les tables de sinus feront connaître le plus petit des angles qui répondent à cette expression de tang $2u$; mais à la tangente de $2u$, répondent les deux arcs $2u$ et $\pi + 2u$; on aura donc

$$x = \sqrt{q} \times \text{tang } u , \quad x = \sqrt{q} \times \text{tang } \left(\frac{\pi}{2} + u\right),$$

c'est-à-dire, deux racines réelles, l'une positive, et l'autre négative.

Passons à l'équation du troisième degré, et considérons d'abord la suivante,

$$x^3 + px + q = 0,$$

dont l'une des racines, est (chap. X)

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}.$$

Cette racine étant réelle, quelle que soit la valeur numérique de $\frac{p^3}{27}$, on pourra égaler $\frac{p^3}{27}$ à la tangente, par exemple, qui passe par tous les états de grandeur, et à l'effet de rendre $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}$ un carré parfait, on posera

$$\frac{p^3}{27} = \frac{q^2 \text{tang}^2 u}{4} = \frac{q^2 \sin^2 u}{4 \cos^2 u} \ldots\ldots(1),$$

d'où l'on tire

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\tfrac{1}{2}q\sqrt{\frac{\cos^2 u+\sin^2 u}{\cos^2 u}}}$$

$$+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\tfrac{1}{2}q\sqrt{\frac{\cos^2 u+\sin^2 u}{\cos^2 u}}},$$

c'est-à-dire,

$$x=\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q\left(1-\frac{1}{\cos u}\right)}+\sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q\left(1+\frac{1}{\cos u}\right)}:$$

or la relation (1) donne

$$\tfrac{1}{2}q=\frac{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}{\operatorname{tang} u};$$

substituant dans x, on trouve, après une série de réductions,

$$x=-\left(\frac{\sqrt[3]{\cot\tfrac{1}{2}u}-\sqrt[3]{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u}}{2}\right)\times 2\sqrt{\frac{p}{3}},$$

puis posant

$$\sqrt[3]{\cot\tfrac{1}{2}u}=\cot u',\quad \text{d'où}\quad \sqrt[3]{\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}u}=\operatorname{tang} u',$$

et observant que

$$\frac{\cot u'-\operatorname{tang} u'}{2}=\cot 2u',$$

la valeur de x devient

$$x=-2\cot 2u'.\sqrt{\frac{p}{3}}.$$

Soit, en second lieu,

$$x^3+px-q=0:$$

si l'on suit attentivement le calcul précédent, on reconnaîtra que le changement du signe de q n'a d'autre effet que de changer le signe de la valeur précédente de x; on

aura donc

$$x = 2 \cot 2u' \sqrt{\frac{p}{3}}.$$

Soit, en troisième lieu, l'équation

$$x^3 - px + q = 0:$$

on a

$$x = \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\tfrac{1}{2}q - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Si l'on suppose d'abord $\frac{p^3}{27} < \frac{q^2}{4}$ et qu'on fasse

$$\frac{p^3}{27} = \frac{q^2 \sin^2 u}{4}, \quad \text{d'où} \quad \sin u = \frac{2p}{3q} \cdot \sqrt{\frac{p}{3}};$$

la racine précédente deviendra

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}(1 - \cos u)} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2}(1 + \cos u)}$$

$$= \sqrt[3]{-\frac{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}{\sin u}(1 - \cos u)} + \sqrt[3]{-\frac{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}{\sin u}(1 + \cos u)}$$

$$= \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27}}\left(\frac{\cos u - 1}{\sin u}\right)} - \sqrt[3]{\sqrt{\frac{p^3}{27}}\left(\frac{\cos u + 1}{\sin u}\right)}$$

$$= \left[\sqrt[3]{-(\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} u)} - \sqrt[3]{\cot \tfrac{1}{2} u}\right] \sqrt{\frac{p}{3}}$$

$$= -2\left[\frac{\sqrt[3]{\operatorname{tang} \frac{1}{2} u} + \sqrt[3]{\cot \frac{1}{2} u}}{2}\right] \sqrt{\frac{p}{3}}$$

$$= -2\left[\frac{\operatorname{tang} u' + \cot u'}{2}\right] \sqrt{\frac{p}{3}} = -\frac{\sqrt{\frac{p}{3}}}{\sin 2u'}:$$

en posant

$$\sqrt[3]{\tang \tfrac{1}{2} u} = \tang u'.$$

Sous la relation $\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$, et sous l'hypothèse actuelle $p < 0$, on tombe dans le cas irréductible (56), et alors on ne peut plus supposer

$$\frac{p^3}{27} = \frac{q^2 \sin^2 u}{4}:$$

puisqu'on aurait le sinus plus grand que le rayon : nous reviendrons incessamment sur ce cas, et nous le traiterons sous deux points de vue différens.

Pour l'équation

$$x^3 - px - q = 0,$$

les mêmes calculs auraient conduit à la valeur

$$x = + \frac{2\sqrt{\frac{p}{3}}}{\sin 2u'}.$$

Reprenons l'équation

$$x^3 - px + q = 0:$$

l'hypothèse

$$x = r\left(z + \frac{1}{z}\right) \ldots\ldots (1),$$

r étant une quantité indéterminée, donnera la transformée

$$r^3\left(z^3 + \frac{1}{z^3}\right) + (3r^3 - pr)\left(z + \frac{1}{z}\right) + q = 0:$$

déterminant r au moyen de l'équation

$$3r^3 - pr = 0,$$

on aura

$$r = \sqrt{\frac{p}{3}}:$$

et la valeur de z dépendra d'une réduite du sixième degré résoluble à la manière du second : en effet, il restera

$$r^3\left(z^3+\frac{1}{z^3}\right)+q=0,$$

d'où

$$z^3+\frac{1}{z^3}=-\frac{q}{r^3}=-\frac{3q\sqrt{3}}{p\sqrt{p}}=2h\ldots.(2).$$

Les équations (1) et (2) serviront ensemble à résoudre la proposée. Supposons d'abord que le nombre proposé h soit, abstraction faite du signe, moindre que l'unité : alors la quantité $\frac{1}{4}q^2-\frac{1}{27}p^3$ est négative, et la proposée tombe dans le cas irréductible : que l'on fasse

$$z=\cos u+\sin u.\sqrt{-1},$$

d'où

$$x=\left(z+\frac{1}{z}\right)\sqrt{\frac{p}{3}}=2\cos u\times\sqrt{\frac{p}{3}}\ldots..(3),$$

et de là, d'après le théorème démontré (chap. X),

$$(\cos u\pm\sin u.\sqrt{-1})^m=\cos mu\pm\sin mu.\sqrt{-1},$$

on déduit

$$z^3+\frac{1}{z^3}=\cos 3u+\sin 3u.\sqrt{-1}+\frac{1}{\cos 3u+\sin 3u.\sqrt{-1}},$$

c'est-à-dire,

$$z^3+\frac{1}{z^3}=2\cos 3u,\quad \text{d'où}\quad \cos 3u=h.$$

Soit $3u$ le plus petit des angles dont le cosinus est h, angle qui sera donné par les tables, on aura pour $3u$ les trois valeurs $3u$, $2\pi+3u$, $4\pi+3u$, et par conséquent les trois valeurs de x seront, d'après l'équation (3),

$$x = 2\cos u \cdot \sqrt{\frac{p}{3}},$$

$$x = 2\cos\left(\frac{2\pi}{3} + u\right)\cdot\sqrt{\frac{p}{3}},$$

$$x = 2\cos\left(\frac{4\pi}{3} + u\right)\cdot\sqrt{\frac{p}{3}}.$$

On voit clairement ici comment l'imaginaire $\sqrt{-1}$ qui, dans le cas irréductible, s'introduit dans les trois racines, disparaît dans l'expression de $r\left(z + \frac{1}{z}\right)$, et comment l'hypothèse $z = \cos u + \sin u.\sqrt{-1}$ fait prendre aux racines, une forme à la fois réelle et finie.

Dans le cas de $h = 1$, on a $3u = 0$, d'où $u = 0$; d'ailleurs

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}:$$

donc les racines deviennent

$$x = 2\sqrt{\frac{p}{3}}, \quad x = -\sqrt{\frac{p}{3}}, \quad x = -\sqrt{\frac{p}{3}};$$

mais la relation (2) se change alors dans celle-ci

$$-\frac{3q\sqrt{3}}{p\sqrt{p}} = 2:$$

de laquelle on tire

$$\sqrt{\frac{3}{p}} = -\frac{2p}{3q}, \text{ d'où } \sqrt{\frac{27}{p^3}} = -\frac{2}{q}, \quad \sqrt{\frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2},$$

et enfin,

$$-\sqrt{\frac{p}{3}} = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}}.$$

ainsi les trois racines se changent dans les suivantes,

$$x = 2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}, \quad x = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}}, \quad x = -\sqrt[3]{-\frac{q}{2}},$$

qui sont celles que nous avons trouvées (56).

Lorsqu'abstraction faite du signe, le nombre h est plus grand que l'unité, on doit faire

$$z^3 = \tang u,$$

d'où

$$z^3 + \frac{1}{z^3} = \frac{2}{\sin 2u} \quad \text{et} \quad \sin 2u = \frac{1}{h}:$$

on tire de là,

$$z = \sqrt[3]{\tang u} = \tang u',$$

et par conséquent,

$$x = \frac{2\sqrt{\frac{p}{3}}}{\sin 2u'}:$$

les deux autres racines seront

$$x = \left[\alpha \tang u' + \frac{1}{\alpha \tang u'}\right] \sqrt{\frac{p}{3}}$$
$$= \frac{\alpha \tang^2 u' + \alpha'}{\tang u'} \times \sqrt{\frac{p}{3}},$$

$$x = \left[\alpha' \tang u' + \frac{1}{\alpha' \tang u'}\right] \sqrt{\frac{p}{3}}$$
$$= \frac{\alpha' \tang^2 u' + \alpha}{\tang u'} \times \sqrt{\frac{p}{3}},$$

α et α' étant $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ et $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$; réduisant, on trouvera

$$x = \left[\frac{-1 \mp \cos 2u' \sqrt{-3}}{\sin 2u'}\right] \sqrt{\frac{p}{3}}.$$

Lorsque le coefficient p est positif, pour que la quantité r soit réelle, il faut poser

$$x = r\left(z - \frac{1}{z}\right),$$

d'où

$$r^3\left(z^3-\frac{1}{z^3}\right)+(pr-3r^3)\left(z-\frac{1}{z}\right)+q=0:$$

on a donc

$$r=\sqrt{\frac{p}{3}},\quad x=\left(z-\frac{1}{z}\right).\sqrt{\frac{p}{3}},$$

et la transformée

$$z^3-\frac{1}{z^3}=-\frac{3q\sqrt{3}}{p\sqrt{p}}=2h:$$

on fera alors

$$\frac{1}{z^3}=\operatorname{tang} u,$$

d'où

$$-\operatorname{tang} u+\frac{1}{\operatorname{tang} u}=2h \quad \text{et} \quad \operatorname{tang} 2u=\frac{1}{h}:$$

on aura donc l'angle u au moyen des tables.

Soit encore

$$\sqrt[3]{\operatorname{tang} u}=\operatorname{tang} u':$$

la racine réelle sera

$$x=\frac{2\sqrt{\frac{p}{3}}}{\operatorname{tang} 2u'},$$

et les deux racines imaginaires seront représentées par

$$x=\left[\frac{-\cos 2u'\mp\sqrt{-3}}{\sin 2u'}\right]\sqrt{\frac{p}{3}}.$$

Les racines de l'équation du quatrième degré, étant des fonctions très-simples de celles de la réduite, pourront être facilement traduites en quantités trigonométriques.

73. *Étant donné le cosinus d'un angle, trouver le cosinus de son tiers.*

Soient $3m$ l'angle donné, a son cosinus, m l'angle cherché, $\cos m = x$: on a d'abord cette formule trigonométrique connue

$$\cos 3m = \cos^3 m - 3 \sin^2 m \cos m,$$

laquelle, à cause de $\sin^2 m = 1 - \cos^2 m$, devient

$$\cos 3m = 4 \cos^3 m - 3 \cos m;$$

conséquemment,

$$\frac{a}{4} = x^3 - \tfrac{3}{4}x, \quad \text{d'où} \quad x^3 - \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{4}a = 0.$$

On sait que $a = \cos 3m$ répond à un nombre indéfini d'arcs différens qui sont $3m$, $2\pi - 3m$, $2\pi + 3m$, $4\pi - 3m$, $4\pi + 3m$, etc., et qui ont, en effet, même cosinus en nombre et en signe : mais il arrive, ainsi qu'on l'a vu dans le chapitre précédent, que, parmi les cosinus des arcs sous-triples des précédens, trois seulement sont différens, et conséquemment propres à exprimer les racines de la proposée.

Comme cette proposée manque de second terme, la somme des trois cosinus qui en sont les racines, est nulle : on a donc

$$\cos m + \cos\left(\frac{2\pi}{3} + m\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3} + m\right) = 0.$$

En effet, cette quantité développée devient

$$\cos m\left(1 + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3}\right) - \sin m\left(\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3}\right) = 0:$$

il faut donc qu'on ait séparément

$$1 + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} = 0, \quad \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3} = 0,$$

conditions qui ont effectivement lieu, en observant que

$$\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$\cos\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2}, \quad \sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le problème est donc en même temps résolu par rapport aux arcs $3m$, $2\pi + 3m$, $4\pi + 3m$: mais qu'on prenne l'arc $2\pi - 3m$, qui a même cosinus en nombre et en signe que l'arc $3m$, et on aura encore

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3} - m\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3} - m\right) + \cos\left(\frac{6\pi}{3} - m\right) = 0,$$

qui donne

$$\cos m\left(\cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} + \cos 2\pi\right)$$
$$+ \sin m\left(\sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3} + \sin 2\pi\right) = 0 :$$

on est donc ramené aux conditions précédentes,

$$1 + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} = 0, \quad \sin\frac{2\pi}{3} + \sin\frac{4\pi}{3} = 0 ;$$

et conséquemment, le problème est encore résolu pour les arcs $2\pi - 3m$, $4\pi - 3m$, $6\pi - 3m$.

On trouve d'ailleurs,

$$\cos m \times \cos\left(\frac{2\pi}{3} + m\right) \times \cos\left(\frac{4\pi}{3} + m\right) = x^3 - \frac{3}{4}x ;$$

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3} - m\right) \times \cos\left(\frac{4\pi}{3} - m\right) \times \cos\left(\frac{6\pi}{3} - m\right) = x^3 - \frac{3}{4}x ,$$

et comme chacun de ces produits $= \frac{a}{4}$, on est ramené à l'équation

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{a}{4} = 0.$$

Or cette équation tombe dans le cas irréductible, c'est-à-dire que ses trois racines se présentent sous forme imaginaire. En effet, la condition

$$\frac{p^3}{27} > \frac{q^2}{4}$$

est satisfaite, puisque le cosinus a étant toujours plus petit que l'unité, on a

$$\frac{1}{64} > \frac{a^2}{64},$$

ce qui est le caractère de l'irréductibilité. On sait ce que deviennent les racines, lorsque

$$\frac{p^3}{27} = \frac{q^2}{4},$$

ce qui arrive ici pour $a = 1$. D'ailleurs, on reconnaît, *à priori*, que la proposée tombe dans le cas irréductible; car elle ne peut admettre que des racines réelles, et c'est alors seulement que l'irréductibilité a lieu.

Nous nous proposerons donc de ramener toutes les équations du troisième degré, lorsqu'elles tombent dans le cas irréductible, à une forme telle qu'elles soient comparables à l'équation que fournit le problème de la trisection de l'angle. Mais avant, examinons plus particulièrement cette équation

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{a}{4} = 0,$$

et supposons que son dernier terme soit positif, ou qu'on ait

$$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{a}{4} = 0.$$

Le produit des racines qui sont réelles, sera donc négatif, et alors, ou les trois racines seront négatives, ou il y en aura une négative et deux positives. Mais on aperçoit aisément qu'elles ne peuvent être toutes trois négatives, parce que leur somme est zéro, d'après la composition de l'équation. Ainsi, lorsque le dernier terme est positif, il y a nécessairement une racine négative et deux positives. Dans le cas du dernier terme négatif, il faut qu'il y ait une racine positive et deux négatives, parce qu'autrement les trois racines devraient être positives, ce qui ne peut avoir lieu.

Si l'angle donné est droit, le dernier terme est zéro : en effet, dans ce cas, les arcs tiers sont $\frac{\frac{1}{2}\pi}{3}$, $\frac{\frac{1}{2}\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$, $\frac{\frac{1}{2}\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}$; le cosinus de $\frac{\frac{1}{2}\pi}{3} + \frac{4\pi}{3}$, ou de $\frac{3\pi}{2}$ est zéro, et ceux de $\frac{\frac{1}{2}\pi}{3}$ et $\frac{\frac{1}{2}\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}$, ou de $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{5\pi}{6}$ sont égaux et de différens signes.

Revenons maintenant à la question énoncée plus haut, et prenons pour exemple l'équation

$$x^3 - \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{12} = 0,$$

qu'on peut écrire ainsi qu'il suit,

$$x^3 - \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{4}.\tfrac{1}{3} = 0:$$

alors x représente le cosinus du tiers d'un arc dont le triple a $\frac{1}{3}$ pour cosinus : ainsi, pour avoir la valeur de x, il faut chercher le logarithme de $\frac{1}{3}$, et l'arc dont log cos $=$ log $\frac{1}{3}$: divisant cet arc par 3, on prendra le cosinus du quotient qui sera l'une des racines. On sait trouver les autres.

Passons à l'équation plus générale

$$x^3 - px + q = 0\ldots\ldots(1):$$

on suppose ici le coefficient p négatif, afin que la proposée puisse tomber dans le cas irréductible : le terme tout connu peut d'ailleurs être positif ou négatif. On fera, dans la proposée,

$$x = rx',$$

ce qui la changera en

$$r^3x'^3 - prx' + q = 0,$$

ou

$$x'^3 - \frac{p}{r^2}x + \frac{q}{r^3} = 0\ldots\ldots(2).$$

Sous cette forme, la précédente devient comparable avec

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{a}{4} = 0\ldots\ldots(3),$$

en posant

$$\frac{3}{4} = \frac{p}{r^2}, \quad \text{d'où} \quad r = \frac{2\sqrt{p}}{\sqrt{3}}.$$

Faisant cette substitution dans (2), elle devient

$$x'^3 - \frac{3}{4}x' + \frac{3q.\sqrt{3}}{8p\sqrt{p}}.$$

Si donc $\frac{3q.\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}}$ est plus petit que l'unité, la précédente rentrera dans le cas de l'équation (3), dans laquelle a est plus petit que l'unité : or cette condition a toujours lieu lorsque l'équation donnée tombe dans le cas irréductible ; car alors on a

$$\frac{1}{27}p^3 > \frac{1}{4}q^2,$$

Cela posé, on peut résoudre cette équation par la méthode dont nous venons de faire usage à l'égard de l'équation

$$x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{1}{12} = 0.$$

Dans le cas de

$$\frac{3q\sqrt{3}.}{2p\sqrt{p}} > 1,$$

on aurait un cosinus plus grand que l'unité, et dont, conquemment, on ne pourrait assigner l'arc correspondant.

74. Cherchons maintenant à transformer

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}\right)}+\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}-\frac{p^3}{27}}\right)},$$

qui exprime l'une des racines de l'équation du troisième

degré. On a

$$a+b\sqrt{-1}=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sqrt{-1}\right):$$

or a et b étant des quantités réelles, $\sqrt{a^2+b^2}$ sera plus grand que a, ensorte que $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ sera plus petit que l'unité, ainsi que $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. On peut donc supposer que $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ soit le cosinus d'un arc inconnu x qu'on peut trouver par le moyen des tables, puisque les nombres a et b sont donnés; et, dans cette supposition, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ sera le sinus du même arc, comme on s'en convaincra en observant que le rayon étant l'unité, on a

$$1-\frac{a^2}{a^2+b^2}=\frac{b^2}{a^2+b^2}:$$

ensorte que

$$a+b\sqrt{-1}=\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos x+\sin x.\sqrt{-1}),$$

et, d'après le théorème (chap. X),

$$\sqrt[3]{(a+b\sqrt{-1})}=\sqrt[6]{a^2+b^2}\,(\cos\tfrac{1}{3}x+\sin\tfrac{1}{3}x.\sqrt{-1}):$$

substituant donc $-\frac{q}{2}$ pour a, et $\sqrt{\frac{p^3}{27}-\frac{q^2}{4}}$ pour b, on aura

$$\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}+\sqrt{-1}\sqrt{\frac{p^3}{27}-\frac{q^2}{4}}\right)}+\sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2}-\sqrt{-1}\sqrt{\frac{p^3}{27}-\frac{q^2}{4}}\right)}$$
$$=\left\{\begin{matrix}\cos\frac{1}{3}x+\sin\frac{1}{3}x.\sqrt{-1}\\ +\cos\frac{1}{3}x-\sin\frac{1}{3}x.\sqrt{-1}\end{matrix}\right\}\sqrt[6]{\frac{p^3}{27}},$$

x étant l'arc dont le cosinus

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{-q\sqrt{27}}{2\sqrt{p^3}}=\frac{-3q\cdot\sqrt{3}}{2p\sqrt{p}}$$

Ainsi la première racine est

$$x = 2\cos\tfrac{1}{3}x \times \sqrt{\frac{p}{3}},$$

et la condition sous laquelle le cosinus est < 1, est exprimée par

$$\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}.$$

Les deux autres racines se produisent sous une forme à la fois réelle et finie.

On voit donc avec quelle facilité on peut, au moyen des tables des logarithmes des lignes trigonométriques, évaluer en nombres, les racines des équations des second et troisième degrés, même lorsque les racines de cette dernière tombent dans le cas irréductible, ce qui ne peut se faire autrement, dans ce dernier cas, qu'en développant les formules générales qui les représentent, en suites infinies pour les obtenir sous forme réelle, et convergentes pour les calculer avec l'approximation suffisante. Le lecteur fera bien de résoudre trigonométriquement quelques équations dont les coefficiens seront en nombres.

CHAPITRE XIII.

Résolution algébrique de l'équation $x^m - 1 = 0$.

75. Nous avons annoncé l'application de la méthode (54) à la résolution algébrique de l'équation $x^m - 1 = 0$: tel est le sujet de ce chapitre qui est encore tiré de la *Résolution des équations numériques*.

76. Nous avons démontré (chap. IX) que α que nous remplacerons ici par r, étant une racine autre que l'unité, de l'équation

$$x^m - 1 = 0,$$

on pouvait représenter ses $m - 1$ autres racines par les termes de la série géométrique

$$r, \quad r^2, \quad r^3, \quad r^4, \ldots\ldots r^{m-1}.$$

77. M. *Gauss* a eu l'idée heureuse de substituer à la progression arithmétique des exposans, une progression géométrique, en vertu du fameux théorème de *Fermat*, démontré (chap. IX). Soit donc a une racine primitive pour le nombre premier m, de manière que les $m - 1$ termes de la progression géométrique

$$a, \quad a^2, \quad a^3, \quad a^4, \ldots\ldots a^{m-1},$$

étant divisés par m, donnent pour restes tous les nombres moindres que $m - 1$, et dont l'unité sera le dernier : les $m - 1$ racines

$$r, \quad r^a, \quad r^{a^2}, \ldots\ldots r^{a^{m-1}},$$

pourront, en faisant abstraction de l'ordre, être représentées

par la série

$$r, \quad r^a, \quad r^{a^2}, \quad r^{a^3} \ldots\ldots r^{a^{m-2}}:$$

car comme on a, par l'équation

$$x^m - 1 = 0,$$

dont r est supposé racine, $r^m = 1$, il est visible qu'à la place de chaque puissance de r, comme r^λ, lorsque $\lambda > m$, on pourra toujours prendre la puissance r^ν, ν étant le reste de la division de λ par m : ainsi, dans la série précédente, on pourra toujours réduire les exposans de r, à leurs restes, après la division par m, restes que nous avons vu comprendre tous les nombres $1, 2, 3 \ldots\ldots m - 1$, mais dans un ordre différent de l'ordre naturel, ce qui est indifférent pour les racines r, r^2, r^3, etc.

Par exemple, l'équation étant

$$x^{19} - 1 = 0,$$

et r une des racines, toutes les autres racines, différentes de l'unité, seront

$$r, \quad r^2, \quad r^3 \ldots\ldots r^{18};$$

mais 2 étant la plus petite racine primitive par rapport à 19, nombre qu'on prendra pour a, nous avons vu (49) que les restes de la division par 19, des nombres

$$2^0, \quad 2^1, \quad 2^2 \ldots\ldots\ldots 2^{17},$$

étaient la suite des nombres depuis 1 jusqu'à 18, ensorte qu'on peut prendre les nombres a^0, a^1, $a^2 \ldots\ldots a^{17}$ pour les exposans de r.

L'avantage de cette nouvelle forme de racines, consiste en ce que si, dans la série des racines

$$r, \quad r^a, \quad r^{a^2}, \quad r^{a^3} \ldots\ldots\ldots r^{a^{m-2}},$$

on met r^a en place de r, elle devient

$$r^a, \quad r^{a^2}, \quad r^{a^3}, \quad r^{a^4} \ldots\ldots r,$$

18..

si on y met r^{a^2} à la place de r, elle devient

$$r^{a^2},\quad r^{a^3},\quad r^{a^4},\quad r^{a^5},\ldots\ldots r,\quad r^{a},$$

et ainsi de suite.

En effet, il est visible que par la substitution de r^a pour r, r^a devient $(r^a)^a = r^{a^2}$; r^{a^2} devient $(r^a)^{a^2} = r^{a^3}$, et que le dernier terme $r^{a^{m-2}}$ devient $(r^a)^{a^{m-2}} = r^{a^{m-1}} = r$, parce que le reste de la division de a^{m-1} par m est l'unité. De même, par la substitution de r^{a^2} en place de r, le terme r^{a^2} devient $(r^{a^2})^a = r^{a^3}$, ainsi de suite, et le dernier terme $r^{a^{m-2}}$ devient $(r^{a^2})^{a^{m-2}} = r^{m} = r^{a^{m-1}a} = r^a$, parce que le reste de la division de a^{m-1} par m, est l'unité.

Cela posé, si pour résoudre l'équation

$$x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} + \ldots\ldots + 1 = 0,$$

dont le premier membre est le quotient de $x^m - 1$ par $x - 1$, et dont les racines sont

$$r,\quad r^a,\quad r^{a^2}\ldots\ldots r^{a^{m-2}},$$

r^m étant $= 1$, en vertu de l'équation $x^m - 1 = 0$, on emploie la méthode (54 et suiv.), on aura, en remplaçant x', x'', x''', etc. par r, r^a, etc.

$$t = r + \alpha r^a + \alpha^2 r^{a^2} + \alpha^3 r^{a^3} + \ldots\ldots + \alpha^{m-2} r^{a^{m-2}},$$

où α est une des racines de l'équation

$$y^{m-1} - 1 = 0:$$

si on développe la puissance $m-1$ de t, ayant soin de rabaisser les puissances de α et r au-dessous de α^{m-1} et r^m, à cause de $\alpha^{m-1} = 1$ et $r^m = 1$, on aura cette fonction ordonnée suivant les puissances de α,

$$\theta = t^{m-1} = \xi^0 + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \ldots\ldots + \alpha^{m-2}\xi^{(m-2)},$$

où ξ^0, ξ', ξ'', etc. seront des fonctions rationnelles et entières

de r, qui ne changeront pas par la substitution de r^a, r^{a^2}, r^{a^3}, etc. en place de r, puisque nous avons démontré (54 et suiv.) que ces quantités, lorsqu'elles étaient fonctions de x', x'', x''', etc., étaient invariables, lorsqu'on augmentait chaque accent de un, deux, trois, etc. accens, ce qui répond aux changemens de r en r^a, de r^a en r^{a^2}, etc., de r en r^{a^2}, r^a en r^{a^3}, etc., en observant que remplacer r par r^a, c'est remplacer r^a par r^{a^2}, r^{a^2} par r^{a^3}, etc.; qu'aussi changer r en r^{a^2}, c'est changer r^a en r^{a^3}, r^{a^2} en r^{a^4}, etc.

On peut démontrer que chacune des fonctions ξ^0, ξ', ξ'', etc. est réductible à la forme

$$A + B(r + r^a + r^{a^2} + \ldots\ldots + r^{a^{m-2}}),$$

A et B étant des quantités connues indépendantes de r : c'est ce que nous ferons voir dans un cas particulier, parce qu'il sera facile de généraliser la conclusion. Supposons donc qu'il s'agisse de l'équation

$$x^5 - 1 = 0:$$

en ôtant par la division, la racine 1, on a cette équation du quatrième degré

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

dont les racines seront r, r^2, r^3, r^4. Puisqu'on a ici $m = 5$, on trouve par la table (49) que la plus petite racine primitive est 2, de sorte qu'on a $a = 2$, et que les racines dont il s'agit, peuvent être représentées par les puissances

$$r, \quad r^a, \quad r^{a^2}, \quad r^{a^3},$$

lesquelles se rabaissent, à cause de $r^5 = 1$, à celles-ci,

$$r, \quad r^2, \quad r^4, \quad r^3,$$

en prenant, au lieu de $2^3 = 8$, le reste de la division de 8

par 5. Ainsi, au lieu de

$$t = r + \alpha r^{a} + \alpha^{2} r^{a^2} + \alpha^{3} r^{a^3},$$

on pourra poser

$$t = r + \alpha r^{2} + \alpha^{2} r^{4} + \alpha^{3} r^{3},$$

en prenant pour α une racine de l'équation $y^4 - 1 = 0$, de manière que l'on ait $\alpha^4 = 1$.

Pour trouver la fonction θ, il faut élever t à la quatrième puissance, et développer suivant les puissances de α, en rabaissant celles-ci au-dessous de α^4, et celles de r au-dessous de r^5, par les conditions $\alpha^4 = 1$, $r^5 = 1$. Ce calcul qui n'a d'autres difficultés que la longueur, mais qui peut cependant s'exécuter assez rapidement, en y mettant de l'ordre, donne

$$\begin{aligned}\theta = {} & 12 + 13\,(r + r^2 + r^3 + r^4) + \alpha\,[16 + 12\,(r + r^2 + r^3 + r^4)] \\ & + \alpha^2\,[24 + 10\,(r + r^2 + r^3 + r^4)] + 16\alpha^3\,(r + r^2 + r^3 + r^4):\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}\xi^{\circ} &= 12 + 13\,(r + r^2 + r^3 + r^4) = 12 - 13 = -1, \\ \xi' &= 16 + 12\,(r + r^2 + r^3 + r^4) = 16 - 12 = 4, \\ \xi'' &= 24 + 10\,(r + r^2 + r^3 + r^4) = 24 - 10 = 14, \\ \xi''' &= 16\,(r + r^2 + r^3 + r^4) = -16,\end{aligned}$$

en observant qu'à cause de

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

on a

$$r + r^2 + r^3 + r^4 = -1;$$

conséquemment,

$$\theta = -1 + 4\alpha + 14\alpha^2 - 16\alpha^3.$$

Ainsi, dans ce cas, et généralement, les fonctions ξ°, ξ', ξ'', etc. sont données en nombres.

Désignant donc par 1, α, β, γ, etc. les $m-1$ racines de l'équation

$$y^{m-1}-1=0,$$

et par θ^0, θ', θ'', θ''', etc. les valeurs de θ qui répondent aux substitutions de ces racines pour α dans la formule

$$\theta=\xi^0+\alpha\xi'+\ldots\ldots+\alpha^{m-2}\xi^{(m-2)},$$

on aura sur-le-champ, par les formules (54), en écrivant $m-1$ pour m, r pour x', r^{α} pour x'', r^{α^2} pour x''', etc.,

$$r=\frac{\sqrt[m-1]{\theta^0}+\sqrt[m-1]{\theta'}+\sqrt[m-1]{\theta''}+\text{etc.}}{m-1},$$

$$r^{\alpha}=\frac{\sqrt[m-1]{\theta^0}+\alpha^{m-2}\sqrt[m-1]{\theta'}+\beta^{m-2}\sqrt[m-1]{\theta''}+\text{etc.}}{m-1},$$

$$r^{\alpha^2}=\frac{\sqrt[m-1]{\theta^0}+\alpha^{m-3}\sqrt[m-1]{\theta'}+\beta^{m-3}\sqrt[m-1]{\theta''}+\text{etc.}}{m-1},$$

etc.

Dans le cas particulier de $m=5$, l'équation

$$y^4-1=0=(y^2-1)(y^2+1)$$

donne

$$y=1,\quad y=-1,\quad y=\sqrt{-1},\quad y=-\sqrt{-1},$$

qu'il faudra substituer, à l'exception de $y=1$, pour α dans

$$\theta=-1+4\alpha+14\alpha^2-16\alpha^3:$$

on aura ainsi,

$$\theta'=25,\quad \theta''=-15+20\sqrt{-1},\quad \theta'''=-15-20\sqrt{-1}:$$

or $\sqrt[4]{\theta^0}$ ou t répondant à $\alpha=1$, on a

$$\sqrt[4]{\theta^0}=r+r^2+r^4+r^3=-1;$$

conséquemment la première racine

$$r=\tfrac{1}{4}[-1+\sqrt{5}+\sqrt[4]{(-15+20\sqrt{-1})}+\sqrt[4]{(-15-20\sqrt{-1})}].$$

Mais en observant que l'exposant $m-1=4=2\times 2$, on pourra faire usage de la seconde méthode (chap. cité) : on prendra donc pour α une des racines de l'équation

$$y^2-1=0,$$

de sorte qu'à cause de l'équation $\alpha^2=1$, l'expression de la fonction t, savoir,

$$t=r+\alpha r^2+\alpha^2 r^4+\alpha^3 r^3$$

deviendra

$$t=X'+\alpha X'',$$

où

$$X'=r+r^4,\quad X''=r^2+r^3:$$

faisant le carré de t, on trouve

$$\theta=t^2=\xi^0+\alpha\xi',\quad \xi^0=X'^2+X''^2,\quad \xi'=2X'X'';$$

substituant les valeurs de X', X'' en r, développant les carrés et les produits, et rabaissant les puissances de r au-dessous de r^5, on trouve

$$\xi^0=r^2+2+r^3+r^4+2+r=4+r+r^2+r^3+r^4,$$
$$\xi'=2(r^3+r^4+r+r^2)=2(r+r^2+r^3+r^4):$$

donc, comme $r+r^2+r^3+r^4=-1$, on aura

$$\xi^0=3,\quad \xi'=-2.$$

Ainsi l'expression générale de θ deviendra

$$\theta=3-2\alpha.$$

Comme les valeurs de α sont 1 et -1, on aura pour la première,

$$\sqrt{\theta^0}=t=X'+X''=r+r^4+r^2+r^3=-1,$$
$$\sqrt{\theta'}=\sqrt{5}.$$

Portant ces valeurs dans les formules générales de X′, X″, etc. données (54), on trouvera

$$X' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \quad X'' = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

On aura ainsi, par la valeur de X′, celle de $r + r^{\lambda^2}$, somme de deux des quatre racines de la proposée. Pour avoir la racine r en particulier, on fera de nouveau un calcul semblable, et considérant les deux racines r, r^{λ^2} comme celles d'une équation du second degré. On posera donc

$$t_1 = r + \alpha r^{\lambda^2}$$

et

$$\theta_1 = t_1^2 = \xi_1^0 + \alpha \xi_1',$$

où

$$\xi_1^0 = r^2 + r^8 \quad \text{et} \quad \xi_1' = 2r^5.$$

Ici on voit que les valeurs ξ_1^0, ξ_1' sont données au moyen des valeurs déjà connues de X′ et X″. En effet, à cause de $r^5 = 1$ et de $r^8 = r^3$, on a

$$\xi_1^0 = r^2 + r^3 = X'' \quad \text{et} \quad \xi_1' = 2;$$

donc

$$\theta_1 = X'' + 2\alpha,$$

et substituant pour α la seconde des racines de l'équation $y^2 - 1$, qui sont 1, -1, on aura

$$\theta_1' = X'' - 2\alpha;$$

or,

$$\sqrt[2]{\theta_1} = t_1 = r + r^{\lambda^2} = X';$$

donc, par la formule connue,

$$r = \frac{\sqrt[2]{\theta^0} + \sqrt[2]{\theta'}}{2} = \frac{X' + \sqrt{X'' - 2}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5} + \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

La seconde racine r^4 sera donnée par la formule

$$r^4 = \frac{\sqrt[5]{t^0} - \sqrt[5]{t'}}{2},$$

qui correspond à la seconde valeur de $\alpha = -1$; on aura donc

$$r^4 = \frac{X' - \sqrt{X'' - 2}}{4} = \frac{-1 + \sqrt{5} - \sqrt{-10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Mais si l'on observe que X′ devient X″ et que X″ devient X′, en changeant r en r^2, et conséquemment r^4 en r^3 il ne faudra plus, pour avoir les racines r^2 et r^3, que changer X′ en X″ et X″ en X′ dans r et r^4, ce qui donne

$$r^2 = \frac{X'' + \sqrt{X' - 2}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{5} + \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$r^3 = \frac{X'' - \sqrt{X' - 2}}{2} = \frac{-1 - \sqrt{5} - \sqrt{-10 + 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Comme l'équation

$$x^6 - 1 = 0,$$

peut se rabaisser à celle-ci,

$$x^4 + x^2 + 1 = 0,$$

au moyen de la division par le facteur $x^2 - 1$, correspondant aux deux racines $+1$ et -1, et comme cette équation du quatrième degré est résoluble à la manière du second, nous passerons de suite à l'équation

$$x^7 - 1 = 0,$$

laquelle étant dégagée de la racine 1, devient

$$x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

dont les racines seront r, r^2, r^3, r^4, r^5, r^6. La plus petite racine

primitive pour le nombre 7 est 3 ; ainsi on aura la progression

$$3^0,\ 3^1,\ 3^2,\ 3^3\ 4^4,\ 3^5$$

des exposans de r, qui, divisés par 7, donneront les restes

$$1,\ 3,\ 2,\ 6,\ 4,\ 5:$$

on aura donc pour les racines de l'équation proposée,

$$r^1,\ r^3,\ r^2,\ r^6,\ r^4,\ r^5,$$

qu'on prendra pour x', x'', x''', etc.

Maintenant on fera

$$t = r + \alpha r^3 + \alpha^2 r^2 + \alpha^3 r^6 + \alpha^4 r^4 + \alpha^5 r^5,$$

en prenant pour α une racine quelconque de l'équation

$$y^6 - 1 = 0;$$

ensuite on formera la fonction $\theta = t^6$. Mais comme l'exposant $6 = 2.3$, on pourra simplifier le calcul et les résultats, en ne prenant d'abord ponr α qu'une racine de l'équation

$$y^2 - 1 = 0,$$

ce qui, à cause de $\alpha^2 = 1$, réduira l'expression de t à celle-ci

$$t = X' + \alpha X'',$$

dans laquelle

$$X' = r + r^2 + r^4,\quad X'' = r^3 + r^6 + r^5:$$

on aura ensuite

$$\theta = t^2 = \xi^0 + \alpha\xi',$$

où

$$\xi^0 = X'^2 + X''^2,\qquad \xi' = 2X'X'',$$

et on trouvera après le développement, à cause de $r^7 = 1$,

$$\xi^0 = 3(r + r^3 + r^2 + r^6 + r^4 + r^5)$$
$$\xi' = 2(3 + r + r^3 + r^2 + r^6 + r^4 + r^5).$$

Or, $r + r^2 + r^3 + r^4 + r^5 + r^6$, somme des racines, $= -1$; donc

$$\xi^\circ = -3, \quad \xi' = +4,$$

et la valeur de θ se réduit à

$$\theta = -3 + 4\alpha;$$

de là, en faisant $\alpha = -1$, on aura $\theta' = -7$; d'ailleurs,

$$\sqrt{\theta^\circ} = t = X' + X'' = -1;$$

donc on aura sur-le-champ, par les formules X', X'', etc., en y faisant $n = 2$,

$$X' = \frac{-1 + \sqrt{-7}}{2}, \quad X'' = \frac{-1 - \sqrt{-7}}{2}.$$

Considérons maintenant les trois termes r, r^2, r^4 de l'expression de X', comme les racines d'une équation du troisième degré; prenant alors α pour racine de l'équation

$$y^3 - 1 = 0,$$

on fera

$$t_1 = r + \alpha r^2 + \alpha^2 r^4;$$

ensuite en faisant

$$\theta_1 = t_1^3 = \xi_1^\circ + \alpha \xi_1' + \alpha^2 \xi_1'',$$

on trouvera, à cause de $\alpha^3 = 1$, $r^7 = 1$,

$$\xi_1^\circ = 6 + r^3 + r^6 + r^5$$

$$\xi_1' = 3\,(r + r^2 + r^4),$$

$$\xi_1'' = 3\,(r^3 + r^6 + r^5),$$

savoir,

$$\xi_1^\circ = 6 + X'', \quad \xi_1' = 3X', \quad \xi_1'' = 3X'';$$

de sorte qu'on aura

$$\theta_1 = 6 + X'' + 3\alpha X' + 3\alpha^2 X'':$$

donc en nommant α, $\mathfrak{c}$ les deux racines imaginaires de l'équation $y^3 - 1 = 0$, lesquelles sont

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \quad \mathfrak{c} = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2},$$

et faisant

$$\theta'_1 = 6 + X'' + 3\alpha X' + 3\alpha^2 X'',$$
$$\theta''_1 = 6 + X'' + 3\mathfrak{c}X' + 3\mathfrak{c}^2 X'',$$

on aura, en faisant $n = 3$, et observant que $\sqrt[3]{\theta^n_1} = t_1 = r + r^2 + r^4 = X'$,

$$r = \frac{X' + \sqrt[3]{\theta'_1} + \sqrt[3]{\theta''_1}}{3}.$$

Il sera facile de trouver les autres racines, et d'ailleurs nous détaillerons cette partie du calcul dans l'exemple suivant.

Venons à l'équation

$$x^{11} - 1 = 0,$$

laquelle étant divisée par $x - 1$, s'abaisse au dixième degré, et devient

$$x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

La table (49) donne 2 pour la plus petite racine primitive du nombre 11; ensorte que les racines seront

$$r, \ r^a, \ r^{a^2}, \ r^{a^3}, \ r^{a^4}, \ r^{a^5}, \ r^{a^6}, \ r^{a^7}, \ r^{a^8}, \ r^{a^9},$$

et les restes de la division des exposans par 11, à cause de $r^{11} = 1$, seront

$$r, \ r^2, \ r^4, \ r^8, \ r^5, \ r^{10}, \ r^9, \ r^7, \ r^3, \ r^6,$$

dont la somme sera par conséquent $= -1$, et l'on aura pour t cette expression générale

$$t = r + \alpha r^2 + \alpha^2 r^4 + \alpha^3 r^8 + \alpha^4 r^5 + \alpha^5 r^{10} + \alpha^6 r^9 + \alpha^7 r^7 + \alpha^8 r^3 + \alpha^9 r^6,$$

laquelle, en prenant pour α une racine de l'équation

$$y^{10} - 1 = 0,$$

donnera, à cause de $\alpha^{10} = 1$,

$$\theta = t^{10} = \xi^{0} + \alpha\xi' + \alpha^{2}\xi'' + \alpha^{3}\xi''' + \alpha^{4}\xi^{\text{iv}} + \ldots\ldots + \alpha^{9}\xi^{\text{ix}};$$

d'où l'on tirera par la formule connue, en y faisant $m = 11$, la valeur de la racine r.

Mais comme l'exposant 10 de l'équation dont on cherche les racines, est décomposable dans les facteurs 2 et 5, on pourra décomposer l'opération.

A cet effet, on prendra pour α une racine de l'équation

$$y^{2} - 1 = 0;$$

par là l'expression de t se réduira à cette forme plus simple,

$$t = X' + \alpha X'',$$

en faisant, pour abréger,

$$X' = r + r^{4} + r^{5} + r^{9} + r^{3},$$
$$X'' = r^{2} + r^{8} + r^{10} + r^{7} + r^{6},$$

et la valeur de θ sera

$$\theta = t^{2} = X'^{2} + X''^{2} + 2\alpha X'X''.$$

En développant les carrés X'^{2}, X''^{2}, et rabaissant toutes les puissances de r au-dessous de r^{11}, à cause de $r^{11} = 1$, on trouve

$$X'^{2} = 2X' + 3X'', \quad X''^{2} = 2X'' + 3X',$$

et par conséquent,

$$X'^{2} + X''^{2} = 5\,(X' + X'') = -5,$$

parce que $X' + X''$ est la somme de toutes les racines, laquelle est égale à -1.

On trouve de même par la multiplication,

$$X'X'' = 5 + 2\,(X' + X'') = 5 - 2 = 3:$$

ainsi

$$\sqrt[5]{\theta^{\circ}} = t = X' + X'' = -1,$$
$$\theta' = X'^2 + X''^2 - 2X'X'' = -5 - 6 = -11;$$

donc, en faisant $n = 2$,

$$X' = \frac{-1 + \sqrt{-11}}{2}, \quad X'' = \frac{-1 - \sqrt{-11}}{2}.$$

Ayant ainsi les valeurs de X' et X'', pour avoir celle de r, il faudra considérer les cinq termes qui composent X', comme les racines d'une équation du cinquième degré, et puisque 5 est un nombre premier, on ne pourra employer que cette expression de t,

$$t = r + \alpha r^4 + \alpha^2 r^5 + \alpha^3 r^9 + \alpha^4 r^3,$$

en prenant pour α une racine de l'équation $y^5 - 1 = 0$. Ensuite il faudra faire

$$\theta = t^5 = \xi^{\circ} + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \alpha^3\xi''' + \alpha^4\xi^{\text{IV}},$$

et il ne s'agira que de trouver les valeurs en r, de ξ°, ξ', etc., par l'élévation de t à la cinquième puissance, en rabaissant les puissances de α au-dessous de α^5, et celle de r au-dessous de r^{11}, à cause de $\alpha^5 = 1$ et $r^{11} = 1$. Par un calcul qui n'a de difficulté qu'un peu de longueur, on trouve en retenant les expressions de X' et de X'' en r, obtenues plus haut,

$$\begin{aligned}
\xi^{\circ} &= 120 + 31X' + 70X'',\\
\xi' &= 100 + 60X' + 45X'',\\
\xi'' &= 50 + 85X' + 30X'',\\
\xi''' &= 60X' + 65X'',\\
\xi^{\text{IV}} &= 50X' + 75X''.
\end{aligned}$$

Comme les valeurs de X', X'' sont déjà connues, l'expression de la fonction θ ne présente plus rien d'indéterminé.

D'abord on a

$$\xi^{0} = \frac{139 - 39\sqrt{-11}}{2}, \quad \xi' = \frac{95+15\sqrt{-11}}{2},$$
$$\xi'' = \frac{-15 + 55\sqrt{-11}}{2}, \quad \xi''' = \frac{-125-5\sqrt{-11}}{2}.$$
$$\xi^{\text{IV}} = \frac{-125+25\sqrt{-11}}{2}.$$

Qu'ensuite, au lieu de α dans θ, on substitue les quatre racines qui avec l'unité résolvent l'équation

$$y^5 - 1 = 0,$$

en place desquelles on peut prendre $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$, parce que 5 est un nombre premier, et qu'on rabaisse les puissances de α^5 au-dessous de l'unité, on aura

$$\theta' = \xi^0 + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \alpha^3\xi''' + \alpha^4\xi^{\text{IV}},$$
$$\theta'' = \xi^0 + \alpha^2\xi' + \alpha^4\xi'' + \alpha\xi''' + \alpha^3\xi^{\text{IV}},$$
$$\theta''' = \xi^0 + \alpha^3\xi' + \alpha\xi'' + \alpha^4\xi''' + \alpha^2\xi^{\text{IV}},$$
$$\theta^{\text{IV}} = \xi^0 + \alpha^4\xi' + \alpha^3\xi'' + \alpha^2\xi''' + \alpha\xi^{\text{IV}};$$

mais d'ailleurs,

$$\sqrt[5]{\theta^0} = t = r + r^4 + r^5 + r^9 + r^3 = X'.$$

Donc par la formule connue, en y faisant $m = 5$,

$$r = \frac{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{-11})+\sqrt[5]{\theta'}+\sqrt[5]{\theta''}+\sqrt[5]{\theta'''}+\sqrt[5]{\theta^{\text{IV}}}}{5};$$

où il n'y aura plus qu'à mettre pour $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$, les racines r, r^2, r^3, r^4 trouvées plus haut pour l'équation $x^5 - 1 = 0$.

Pour avoir les valeurs des autres racines r^4, r^5, r^9, r^3, on observera que les changemens dans l'expression de t, de la racine r en r^4, en r^5, en r^9 et en r^3, s'opéreraient en multipliant t par α^4, α^3, α^2 et α, parce qu'en effet le développement de $t^5 = \theta$, est, en même temps, celui de $(\alpha^4 t)^5$, $(\alpha^3 t)^5$, $(\alpha^2 t)^5$, $(\alpha t)^5$, à

cause de $\alpha^5 = 1$: ainsi, d'après les formules qui donnent x', x'', x''', etc., on aura les valeurs des racines r^4, r^5, r^9, r^3 qui entrent dans X'. On y parviendrait encore en multipliant dans l'expression de r, les radicaux $\sqrt[5]{\theta'}$, $\sqrt[5]{\theta''}$, $\sqrt[5]{\theta'''}$, $\sqrt[5]{\theta^{\text{IV}}}$ respectivement par α^4, 6^4, γ^4, δ^4 pour la racine r^4; par, α^3, 6^3, γ^3, δ^3 pour r^5; par α^2, 6^2, γ^2, δ^2 pour r^9; par α, 6, γ, δ pour r^3, c'est-à-dire, à cause de $6 = \alpha^2$, $\gamma = \alpha^3$, $\delta = \alpha^4$; par α^4, α^3, α^2, α pour r^4; par α^3, α, α^4, α^2 pour r^5; par α^2, α^4, α, α^3 pour r^9, et par α, α^2, α^3, α^4 pour r^3.

Pour avoir la valeur des autres racines r^2, r^8, r^{10}, r^7, r^6 qui entrent dans la fonction X'', il n'y aura qu'à changer r en r^2, ce qui change X' en X'' et X'' en X', et comme X' et X'' ne diffèrent que par le signe du radical $\sqrt{-11}$, il ne faudra que changer ce signe dans ξ^0, ξ'....., ou dans les racines précédentes r, r^4, r^5, r^9, r^3.

On aurait pu prendre pour α, dans l'expression générale de t, une racine de l'équation

$$y^5 - 1 = 0,$$

au lieu d'une racine de l'équation

$$y^2 - 1 = 0,$$

comme nous l'avons fait, ce qui est permis, puisque 2 et 5 sont les facteurs de 10; faisant donc $\alpha^5 = 1$, l'expression générale t devient

$$t = X' + \alpha X'' + \alpha^2 X''' + \alpha^3 X^{\text{IV}} + \alpha^4 X^{\text{V}},$$

dans laquelle

$$X' = r + r^{10}, \quad X'' = r^2 + r^9, \quad X''' = r^4 + r^7,$$
$$X^{\text{IV}} = r^8 + r^3, \quad X^{\text{V}} = r^5 + r^6,$$

et l'on regardera X', X'', X''', X^IV, X^V comme les racines d'une équation du cinquième degré; on fera donc

$$\theta = t^5 = \xi^0 + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \alpha^3\xi''' + \alpha^4\xi^{\text{IV}}:$$

élevant t à la cinquième puissance, en rabaissant continuellement les puissances de α au-dessous de α^5, et celle de r au-dessous de r^{11}, d'après $\alpha^5 = 1$, $r^{11} = 1$, et faisant, pour abréger,

$$s = r + r^2 + r^4 + r^8 + r^5 + r^{10} + r^9 + r^7 + r^3 + r^6,$$

on a

$$\xi^0 = 1640 + 1836s\,,$$
$$\xi' = 1700 + 1830s\,,$$
$$\xi'' = 2050 + 1795s\,,$$
$$\xi''' = 1800 + 1820s\,,$$
$$\xi^{IV} = 1900 + 1810s\,,$$

et parce que $s = -1$,

$$\xi^0 = -196,\ \xi' = -130,\ \xi'' = 255,\ \xi''' = -20,\ \xi^{IV} = 90:$$

ainsi la valeur de θ sera

$$\theta = -196 - 130\alpha + 255\alpha^2 - 20\alpha^3 + 90\alpha^4:$$

en mettant successivement à la place de α les quatre racines $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, autres que l'unité, de l'équation $x^5 - 1 = 0$, ou les puissances $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ dont les valeurs sont les mêmes que celles des racines r, r^2, r^3, r^4 de l'équation $x^5 - 1$, distraction faite de l'unité; on aura, à cause de $\alpha^5 = 1$,

$$\theta' = -196 - 130\alpha + 255\alpha^2 - 20\alpha^3 + 90\alpha^4,$$
$$\theta'' = -196 - 130\alpha^2 + 255\alpha^4 - 20\alpha + 90\alpha^3,$$
$$\theta''' = -196 - 130\alpha^3 + 255\alpha - 20\alpha^4 + 90\alpha^2,$$
$$\theta^{IV} = -196 - 130\alpha^4 + 255\alpha^3 - 20\alpha^2 + 90\alpha;$$

d'ailleurs, pour $\alpha = 1$, on a

$$\theta^0 = -196 - 130 + 255 - 20 + 90 = -1;$$

d'où

$$\sqrt[5]{\theta^0} = -1:$$

donc par la formule générale (54), en y faisant $n=5$,

$$X' = \frac{-1 + \sqrt[5]{v'} + \sqrt[5]{v''} + \sqrt[5]{v'''} + \sqrt[5]{v^{iv}}}{5};$$

Nous prendrons pour dernier exemple, l'équation

$$x^{13} - 1 = 0.$$

Comme $13 - 1 = 12 = 2.2.3$, l'opération pourra se décomposer en 3, de la manière suivante.

La plus petite racine primitive pour le nombre 13, est 2, dont les puissances successives, jusqu'à la onzième, divisées par 13, donnent les restes

2, 4, 8, 3, 6, 12, 11, 9, 5, 10, 7.

Ainsi en nommant r une racine de l'équation

$$x^{12} + x^{11} + \ldots\ldots + x + 1,$$

les onze autres seront

$$r^2,\ r^4,\ r^8,\ r^3,\ r^6,\ r^{12},\ r^{11},\ r^9,\ r^5,\ r^{10},\ r^7.$$

On fera donc, en général,

$$t = r + \alpha r^2 + \alpha^2 r^4 + \alpha^3 r^8 + \alpha^4 r^3 + \alpha^5 r^6 + \alpha^6 r^{12} + \alpha^7 r^{11} + \alpha^8 r^9 + \alpha^9 r^5 + \alpha^{10} r^{10} + \alpha^{11} r^7,$$

et l'on prendra pour α une racine de l'équation

$$y^2 - 1 = 0,$$

ensorte que $\alpha^2 = 1$, ce qui réduira la fraction t à la forme

$$t = X' + \alpha X'',$$

dans laquelle

$$X' = r + r^4 + r^3 + r^{12} + r^9 + r^{10},$$
$$X'' = r^2 + r^8 + r^6 + r^{11} + r^5 + r^7,$$

de là on aura

$$\theta' = t^2 = \xi^\circ + \alpha\xi', \quad \xi^\circ = X'^2 + X''^2, \quad \xi' = 2X'X''.$$

On peut se dispenser de chercher la valeur de ξ°, en observant que pour $\alpha = 1$, on a

$$\theta^\circ = \xi^\circ + \xi' = t^2 = (-1)^2 = 1, \quad \text{d'où} \quad \xi^\circ = 1 - \xi',$$

et conséquemment,

$$\theta = 1 + (\alpha - 1)\xi':$$

de sorte qu'en faisant $\alpha = -1$, on aura la valeur de θ', et les deux racines X', X'' seront, en observant que $\sqrt{\theta^\circ} = -1$,

$$X' = \frac{-1 + \sqrt{1 - 2\xi'}}{2}, \quad X'' = \frac{-1 - \sqrt{1 - 2\xi'}}{2}.$$

Pour avoir la valeur de ξ', il faut développer le produit $X'X''$ en puissances de r, ayant soin de rabaisser les puissances supérieures à r^{12}, à cause de $r^{13} = 1$, et l'on trouve

$$X'X'' = -3 \quad \text{d'où} \quad \xi' = -6.$$

On regardera maintenant les six racines qui composent la quantité X' comme celles d'une équation du sixième degré, et on fera de nouveau,

$$t_1 = r + \alpha r^4 + \alpha^2 r^3 + \alpha^3 r^{12} + \alpha^4 r^9 + \alpha^5 r^{10};$$

mais au lieu de prendre pour α une racine de l'équation $y^6 - 1 = 0$, ce qui exigerait le développement de la sixième puissance du polynome t_1, nous prendrons de nouveau une racine de l'équation $y^2 - 1 = 0$, de sorte qu'au moyen de $\alpha^2 = 1$, la fonction t_1 redeviendra de la forme

$$t_1 = X'_1 + \alpha X''_1,$$

dans laquelle on aura

$$X'_1 = r + r^3 + r^9, \quad X''_1 = r^4 + r^{12} + r^{10}:$$

on aura ensuite, comme ci-dessus,

$$\theta_1 = t_1^2 = \xi_1^0 + \alpha\xi_1', \quad \text{où} \quad \xi_1^0 = X_1'^2 + X_1''^2, \quad \xi_1' = 2X_1'X_1'',$$

donc pour $\alpha = -1$, on a

$$\theta_1' = X_1'^2 + X_1''^2 - 2X_1'X_1'',$$

d'où l'on tire

$$\sqrt{\theta_1'} = X_1' - X_1'';$$

mais

$$X_1' + X_1'' = X',$$

donc

$$X_1' = \frac{X' + \sqrt{\theta_1'}}{2}, \quad X_1'' = \frac{X' - \sqrt{\theta_1'}}{2},$$

d'ailleurs,

$$\theta_1^0 = \xi_1^0 + \xi_1' = t_1^2 = (X_1' + X_1'')^2$$
$$= (r + r^4 + r^3 + r^9 + r^{12} + r^{10})^2 = X'^2,$$

donc

$$\xi_1^0 = X'^2 - \xi_1',$$

et conséquemment,

$$\theta_1 = X'^2 + (\alpha - 1)\xi_1',$$

et faisant $\alpha = -1$,

$$\theta_1' = X'^2 - 2\xi_1'.$$

Pour avoir ξ_1', il faudra développer le produit $X_1'X_1''$, en observant que $r^{13} = 1$, et l'on obtiendra

$$X_1'X_1'' = 3 + X'',$$

ce qui donnera

$$\xi_1' = 6 + 2X'',$$

et par conséquent,

$$X'_1 = \frac{X' + \sqrt{(X'^2 - 12 - 4X'')}}{2};$$

$$X''_1 = \frac{X' - \sqrt{(X'^2 - 12 - 4X'')}}{2}.$$

Nous allons chercher les fonctions correspondantes à X'_1, X''_1 qu'on obtiendrait en procédant à l'égard des racines qui composent la fonction X'', comme on a fait sur celles de X' : nous les désignerons par (X'_1), (X''_1); or, comme en mettant r^2 au lieu de r, la fonction X' devient X'', et la fonction X'' devient X', on aura

$$(X'_1) = \frac{X'' + \sqrt{(X''^2 - 12 - 4X')}}{2},$$

$$(X''_1) = \frac{X'' - \sqrt{(X''^2 - 12 - 4X')}}{2}.$$

Il faut encore regarder les trois racines qui composent la fonction X'_1, comme celles d'une équation du troisième degré, et faire en conséquence,

$$t_2 = r + \alpha r^3 + \alpha^2 r^9,$$

en prenant pour α une racine de l'équation $y^3 - 1 = 0$: de là on formera la fonction

$$\theta_2 = t_2^3 = \xi^0_2 + \alpha \xi'_2 + \alpha^2 \xi''_2,$$

et on trouvera, par le développement, en faisant $\alpha^3 = 1$ et $r^{13} = 1$,

$$\xi^0_2 = 6 + X'_1, \quad \xi'_2 = 3(X'_1), \quad \xi''_2 = 3(X''_1);$$

donc nommant α et β les deux racines de l'équation $y^3 - 1 = 0$, distraction faite de l'unité, on aura

$$\theta'_2 = 6 + X'_1 + 3\alpha\,(X'_1) + 3\alpha^2\,(X''_1),$$
$$\theta''_2 = 6 + X'_1 + 3\beta\,(X'_1) + 3\beta^2\,(X''_1),$$

et conséquemment,

$$r = \frac{X'_1 + \sqrt[3]{\theta'_2} + \sqrt[3]{\theta''_2}}{3}.$$

Ainsi la valeur de r est entièrement déterminée; et il est inutile de chercher à la simplifier, dit M. *Lagrange*, parce que, dans tous les cas, il est toujours plus avantageux d'employer pour la résolution $x^{13} = 1$, ainsi que de toutes les équations de ce genre, les formules en sinus et cosinus, trouvées (ch. XI). *Lagrange* ajoute : je remarquerai que la méthode que nous venons d'employer, peut être regardée comme une simplification de celle que M. *Gauss* a indiquée d'une manière générale dans l'article 360 de ses *Disquisitiones arithmeticæ*.

Celle-ci est aussi fondée sur le développement d'une fonction semblable à celle que nous avons désignée par θ; mais elle demande de plus la formation et le développement d'autant d'autres fonctions du même ordre que l'équation a de racines, ce qui alonge considérablement le calcul. La méthode actuelle est indépendante de ces fonctions auxiliaires, et conduit directement aux expressions les plus simples des racines.

78. Nous dirons un mot des *équations réciproques* : on donne ce nom aux équations dont une racine est x, et l'autre $\frac{1}{x}$, ensorte que x étant a, b, c, etc., $\frac{1}{x}$ sera $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$, etc.: on en a vu un exemple (71). Ces équations sont donc d'un degré pair, et telles qu'elles ne changent pas par le changement de x en $\frac{1}{x}$: cette propriété va nous servir à trouver les relations générales entre les coefficiens. Soit, à cet effet,

l'équation

$$x^6 - Ax^5 + Bx^4 - Cx^3 + Dx^2 - Ex + F = 0:$$

si on remplace x par $\frac{1}{x}$, qu'on multiplie par x^6, qu'on divise par F, puis qu'on écrive le premier membre en sens inverse, on aura

$$x^6 - \frac{E}{F}x^5 + \frac{D}{F}x^4 - \frac{C}{F}x^3 + \frac{B}{F}x^2 - \frac{A}{F}x + \frac{1}{F} = 0:$$

or l'identité entre les premiers membres donne

$$A = \frac{E}{F}, \quad B = \frac{D}{F}, \quad C = \frac{C}{F}, \quad D = \frac{B}{F}, \quad E = \frac{A}{F}, \quad F = 1;$$

donc

$$E = A, \quad D = B;$$

et conséquemment la proposée deviendra

$$x^6 - Ax^5 + Bx^4 - Cx^3 + Bx^2 - Ax + 1 = 0 \ldots\ldots (1),$$

où les coefficiens des termes équidistans de celui du milieu, sont les mêmes. Réciproquement on reconnaît à cette circonstance, que l'équation est réciproque.

79. *Toute équation réciproque est réductible à une autre dont le degré est moindre de la moitié.*

En effet l'équation (1) peut s'écrire comme il suit,

$$(x^6 + 1) - A(x^5 + x) + B(x^4 + x^2) - Cx^3 = 0;$$

divisant par x^3, on a

$$\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right) - A\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + B\left(x + \frac{1}{x}\right) - C = 0 \ldots\ldots (2).$$

De l'hypothèse

$$x + \frac{1}{x} = y,$$

on déduit

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2,$$

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = y^3 - 3y;$$

ensorte que (2) devient, par ces substitutions,

$$\left.\begin{array}{l} y^3 - Ay^2 - 3 \\ \quad\quad + B \end{array}\right| \begin{array}{l} y - C = 0 \ldots\ldots (3), \\ + 2A \end{array}$$

équation du troisième degré, qui combinée avec celle-ci,

$$x + \frac{1}{x} = y, \quad \text{d'où} \quad x^2 - yx + 1 = 0 \ldots\ldots (4),$$

fera trouver les six racines de la proposée.

80. Les équations binomes ou de la forme

$$x^m - 1 = 0,$$

et dont le degré est impair, donnent, après la division par $x - 1$,

$$x^{m-1} + x^{m-2} + x^{m-3} + \ldots\ldots + x^2 + x + 1 = 0,$$

équation de degré pair et réciproque, et conséquemment réductible au degré $\frac{m-1}{2}$: les racines sont données par l'équation du second degré

$$x^2 - xy + 1 = 0,$$

dans laquelle y dépend d'une équation du degré $\frac{m-1}{2} = \nu$, de la forme

$$y^\nu + y^{\nu-1} - (\nu-1)\, y^{\nu-2} - (\nu-2)\, y^{\nu-3} + \frac{(\nu-2)(\nu-3)}{2}\, y^{\nu-4}$$
$$+ \frac{(\nu-3)(\nu-4)}{2}\, y^{\nu-5} - \text{etc.} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (A),$$

trouvée note X de la résolution des équations numériques.

Pour $m=3$, l'équation (A) est du degré $\frac{3-1}{2}=1$. Pour $m=4$, le quotient de x^4-1 par $x-1$, est

$$x^3+x^2+x+1=(x+1)(x^2+1)=0.$$

Pour $m=5$, le quotient de x^5-1 par $x-1$, savoir,

$$x^4+x^3+x^2+x+1=0,$$

est réciproque et réductible au second degré.

Pour $m=6$, le quotient de x^6-1 par $x-1$, est

$$\begin{aligned} x^5+x^4+\ldots\ldots+x+1 &= (x^3+1)(x^2+x+1) \\ &= (x^4+x^2+1)(x+1). \end{aligned}$$

Pour $m=7$, le quotient de x^7-1 par $x-1$, est

$$x^6+x^5+\ldots\ldots\ldots+x+1=0,$$

et on a la transformée

$$y^3+y^2-2y-1=0,$$

qu'il faut combiner avec

$$x^2-yx+1=0.$$

Pour $m=8$, le quotient de x^8-1 par $x-1$, est

$$\begin{aligned} x^7+x^6+\ldots+x+1 &= (x^3+x^2+x+1)(x^4+1) \\ &= (x^4+1)(x^2+1)(x+1) \\ &= (x^2+\sqrt{-1})(x^2-\sqrt{-1})(x^2+1)(x+1). \end{aligned}$$

Pour $m=9$, le quotient de x^9-1 par $x-1$, savoir,

$$x^8+x^7+x^6+\ldots\ldots+x+1=0,$$

est réductible au quatrième degré, ou décomposable dans les facteurs

$$(x^6+x^3+1)(x^2+x+1)=0,$$

dont le premier est résoluble à la manière des équations du second degré.

Pour $m=10$, le quotient de $x^{10}-1$ par $x-1$, est

$$x^9+x^8+\ldots\ldots+x+1=(x^4+x^3+x^2+x+1)(x^5+1)$$
$$=(x^8+x^6+x^4+x^2+1)(x+1)$$
$$=(y^4+y^3+y^2+y+1)(x+1),$$

en posant $x^2=y$: or le facteur $y^4+y^3+y^2+y+1$ est réciproque et réductible au second degré.

Pour $m=11$, le quotient de $x^{11}-1$ par $x-1$, est réductible à cette équation

$$y^5+y^4-4y^3-3y^2+3y+1=0;$$

or, r étant une des racines de ce quotient

$$x^{10}+x^9+\ldots\ldots+1=0,$$

la correspondante de l'équation en $y=x+\frac{1}{x}$, est

$$y=r+\frac{1}{r}=r+\frac{r^{10}}{r^{11}}=r+r^{10},$$

à cause de $r^{11}=1$: mais nous avons déjà désigné plus haut $r+r^{10}$ par X′, et nous avons assigné en nombre la racine X′. *Vandermonde*, dans un mémoire sur la résolution des équations, a donné la racine de l'équation

$$y^5-y^4-4y^3+3y^2+3y-1=0,$$

qui n'est que la proposée, en y changeant y en $-y$, ce qui a fait dire à *Lagrange* (*Résolution des Équations numériques*, note XIX) que ce géomètre est le premier qui ait franchi les limites dans lesquelles la résolution des équations à deux termes se trouvait resserrée.

Pour $m=12$, le quotient de $x^{12}-1$ par $x-1$, est

$$x^{11}+\text{etc}\ldots\ldots+1=0=(x^3+x^2+x+1)(x^8+x^4+1)$$
$$=(x+1)(x^2+1)(y^2+y+1),$$

en posant $x^4=y$.

Pour $m=13$, le quotient de $x^{13}-1$ par $x-1$, c'est-à-dire, l'équation

$$x^{12}+x^{11}+\ldots\ldots+x+1=0,$$

est réductible à une équation du sixième degré, ou du degré 2.3.

Enfin pour $m=15$, on a pour quotient de $x^{15}-1$ par $x-1$,

$$\begin{aligned} x^{14}+x^{13}+\ldots\ldots+1 &= (x^4+x^3+x^2+x+1)(x^{10}+x^5+1) \\ &= (x^4+x^3+x^2+x+1)(y^2+y+1), \end{aligned}$$

en faisant $x^5=y$.

81. Pour rendre raison des décompositions que nous venons d'employer, nous observerons que l'équation

$$x^{qm-1}+x^{qm-2}+x^{qm-3}+\ldots\ldots+x+1=0,$$

peut être mise sous la forme

$$\begin{array}{lllll} x^{mq-1} & +x^{mq-2} & +x^{mq-3} & +\ldots\ldots & +x^{mq-q} \\ +x^{mq-q-1} & +x^{mq-q-2} & +x^{mq-q-3} & +\ldots\ldots & +x^{mq-2q} \\ +x^{mq-2q-1} & +x^{mq-2q-2} & +x^{mq-2q-3} & +\ldots\ldots & +x^{mq-3q} \\ & & \vdots & & \\ +x^{2q-1} & +x^{2q-2} & +x^{2q-3} & +\ldots\ldots & +x^{2q-q} \\ +x^{q-1} & +x^{q-2} & +x^{q-3} & +\ldots\ldots & +x^{q-q}=0: \end{array}$$

de cette décomposition, on passe aisément à la suivante :

$$\begin{aligned} & (x^{q-1}+x^{q-2}+x^{q-3}+\ldots\ldots+1)\,x^{mq-q} \\ + & (x^{q-1}+x^{q-2}+x^{q-3}+\ldots\ldots+1)\,x^{mq-2q} \\ + & (x^{q-1}+x^{q-2}+x^{q-3}+\ldots\ldots+1)\,x^{mq-3q} \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ + & (x^{q-1}+x^{q-2}+x^{q-3}+\ldots\ldots+1)\,x^{q} \\ + & (x^{q-1}+x^{q-2}+x^{q-3}+\ldots\ldots+1)\,x^{0} \\ = & (x^{q-1}+x^{q-2}+\ldots\ldots\ldots\ldots x+1)\times\ldots\ldots \\ & (x^{mq-q}+x^{mq-2q}+x^{mq-3q}+\ldots\ldots+x^{q}+x^{0})=0\ldots(1). \end{aligned}$$

Ainsi, pour $m=3$ et $q=5$, on retrouve la décomposition ci-dessus de l'équation x^4+ etc. $=0$.

Passons à l'équation

$$x^b+x^{b-n}+x^{b-2n}+x^{b-3n}+\ldots\ldots=0,$$

dont nous supposerons le nombre des termes divisible par p : elle se décompose ainsi qu'il suit :

$$\left.\begin{array}{l} x^b \quad +x^{b-n} \quad +x^{b-2n} \quad +\ldots+x^{b-(p-1)n} \\ +x^{b-pn}+x^{b-(p+1)n}+x^{b-(p+2)n}+\ldots+x^{b-(2p-1)n} \\ +x^{b-2pn}+x^{b-(2p+1)n}+x^{b-(2p+2)n}+\ldots+x^{b-(3p-1)n} \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\}=0\ldots(2),$$

p étant le nombre des termes de chaque ligne, et observant d'ailleurs que le nombre total des termes, ou le multiple kp qui le désigne, étant diminué d'une unité, est le multiple de n dans le dernier terme. L'équation précédente devient encore

$$\left.\begin{array}{l} [x^{cn}+x^{(c-1)n}+x^{(c-2)n}+\ldots+x^{(c-p+1)n}]x^{b-cn} \\ +[x^{cn}+x^{(c-1)n}+x^{(c-2)n}+\ldots+x^{(c-p+1)n}]x^{b-(c+p)n} \\ +[x^{cn}+x^{(c-1)n}+x^{(c-2)n}+\ldots+x^{(c-p+1)n}]x^{b-(c+2p)n} \\ \qquad\qquad \text{etc.} \end{array}\right\}=0\ldots(3),$$

p étant toujours le nombre des termes de chaque ligne, et c un nombre quelconque. On a donc

$$x^b+x^{b-n}+x^{b-2n}+\text{etc.}=[x^{cn}+x^{(c-1)n}+\ldots\ldots+x^{(c-p+1)n}]$$
$$\times[x^{b-cn}+x^{b-(c+p)n}+x^{b-(c+2p)n}+\text{etc.}]=0;$$

ensorte que pour $n=1$, $b=5$, on trouve

$$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$$
$$=(x^c+x^{c-1}+\ldots+x^{(c-p+1)})(x^{5-c}+x^{5-(c+p)}+x^{5-(c+2p)}+\text{etc.}):$$

or le nombre des termes étant 6, on peut prendre $p=3$, $c=3$,

et alors,

$$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=(x^3+x^2+x)\left(x^2+\frac{1}{x}\right),$$

parce que p étant $=3$, les premières décompositions ne doivent fournir que deux lignes ; et d'après (3), on ne doit pas aller au-delà du facteur $x^{b-(c+p)n}$. On peut faire aussi $p=2$, $c=2$, auquel cas,

$$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=(x^2+x)\left(x^3+x+\frac{1}{x}\right)=0.$$

Je suppose dans l'équation

$$x^b+x^{b-n}+x^{b-2n}+\text{etc.}=0,$$

des coefficiens autres que l'unité : la décomposition (2) ne sera possible qu'autant que les p premiers, seconds, troisièmes, etc. termes seront affectés des mêmes coefficiens, ou que les rapports entre les p premiers, seconds, troisièmes, etc. coefficiens, seront les mêmes. Supposons, pour donner un exemple du premier cas, qu'on ait l'équation

$$ax^5+bx^4+cx^3+ax^2+bx+c=0;$$

la décomposition sera

$$(ax^3+bx^2+cx)\,x^2+(ax^3+bx^2+cx)\,\frac{1}{x}=0,$$

d'où

$$(ax^3+bx^2+cx)\left(x^2+\frac{1}{x}\right)=0.$$

L'équation

$$ax^5+bx^4+cx^3+a'x^2+b'x+c'=0,$$

sous les relations $a'=na$, $b'=nb$, $c'=nc$, aura pour décomposition

$$(ax^3+bx^2+cx)\,x^2+n\,(ax^3+bx^2+cx)\,\frac{1}{x}=0,$$

d'où

$$(n+1)(ax^3+bx^2+cx)\left(x^2+\frac{1}{x}\right)=0.$$

82. Ce qui suit, repose sur cette formule,

$$(\mathrm{M})\ldots a^n+b^n=(a+b)^n-\frac{n}{1}ab\,(a+b)^{n-2}$$
$$+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-3}{2}a^2b^2(a+b)^{n-4}-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-5}{2}\cdot\frac{n-4}{3}a^3b^3(a+b)^{n-6}+\ldots$$
$$\pm\frac{n}{1}\cdot\frac{n-2p+1}{2}\cdot\frac{n-2p+2}{2}\cdots\frac{n-p-1}{p}a^pb^p(a+b)^{n-2p}\mp\text{etc.},$$

qu'il est facile de démontrer par induction, et qui l'a été d'une manière complète et générale dans un mémoire de M. *Ampère*, ayant pour titre : *Considérations sur la théorie mathématique du Jeu* (*).

Faisons dans (M) les hypothèses $a=\frac{x}{c}$, $b=\frac{c}{x}$, qui donnent

$$ab=1,\quad a+b=\frac{x}{c}+\frac{c}{x};$$

et posons encore

$$a+b=\frac{x}{c}+\frac{c}{x}=z;$$

(*) Si l'on ne veut qu'une démonstration par induction, on partira de cette égalité

$$a^2+b^2=(a+b)^2-2ab,$$

dont on multipliera les deux membres par $a+b$, ensorte que dégageant a^3+b^3, on trouvera

$$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab\,(a+b);$$

multipliant de nouveau de part et d'autre par $a+b$, et dégageant a^4+b^4, il viendra, après avoir remplacé a^2+b^2 par sa valeur $(a+b)^2-2ab$,

$$a^4+b^4=(a+b)^4-4ab\,(a+b)^2+2a^2b^2.$$

la formule (M) deviendra

$$\frac{x^n}{c^n}+\frac{c^n}{x^n}=z^n-\frac{n}{1}z^{n-2}+\frac{n}{1}\cdot\frac{n-3}{2}z^{n-4}-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-5}{2}\cdot\frac{n-4}{3}z^{n-6}$$
$$+\ldots\pm\frac{n}{1}\cdot\frac{n-2p+1}{2}\cdot\frac{n-2p+2}{3}\cdots\frac{n-p-1}{p}z^{n-2p}\ldots \text{(N)}$$

Prenons l'équation réciproque de la forme la plus générale,

$$x^m+pcx^{m-1}+qc^2x^{m-2}+\ldots\ldots+qc^{m-2}x^2+pc^{m-1}x+c^m=0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$x^m+c^m+pcx(x^{m-2}+c^{m-2})+qc^2x^2(x^{m-4}+c^{m-4})+\text{etc.}=0:$$

cette équation est divisible par $x+c$, toutes les fois que m est impair; et comme le quotient est une équation réciproque dont le degré est pair, il s'ensuit que la résolution des équations de ce genre, est ramenée à celle des équations réciproques de degré pair, qui sont toutes représentées par la formule

$$x^{2r}+c^{2r}+pcx(x^{2r-2}+c^{2r-2})+qc^2x^2(x^{2r-4}+c^{2r-4})+\text{etc.}=0:$$

on réduit la résolution de celle-ci à des équations du degré r, en la divisant par c^rx^r, ce qui donne

$$\left(\frac{x^r}{c^r}+\frac{c^r}{x^r}\right)+p\left(\frac{x^{r-1}}{c^{r-1}}+\frac{c^{r-1}}{x^{r-1}}\right)+q\left(\frac{x^{r-2}}{c^{r-2}}+\frac{c^{r-2}}{x^{r-2}}\right)+\text{etc.}=0,$$

et substituant pour $\frac{x^r}{c^r}+\frac{c^r}{x^r}$ et les autres quantités entre parenthèses, les valeurs qu'on trouve en snpposant successivement $n=r$, $n=r-1$, $n=r-2$, etc. dans l'équation (N). L'équation en z qui résultera de ces substitutions, sera du degré $\frac{m}{2}$ ou $\frac{m-1}{2}$, suivant que m sera pair on impair; or, dès qu'on a les r valeurs de z, on trouve $2r$ valeurs de x, en vertu de l'équation

$$\frac{x}{c}+\frac{c}{x}=z, \quad \text{ou} \quad x^2-czx+c^2=0,$$

et on a en outre $x=-c$ dans le cas de m impair.

Ainsi la proposée étant

$$x^7+pcx^6+qc^2x^5+sc^3x^4+sc^4x^3+qc^5x^2+pc^6x+c^7=0,$$

c'est-à-dire,

$$(x^7+c^7)+pcx(x^5+c^5)+qc^2x^2(x^3+c^3)+sc^3x^3(x+c)=0;$$

le quotient de la division par $x+c$, sera

$$(x^6+c^6)+(p-1)cx(x^4+c^4)+(1-p+q)c^2x^2(x^2+c^2)$$
$$+(s-q+p-1)c^3x^3=0,$$

qui divisé par c^3x^3, donne

$$\left(\frac{x^3}{c^3}+\frac{c^3}{x^3}\right)+(p-1)\left(\frac{x^2}{c^2}+\frac{c^2}{x^2}\right)+(1-p+q)\left(\frac{x}{c}+\frac{c}{x}\right)$$
$$+s-q+p-1=0.$$

or d'après (N),

$$\frac{x^3}{c^3}+\frac{c^3}{x^3}=z^3-3z,\quad \frac{x^2}{c^2}+\frac{c^2}{x^2}=z^2-2,\quad \frac{x}{c}+\frac{c}{x}=z;$$

donc la précédente devient

$$z^3+(p-1)z^2+(q-p-2)z+(s-q-p+1)=0.$$

Cette équation donnera trois valeurs de z, et la dernière des trois précédentes en x, laquelle devient

$$x^2-czx+c^2=0,$$

fournira deux valeurs de x pour chacune de ces trois racines z; ce qui fera, en totalité, les six racines de la proposée.

CHAPITRE XIV.

De quelques procédés de décomposition des équations en facteurs d'un degré supérieur au premier.

83. On a quelquefois besoin de décomposer effectivement une équation en facteurs d'un degré supérieur au premier. Nous avons prouvé (3) la possibilité de cette décomposition, et nous nous proposons, dans ce chapitre, de faire connaître les divers procédés que l'on peut employer à cet effet.

Prenons pour premier exemple une équation du quatrième degré, délivrée de son second terme, telle que

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0,$$

qu'on se propose de décomposer en facteurs du second degré, qui seront de la forme

$$(x^2 + ax + b)(x^2 - ax + c) = 0,$$

en observant qu'on n'a supposé les seconds termes affectés des mêmes coefficiens, pris avec des signes contraires, qu'à l'effet d'avoir un produit sans second terme, comparable avec la proposée. On aura donc l'identité

$$x^4+px^2+qx+r+r=x^4+(b+c-a^2)x^2+a(c-b)x+bc=0,$$

d'où résultent les égalités entre les coefficiens

$$b+c-a^2=p, \quad a(c-b)=q, \quad bc=r,$$

desquelles on déduit

$$c=\frac{r}{b}, \quad a=\frac{q}{c-b}, \quad a^2=c+b-p.$$

Il faut donc, 1°. que, pour chaque couple de diviseurs c et b, la différence $c - b$ soit un diviseur de q ou du coefficient de x dans la proposée, et que de plus, le quotient soit positif; 2°. que le coefficient de x^2, retranché de la somme $c + b$, ait pour racine le quotient précédent. Si l'une de ces conditions manquait, la décomposition supposée serait impossible.

Faisons une application à l'équation

$$x^4 - 19x^2 - 100x - 91 = 0,$$

pour laquelle on a

$$p = -19, \quad q = -100, \quad r = -91.$$

Les diviseurs de 91 sont 1, 7, 13, 91, parmi lesquels il n'en existe que deux dont les différences divisént -100, et donnent un quotient positif : ces diviseurs sont -7 et 13 ou -13 et 17 : on prendra donc

$$c = -7 \quad \text{avec} \quad b = +13,$$

ou

$$c = -13 \quad \text{avec} \quad b = +7.$$

En effet, on trouve également

$$a = \frac{q}{c - b} = +5;$$

mais on doit avoir encore

$$b + c - p = 25,$$

condition qui ne peut avoir lieu qu'en supposant

$$c = -7 \quad \text{et} \quad b = +13:$$

on a donc pour les facteurs du second degré,

$$x^2 + 5x + 13 = 0, \quad x^2 - 5x - 7 = 0.$$

20..

Reprenons les égalités

$$bc = r, \quad c + b = p + a^2, \quad c - b = \frac{q}{a},$$

trouvées précédemment : si l'on ajoute les deux dernières, puis qu'on retranche l'une de l'autre, il viendra

$$(1)\dots\; c = \frac{p + a^2 + \frac{q}{a}}{2}, \quad b = \frac{p + a^2 - \frac{q}{a}}{2}\dots(2):$$

multiplions b par c, nous aurons, à cause de $bc = r$,

$$r = \frac{(p + a^2)^2 - \frac{q^2}{a^2}}{4};$$

donc

$$p^2 + 2pa^2 + a^4 - \frac{q^2}{a^2} = 4r,$$

ou

$$a^6 + 2pa^4 + (p^2 - 4r)\, a^2 - q^2 = 0;$$

c'est-à-dire,

$$a'^3 + 2pa'^2 + (p^2 - 4r)\, a' - q^2 = 0,$$

en posant $a^2 = a'$.

Pour l'équation déjà traitée,

$$x^4 - 19x^2 - 100x - 91 = 0;$$

on a, par la comparaison,

$$p = -19, \quad q = -100, \quad r = -91,$$

conséquemment,

$$a'^3 - 38a'^2 + 725a' - 10000 = 0;$$

mais cette équation n'ayant que des variations de signes, n'admet que des racines positives, et, à cause de $a' = a^2$, on ne doit essayer comme diviseurs de 10000, que des carrés,

savoir,

$$1,\ 4,\ 16,\ 25,\ 100,\ 400,\ 625,\ 2500,\ 10000;$$

en observant que le nombre a est essentiellement rationnel. Le diviseur $a'=25$ est racine, et il donne $a=5$: des équations (1) et (2) on déduit alors

$$c=-7,\quad b=+13,$$

valeurs obtenues plus haut.

Passons enfin à la recherche des diviseurs commensurables du troisième degré, et proposons-nous, à cet effet, de trouver ceux de l'équation générale du sixième degré

$$x^6+px^4+qx^3+rx^2+sx+t=0:$$

je suppose maintenant que cette équation provienne des facteurs

$$x^3+ax^2+bx+c,\quad x^3-ax^2+dx+f:$$

si on les multiplie et que l'on compare les coefficiens des mêmes puissances de x, on trouvera

$$(1^\circ)\ldots\ b+d-a^2=p,\quad (2^\circ)\ldots c+f+ad-ab=q,$$
$$(3^\circ)\ldots af-ac+bd=r,\quad (4^\circ)\ldots bf+cd=s,\quad (5^\circ)\ldots cf=t;$$

(1°) donne $b+d=a^2+p$, et (2°) donne $b-d=\frac{c+f-q}{a}$,

donc

$$(6^\circ)\ldots b=\frac{a^3+ap+c+f-q}{2a},\quad (7^\circ)\ldots d=\frac{a^3+ap-c-f+q}{2a}.$$

Substituant ces valeurs dans (4°), il vient, après les réductions,

$$(8^\circ)\ldots\ldots a^3+\left(p-\frac{2s}{f+c}\right)a+(f-c)\left(1-\frac{q}{f+c}\right).$$

On cherchera donc, puis on disposera par ordre, tous les diviseurs du dernier terme t de l'équation donnée, et on ne prendra pour c et f que ceux dont le produit soit t en nombre et en

signe; d'ailleurs on doit avoir a nombre entier; donc, d'après(8), $f+c$ doit être, en même temps, diviseur de $2s$ et de $q\,(f-c)$. Des valeurs de a, c et f, on conclûra, au moyen des équations (6°) et (7°)*, celles de b et d qui doivent être en nombres entiers, et enfin on examinera si l'équation (3°) qu'on n'a pas employée, est satisfaite.

Nous appliquerons cette méthode à l'équation

$$y^6 + 6y^5 + 4y^4 - 34y^3 - 59y^2 + 14y + 35 = 0:$$

on fera évanouir son second terme, en posant

$$y = x - 1,$$

ce qui donne cette transformée en x,

$$x^6 - 11x^4 - 10x^3 + 22x^2 + 38x - 5 = 0,$$

pour laquelle on a

$$p = -11, \quad q = -10, \quad r = 22, \quad s = 38, \quad t = -5:$$

les diviseurs du dernier terme sont 1 et 5; donc, parce qu'il est négatif, les facteurs c et f sont -1 et $+5$, ou $+1$ et -5. Prenant d'abord $c = -1$ et $f = +5$, on trouve

$$f + c = 4,$$

qui est un diviseur de $2s$ ou de 76, et qui l'est encore de $q\,(f-c)$ ou de -60. Faisant les substitutions dans (8°), il vient l'équation

$$a^3 - 30a + 21 = 0,$$

qui n'a pas de diviseurs commensurables du premier degré. Essayons $c = +1$ et $f = -5$: on a d'abord

$$f + c = -4,$$

diviseurs de $2s$ et de $q\,(f-c)$: substituant dans (8°), il vient

$$a^3 + 8a + 9 = 0,$$

qui donne

$$a = -1;$$

donc, d'après (6°) et (7°), on trouve

$$b = -8 \quad \text{et} \quad d = -2.$$

Toutes ces valeurs et celle de r, substituées dans (3°) donnent

$$o = o;$$

donc les facteurs binomes sont

$$x^3 - x^2 - 8x + 1 = o, \quad x^3 + x^2 - 2x - 5 = o:$$

si l'on fait $x = y + 1$, on aura ces facteurs triples de la proposée,

$$y^3 + 2y^2 - 7y - 7 = o, \quad y^3 + 4y^2 + 3y - 5 = o.$$

Ces applications sont plus que suffisantes pour donner une idée de cette méthode, et du grand nombre d'essais infructueux auxquels on est exposé, lorsque le terme tout connu admet un grand nombre de diviseurs.

84. La méthode suivante, due à *Newton*, trouve naturellement place ici.

Supposons qu'une équation qui n'a pas de diviseurs commensurables du premier degré, puisse se décomposer en diviseurs commensurables du second, et soit

$$x^2 + mx + n.$$

l'un de ces diviseurs : la proposée ne cessera pas d'être divisible par $x^2 + mx + n$, pour des valeurs particulières de x. Nommons A et B ce que devient la proposée pour les valeurs

$$x = -1 \quad \text{et} \quad x = +1:$$

le diviseur de A sera $1 - m + n$, celui de B sera $1 + m + n$, et n sera le diviseur de l'équation, dans la supposition de

$$x = o.$$

Les trois diviseurs ne sont pas en progression arithmétique ; mais si l'on retranche une unité de chaque diviseur de A et de B, pris en plus et en moins, on aura des nombres parmi lesquels doivent se trouver

$$n - m, \quad n, \quad m + n,$$

nombres en progression arithmétique dont la différence est m. Il ne faudra donc s'arrêter qu'à ceux des diviseurs de A et B qui, diminués d'une unité, forment une progression arithmétique avec quelqu'un des diviseurs du dernier terme de la proposée. On pourra d'abord trouver quelques progressions arithmétiques inutiles ; mais on les écartera par de nouvelles suppositions, telles que

$$x = -2, \quad x = +2 :$$

on formera par là les valeurs de A' et B', et le diviseur deviendra

$$4 - 2m + n \quad \text{et} \quad 4 + 2m + n :$$

retranchant 4 de chacun d'eux, il restera

$$n - 2m \quad \text{et} \quad n + 2m,$$

qui contiennent la progression ci-dessus. D'autres suppositions, si elles sont nécessaires, acheveront de fixer les véritables diviseurs.

La valeur de n est le diviseur qui répond à $x = 0$, et $m + n$ est celui qui répond à $x = +1$: en retranchant le premier du second, on trouve m ; donc les deux indéterminées m et n sont connues.

Lorsque $m = 0$, ou lorsque le facteur du second degré est de la forme $x^2 + n$, alors il ne s'agit que de déterminer n, et il est visible que $n + 1$ doit être diviseur commun de A et B, et que $n + 4$ le sera de A' et B'.

Soit, pour exemple, l'équation

$$x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 5 = 0,$$

dont on demande les facteurs doubles commensurables, si elle en a.

Par la supposition de $x = -1$, on a $A = 4$: en faisant $x = +1$, on a $B = 20$: la supposition de $x = -2$ donne $A' = 5$; celle de $x = +2$ donne $B' = 85$; enfin, pour $x = 0$, on a 5. On formera donc le tableau suivant :

$B' = 85$	1,	5,	17,	85.	
$B = 20$	1,	2,	4,	10,	20.
$5 = 5$	1,	4.			
$A = 4$	1,	2,	4.		
$A' = 5$	1,	5.			

Pour savoir si l'équation a quelque diviseur de la forme $x^2 + n$, examinons si quelque diviseur du dernier terme 5 de l'équation, augmenté de l'unité, est en même temps diviseur de A et B : on ne trouve que le diviseur 1, car $1 + 1$ ou 2 est diviseur de 4 et de 20 ; donc $n = 1$ et $x^2 + 1$ peut diviser l'équation.

Cherchons le diviseur de la forme $x^2 + mx + n$: parmi les diviseurs de A et B qui, diminués d'une unité, forment une progression arithmétique avec quelque diviseur du dernier terme, on trouve 2 et 10 ; car 1, 5 et 9 sont une suite de nombres dont la différence $= 4$; donc

$$n = 5, \quad m + n = 9, \quad \text{d'où} \quad m = 4.$$

Ainsi le facteur double est

$$x^2 + 4x + 5 ;$$

donc la proposée revient à

$$(x^2 + 1)(x^2 + 4x + 5) = 0,$$

qui donne ces racines

$$x = +\sqrt{-1}, \qquad x = -\sqrt{-1},$$
$$x = -2 + \sqrt{-1}, \qquad x = -2 - \sqrt{-1}.$$

85. Nous allons envisager la question sous un autre point de vue, en nous bornant cependant à la décomposition d'une équation du quatrième degré en ses diviseurs du second degré.

Reprenons donc l'équation du quatrième degré

$$x^4 + Px^3 + Qx^2 + Rx + S = 0,$$

et proposons-nous de la décomposer en deux facteurs du second degré

$$x^2 + Ax + B = 0, \quad x^2 + A'x + B' = 0.$$

Les racines de la proposée étant α, β, γ, δ, si l'on cherchait l'équation dont les racines fussent les sommes des racines α, β, γ, δ, prises deux à deux, on en trouverait une du sixième degré, qui servirait à déterminer le coefficient du second terme des diviseurs du second degré. En effet, les facteurs de la proposée étant $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, $x-\delta$, il y a lieu à six diviseurs du second degré, dans chacun desquels le coefficient du second terme, est la somme de deux des racines de la proposée; ainsi l'équation d'où dépend A, par exemple, doit être du sixième degré. Mais, dans cette équation finale, le coefficient du second terme, étant la somme des valeurs de A, prises en signes contraires, vaudra

$$3\alpha + 3\beta + 3\gamma + 3\delta = -3P,$$

et on le fera disparaître en posant

$$A = y + \frac{3P}{6}, \quad \text{d'où} \quad y = A - \frac{P}{2},$$

ensorte que les racines de l'équation finale seront, en mettant pour A toutes ses valeurs,

$$y=-(\alpha+\beta)+\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}=\frac{\gamma+\delta-\alpha-\beta}{2}\ldots\ldots\ldots(1),$$

$$y=-(\alpha+\gamma)+\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}=\frac{\beta+\delta-\alpha-\gamma}{2}\ldots\ldots\ldots(2),$$

$$y=-(\alpha+\delta)+\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}=\frac{\beta+\gamma-\alpha-\delta}{2}\ldots\ldots\ldots(3),$$

$$y=-(\beta+\gamma)+\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}=\frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{2}\ldots\ldots\ldots(4),$$

$$y=-(\beta+\delta)+\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}=\frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{2}\ldots\ldots(5),$$

$$y=-(\gamma+\delta)+\frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2}=\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}\ldots\ldots\ldots(6),$$

qui sont égales deux à deux et de signes contraires, ainsi que le montrent (1) et (6), (2) et (5), (3) et (4); par conséquent l'équation en y ne renfermera aucune puissance impaire de y, et elle pourra se réduire à une équation du quatrième degré, en z, en posant $y^2=z$.

Le produit des facteurs correspondans aux six racines de l'équation en y, sera

$$\left[y^2-\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}\right)^2\right]\left[y^2-\left(\frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{2}\right)^2\right]$$
$$\left[y^2-\left(\frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{2}\right)^2\right]=0,$$

faisant $y^2=z$, et posant pour équation finale,

$$z^3-Lz^2+Mz-N=0,$$

on aura

$$L=\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}\right)^2+\left(\frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{2}\right)^2+\left(\frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{2}\right)^2,$$

$$M=\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}\right)^2\left(\frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{2}\right)^2$$
$$+\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}\right)^2\left(\frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{2}\right)^2$$
$$+\left(\frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{2}\right)^2\left(\frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{2}\right)^2,$$

$$N=\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma-\delta}{2}\right)^2\left(\frac{\alpha+\gamma-\beta-\delta}{2}\right)^2\left(\frac{\alpha+\delta-\beta-\gamma}{2}\right)^2.$$

Or, dans l'hypothèse de $P=0$, pour abréger les calculs, on a (chap. VII)

$$(\alpha+\beta-\gamma-\delta)(\alpha+\gamma-\beta-\delta)(\alpha+\delta-\beta-\delta)$$
$$=2(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3)+2(\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)$$
$$-(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2)=8R;$$

les autres coefficiens L, M sont aussi des fonctions invariables de α, β, γ, δ, qui peuvent par conséquent s'exprimer au moyen des coefficiens Q, R et S de l'équation donnée, et l'on trouve, par un calcul qui n'a de difficulté qu'un peu de longueur,

$$L=-2Q,$$
$$M=Q^2-4S;$$

d'ailleurs,

$$N=R^2;$$

donc l'équation finale est

$$z^3+2Qz^2+(Q^2-4S)z-R^2=0\ldots\ldots(7);$$

et comme son dernier terme est essentiellement négatif, elle aura, au moins, deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative (Ire sect.). Reprenons maintenant l'équation simplifiée par $P=0$, savoir,

$$x^4+Qx^2+Rx+S=0,$$

pour laquelle les facteurs du second degré deviennent

$$x^2 + Ax + B = 0, \quad x^2 - Ax + B' = 0,$$

on trouvera, après les avoir multipliés l'un par l'autre, et comparé leur produit avec la proposée,

$$B = \frac{A(Q + A^2) - R}{2A}, \quad B' = \frac{S}{B};$$

donc on aura nécessairement une valeur réelle pour B et une pour B'. Ainsi les deux facteurs précedens seront réels.

Examinons le cas de $R = 0$; on a d'abord, d'après (7),

$$z = 0, \text{ d'où } y = 0,$$

et conséquemment $A = 0$, à cause de

$$y = A - \frac{P}{2}:$$

les valeurs correspondantes de B et B' deviennent donc $\frac{0}{0}$, circonstance sur laquelle nous allons revenir : les deux autres racines sont

$$z = -Q + 2\sqrt{S}, \quad z = -Q - 2\sqrt{S},$$

auxquelles répondent, d'après $A = y = \sqrt{z}$, ces valeurs de A,

$$A = \pm\sqrt{-Q + 2\sqrt{S}}, \quad A = \pm\sqrt{-Q - 2\sqrt{S}}.$$

Pour les deux premières valeurs conjuguées de A, on a

$$B = \frac{Q + A^2}{2} = \sqrt{S}, \quad B' = \frac{S}{B} = \sqrt{S},$$

et pour les secondes,

$$B = \frac{Q + A^2}{2} = -\sqrt{S}, \quad B' = \frac{S}{B} = -\sqrt{S}.$$

On conclut donc pour

$$x^4 + Qx^2 + S = 0,$$

ces deux décompositions

$$(x^2 + x\sqrt{-Q + 2\sqrt{S}} + \sqrt{S})$$
$$(x^2 - x\sqrt{-Q + 2\sqrt{S}} + \sqrt{S}) = 0 \ldots\ldots (8),$$
$$(x^2 + x\sqrt{-Q - 2\sqrt{S}} - \sqrt{S})$$
$$(x^2 - x\sqrt{-Q - 2\sqrt{S}} - \sqrt{S}) = 0 \ldots\ldots (9),$$

Maintenant pour voir ce qui se passe lorsque la valeur de B se produit sous la forme de l'indétermination, reprenons l'équation du quatrième degré et les facteurs du second, qui, dans l'hypothèse actuelle, se réduisent à

$$x^4 + Qx^2 + S = 0,$$
$$x^2 + B = 0, \quad x^2 + B' = 0;$$

on a donc pour résultats des comparaisons,

$$B + B' = Q, \quad BB' = S,$$

ensorte que la valeur de B sera donnée par la résolution d'une équation du second degré, dont l'une des racines sera prise pour B et l'autre pour B'. Ainsi la valeur de B, déduite de

$$B = \frac{A(Q + A^2) - R}{2A},$$

ne devenait $\frac{0}{0}$ pour $R = 0$, d'où résultait $A = 0$, que parce que l'expression de B étant rationnelle, n'était pas propre à donner deux valeurs de B, et cependant on ne devait pas plutôt obtenir l'une que l'autre [Ire sect., chap. XXV, (340)].

L'équation du second degré qui donne les deux valeurs de B, est

$$B^2 - QB + S = 0,$$

de laquelle on déduit

$$B = \tfrac{1}{2}Q + \sqrt{\tfrac{1}{4}Q^2 - S}, \quad B' = \tfrac{1}{2}Q - \sqrt{\tfrac{1}{4}Q^2 - S};$$

donc les facteurs doubles de

$$x^4 + Qx^2 + S = 0,$$

seront

$$(10)\ldots x^2+\tfrac{1}{2}Q+\sqrt{\tfrac{1}{4}Q^2-S},\quad x^2+\tfrac{1}{2}Q-\sqrt{\tfrac{1}{4}Q^2-S}\ldots(11).$$

Dans le cas de $S > 0$ et $> \frac{1}{4}Q^2$, si l'on pose

$$\tfrac{1}{2}Q = f,\quad \tfrac{1}{4}Q^2 - S = -g^2,$$

on trouvera les quatre facteurs du premier degré

$$x+\sqrt{-f-g\sqrt{-1}},\qquad x+\sqrt{-f+g\sqrt{-1}},$$
$$x-\sqrt{-f-g\sqrt{-1}},\qquad x-\sqrt{-f+g\sqrt{-1}};$$

si l'on multiplie entr'eux ceux de la première ligne, et l'un par l'autre ceux de la seconde, on trouvera d'abord

$$x^2+\left[\sqrt{-f-g\sqrt{-1}}+\sqrt{-f+g\sqrt{-1}}\right]x+\sqrt{f^2+g^2},$$
$$x^2-\left[\sqrt{-f-g\sqrt{-1}}+\sqrt{-f+g\sqrt{-1}}\right]x+\sqrt{f^2+g^2},$$

qui (chap. I) se transforment dans les suivans,

$$x^2+x\sqrt{-2f+2\sqrt{f^2+g^2}}+\sqrt{f^2+g^2},$$
$$x^2-x\sqrt{-2f+2\sqrt{f^2+g^2}}+\sqrt{f^2+g^2},$$

facteurs réels et les mêmes que ceux de (8), à cause de

$$f=\tfrac{1}{2}Q \quad\text{et}\quad -g^2=\tfrac{1}{4}Q^2-S,$$

tandis que les facteurs doubles produits des facteurs verticalement placés, savoir $x^2+f+g\sqrt{-1}$, $x^2+f-g\sqrt{-1}$, sont imaginaires : néanmoins en les multipliant entr'eux, on retrouve la proposée.

Il est maintenant très-facile de comprendre qu'on ne gagnerait rien à décomposer l'équation du troisième degré

$$x^3+Px^2+Qx+R=0,$$

dans les facteurs

$$x^2+Ax+B \quad\text{et}\quad x+A';$$

car pour la détermination de A′, on serait conduit à l'équa-

tion du troisième degré ;

$$-A'^3+PA'^2-QA'+R=0 \quad \text{ou} \quad A'^3-PA'^2+QA'-R=0,$$

puisque de $x+A'=0$ on déduit $x=-A'$: conséquence qui devient plus évidente encore, si l'on considère que A′ doit être l'une quelconque des racines de la proposée. Quant au coefficient A, comme il est la somme de deux quelconques des racines de la proposée, on aura pour l'évaluer une équation dont les racines seront

$$-(\alpha+\beta), \quad -(\alpha+\gamma), \quad -(\beta+\gamma),$$

et qui, conséquemment, sera du troisième degré. Le coefficient B sera encore donné par une équation du troisième degré, ayant pour racines les produits deux à deux $\alpha\delta$, $\alpha\gamma$, $\alpha\delta$: nous avons effectivement vu (Ire sect., chap. XXIV), que ces coefficiens étaient donnés par ces équations

$$A^3-2PA^2+(Q+P^2)A+R-QP=0, \qquad B=-\frac{R}{A-P}:$$

ensorte que quel que soit celui de ces coefficiens qu'on veuille évaluer, pour en conclure les deux autres, on parvient toujours à une équation du même degré que la proposée.

8. Ceux qui desireraient approfondir cette matière, pourront consulter la note X déjà citée de la résolution des équations numériques, sur *la décomposition des polynomes en facteurs réels*, que *Lagrange* termine par cette observation : « Il faut avouer » qu'à l'exception de quelques cas particuliers où la décompo- » sition de l'équation est facile, cette méthode sera impraticable » par la multiplicité et par la longueur des opérations qu'elle » peut exiger. » Aussi l'objet principal de cette note, est de prouver, *à priori*, la possibilité de cette décomposition des polynomes et des équations en facteurs réels du premier et du second degré, objet qui n'avait pas encore été rempli d'une manière directe et complète.

CHAPITRE XV.

De l'extraction des racines des quantités en partie commensurables et en partie incommensurables.

87. Nous avons déjà assigné (Ire sect., chap. XIX) la relation entre a et b, sous laquelle il était possible de décomposer l'expression doublement radicale $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ en deux radicaux carrés séparés ; nous allons, dans ce chapitre, généraliser la question, et nous occuper de l'extraction de la racine $n^{ième}$ des quantités de la forme $a+\sqrt{b}$, et d'abord, pour commencer par le cas le plus simple, nous considérerons celui de $n=3$.

On aperçoit de suite qu'on ne peut supposer

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}=\sqrt{A}+\sqrt{B},$$

parce que le cube de $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ ne contenant que des termes irrationnels, le nombre a ne serait pas commensurable comme on l'a supposé.

Cette contradiction cesse d'avoir lieu lorsqu'on suppose

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}=A+\sqrt{B},$$

ou, plus généralement,

$$\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}=(A+\sqrt{B})z,$$

z étant une indéterminée. Élevant de part et d'autre au cube,

il viendra

$$a + \sqrt{b} = z^3 \left(A^3 + 3A^2\sqrt{B} + 3AB + B\sqrt{B}\right),$$

ensorte que

$$a = z^3 \left(A^3 + 3AB\right), \quad \sqrt{b} = z^3 \left(3A^2 + B\right)\sqrt{B}.$$

Il fant de ces deux équations déduire A et B, et on observera que la forme supposée à la racine cubique, n'aura lieu qu'autant qu'on trouvera pour A et pour B des nombres rationnels. Elevant l'une et l'autre équation au carré, puis retranchant la seconde de la première, on aura

$$\frac{a^2 - b}{z^6} = A^6 - 3A^4B + 3A^2B^2 - B^3 = (A^2 - B)^3,$$

posant $z^3 = C$, puis extrayant la racine cubique de part et d'autre, il viendra

$$A^2 - B = \sqrt[3]{\frac{a^2 - b}{C^2}} = \frac{\sqrt[3]{(a^2 - b)C}}{C}.$$

Choisissons C d'après la condition que $(a^2 - b)\,C$ soit un cube parfait, et posons.

$$\frac{\sqrt[3]{(a^2 - b)C}}{C} = c,$$

nous aurons

$$A^2 - B = c, \quad \text{d'où} \quad B = A^2 - c.$$

Substituant pour B cette valeur dans celle de a, on trouvera

$$4CA^3 - 3cCA - a = 0.$$

Pour que A et B soient des nombres rationnels, il faut que la dernière équation ait une racine commensurable. On prend $C = 1$, lorsque $a^2 - b$ est un cube parfait, ainsi qu'il arrive à l'égard des doubles radicaux qui entrent dans

l'expression des racines du troisième degré, et qui sont de la forme

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}\pm\frac{p^3}{27}}}:$$

en effet, alors

$$a=-\frac{q}{2},\quad b=\frac{q^2}{4}\pm\frac{p^3}{27},$$

d'où résultent

$$a^2-b=\pm\frac{p^3}{27},\quad c=\sqrt[3]{\pm\frac{p^3}{27}}=\pm\frac{p}{3},$$

ensorte que l'équation qui donne A, devient

$$4A^3\mp pA+\frac{q}{2}=0,\quad \text{d'où}\quad 8A^3\mp 2pA+q=0,$$

et faisant $2A=y$,

$$y^3\mp py+q=0.$$

A l'égard de l'expression $\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}$, on poserait

$$\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}=(A-\sqrt{B})z,$$

et on suivra de tout point la marche des calculs précédens.

Soit la quantité $52+30\sqrt{3}$, dont on propose d'extraire la racine cubique : on a, par la comparaison,

$$a=52;\quad \sqrt{b}=30\sqrt{3},\quad a^2-b=4,$$

$$A^2-B=\frac{1}{C}\sqrt[3]{4C}.$$

Dans cet exemple, pour rendre $4C$ un cube parfait, il faut prendre $C=2$: on trouve ensuite

$$A^2-B=c=1\quad \text{et}\quad 8A^3-6A-52=0.$$

Pour préparer cette équation, on fera $2A = y$, d'où résulte

$$y^3 - 3y - 52 = 0:$$

on trouve pour la racine,

$$y = 4, \quad \text{donc} \quad A = 2, \quad B = 3,$$

d'où

$$\sqrt{52 + 30\sqrt{3}} = (2 + \sqrt{3})\sqrt[3]{2}.$$

Soit, en second lieu, l'expression $-10 + 9\sqrt{-3}$ dont on ait à extraire la racine cubique. Pour ce cas,

$$a = -10, \quad \sqrt{b} = 9\sqrt{-3}, \quad a^2 - b = 343,$$
$$A^2 - B = c = \sqrt[3]{343};$$

comme 343 est un cube parfait, savoir $(7)^3$, on a

$$C = 1, \quad c = 7,$$

et l'équation en A devient

$$4A^3 - 21A + 10 = 0,$$

dont les trois racines sont

$$A = 2, \quad A = \tfrac{1}{2}, \quad A = -\tfrac{5}{2};$$

donc

$$B = -3, \quad B = -\tfrac{27}{4}, \quad B = -\tfrac{3}{4};$$

d'où l'on déduirait les trois racines cubiques cherchées.

88. En général, la racine du degré n de l'expression $a + \sqrt{b}$, doit être supposée de la forme $A + \sqrt{B}$: 1°. parce que ce résultat élevé à la puissance n, est comparable avec $a + \sqrt{b}$; 2°. parce qu'il résultera de cette comparaison deux équations, l'une entre les termes rationnels, et l'autre entre les termes incommensurables, desquelles on déduira les valeurs des indéterminées A et B, qui doivent être rationnelles lorsque l'extraction est possible. On introduit dans cette analyse une arbitraire C qu'on détermine de manière que B ne devienne

commensurable ou incommensurable que par A, ainsi qu'on le remarque dans la racine précédente. Soit donc à extraire la racine $n^{ième}$ de $a+\sqrt{b}$: on posera

$$\sqrt[n]{a+\sqrt{b}} = (A+\sqrt{B})\sqrt[n]{C},$$

ensorte qu'en élevant de part et d'autre à la puissance n, et faisant deux équations, l'une entre les termes rationnels, et l'autre entre les termes incommensurables, on aura

$$a = C\left(A^n + \frac{n.n-1}{1.2}A^{n-2}B + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}A^{n-4}B^2 + \text{etc.}\right)(1),$$

$$\sqrt{b} = C\left(\frac{n}{1}A^{n-1}\sqrt{B} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}A^{n-3}B\sqrt{B} + \text{etc.}\right)\ldots(2),$$

d'où il est facile de conclure

$$a = \tfrac{1}{2}C[(A+\sqrt{B})^n + (A-\sqrt{B})^n],$$
$$\sqrt{b} = \tfrac{1}{2}C[(A+\sqrt{B})^n - (A-\sqrt{B})^n].$$

En imitant ce qui a éte fait précédemment, on retranchera le carré de la seconde équation de celui de la première, ce qui donnera

$$a^2 - b = \tfrac{1}{4}C^2\left\{\begin{array}{l}(A+\sqrt{B})^{2n} + 2(A^2-B)^n\\ +(A-\sqrt{B})^{2n} - (A+\sqrt{B})^{2n}\\ +2(A^2-B)^n - (A-\sqrt{B})^{2n}\end{array}\right\}$$

et réduisant, on trouvera

$$a^2 - b = C^2(A^2-B)^n,$$

d'où
$$A^2 - B = \sqrt[n]{\frac{a^2-b}{C^2}};$$

Il faudra d'abord prendre C de manière que $\sqrt[n]{\frac{a^2-b}{C^2}}$ devienne une puissance exacte du degré n, que nous dési-

gnerons par c, ensorte que

$$B = A^2 - c \ldots\ldots. (3).$$

Substituant cette valeur pour B dans (1), on aura une équation du degré n en A (*), qui devra comporter des racines commensurables, pour que B et A soient des nombres commensurables.

Supposons qu'on ait à extraire la racine cubique de $-3 + \frac{10}{9}\sqrt{-3}$: on aura

$$n = 3, \quad a = -3, \quad b = -\frac{100}{27}, \quad \frac{a^2 - b}{C^2} = \frac{343}{27C^2} = \frac{7^3}{3^3},$$

en posant $C = 1$: donc

$$A^2 - B = \tfrac{7}{3}, \quad \text{d'où} \quad B = A^2 - \tfrac{7}{3};$$

ensorte que l'équation (1), en y faisant $n = 3$ et remplaçant B par sa valeur ci-dessus, donne la suivante,

$$4A^3 - 7A + 3 = 0,$$

qui a pour racines $\frac{1}{2}$, $+1$, $-\frac{3}{2}$: les valeurs de B seront donc $-\frac{25}{12}$, $-\frac{4}{3}$, $-\frac{1}{12}$, et le binome proposé aura les trois racines cubiques

$$\tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{6}\sqrt{-3}, \quad 1 + \tfrac{2}{3}\sqrt{-3}, \quad -\tfrac{3}{2} + \tfrac{1}{6}\sqrt{-3}.$$

La racine quatrième du binome $14 + 8\sqrt{3}$ donne

$$n = 4, \quad a = 14, \quad b = 192, \quad \text{d'où} \quad a^2 - b = 4:$$

(*) On observera que n étant pair, la plus haute puissance de B dans (1), est $B^{\frac{n}{2}}$ qui est multiplié par A^0; ensorte que, d'après (3), $B^{\frac{n}{2}}$ sera remplacé par un polynome du degré n en A. Lorsque n sera impair, la plus haute puissance de B dans (1), sera $B^{\frac{n-1}{2}}$ qu'on remplacera, d'après (3), par un polynome du degré $n - 1$ en A; mais comme $B^{\frac{n-1}{2}}$ est multiplié par A, le polynome résultant sera encore du degré n.

qu'on pose $C = \frac{1}{2}$, on aura

$$A^2 - B = \sqrt[4]{16} = 2, \quad \text{d'où} \quad B = A^2 - 2,$$

et l'équation (1) deviendra

$$A^4 - 2A^2 - 3 = 0;$$

on en déduit

$$A = \pm \sqrt{3}, \quad A = \pm \sqrt{-1},$$

et ces valeurs correspondantes de B, savoir, $B = 1$, $B = -3$. Le système de valeurs $A = \sqrt{3}$ et $B = 1$, donne

$$\sqrt[4]{14 + 8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt[4]{2}}.$$

Dans le cas de n pair, comme il arrive dans le second exemple, l'équation (1) est du quatrième degré, et réductible à une équation d'un degré moitié moindre, c'est-à-dire, résoluble à la manière des équations du second degré. Mais alors on peut poser

$$\sqrt[2n]{a + \sqrt{b}} = (\sqrt{A} + \sqrt{B})\sqrt[2n]{C},$$

A et B devant être des quantités rationnelles. Elevant de part et d'autre à la puissance $2n$, on trouve

$$a+\sqrt{b} = C\left\{\begin{array}{l}(\sqrt{A})^{2n} + \frac{2n}{1}(\sqrt{A})^{2n-1}\sqrt{B} + \frac{2n.2n-1}{1.2}(\sqrt{A})^{2n-2}B \\ + \frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3}(\sqrt{A})^{2n-3}B\sqrt{B} + \text{etc.}\end{array}\right\},$$

Egalant séparément les termes rationnels et ceux qui sont affectés de radicaux, on obtient ces deux équations

$$a = C\left\{\begin{array}{l}A^n + \frac{2n.2n-1}{1.2}A^{n-1}B \\ + \frac{2n.2n-1.2n-2.2n-3.A^{n-2}B^2}{1.2.3.4} + \text{etc.}\end{array}\right\}\ldots(4),$$

$$\sqrt{b} = C\left\{\frac{2n}{1}(\sqrt{A})^{2n-1}\sqrt{B} + \frac{2n.2n-1.2n-2}{1.2.3}(\sqrt{A})^{2n-3}B\sqrt{B} + \text{etc.}\right\},$$

c'est-à-dire,

$$a = \tfrac{1}{2}C[(\sqrt{A}+\sqrt{B})^{2n} + (\sqrt{A}-\sqrt{B})^{2n}],$$
$$\sqrt{b} = \tfrac{1}{2}C[(\sqrt{A}+\sqrt{B})^{2n} - (\sqrt{A}-\sqrt{B})^{2n}],$$

et de là, comme ci-dessus,

$$a^2 - b = C^2(A-B)^{2n},$$

d'où

$$A - B = \sqrt[2n]{\frac{a^2-b}{C^2}} = c,$$

et conséquemment,

$$B = A - c.$$

Ces formules appliquées à l'exemple que nous venons de traiter, donnent

$$n = 2, \quad a = 14, \quad b = 192, \quad \text{d'où} \quad a^2 - b = 4,$$

$$A - B = \sqrt[4]{\frac{4}{C^2}} = \sqrt[4]{16} = 2 = c;$$

en faisant $C = \frac{1}{2}$: on a donc

$$B = A - 2,$$

et l'équation (4) donne, par la substitution de cette valeur de B, et dans les hypothèses précédentes,

$$A^2 - 2A - 3 = 0,$$

d'où l'on déduit

$$A = 3, \quad A = -1,$$

valeurs auxquelles correspondent

$$B = 1, \quad B = -3.$$

Pour $A = 3$ et $B = 1$, on trouve, comme ci-dessus,

$$\sqrt[4]{14 + 8\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt[4]{2}}.$$

CHAPITRE XVI.

De l'évanouissement des radicaux dans les équations.

89. L'ÉVANOUISSEMENT des radicaux dans les équations qui en contiennent, ne présente quelques difficultés que lorsque les radicaux entrent dans plusieurs termes; car lorsqu'il n'entre qu'un seul radical dans l'équation, on peut l'isoler dans l'un des membres, et élever à la puissance indiquée par l'indice du radical.

90. La règle à suivre pour ramener une équation à une forme toute rationnelle, est celle-ci : *Remplacez chaque radical par une lettre, ce qui donnera une équation sans radicaux, et d'ailleurs autant d'équations que de radicaux : élevez chacune de celles-ci à une puissance égale à l'indice du radical qu'elle contient ; puis éliminant entre toutes ces équations, les lettres qui représentent les radicaux, il viendra une équation finale qui sera celle qu'on cherche.*

Eclaircissons cette règle par quelques exemples. Soit d'abord l'équation

$$x^2 - \sqrt{ax} + \sqrt[3]{bx^2} = m,$$

posons

$$\sqrt{ax} = y, \quad \sqrt[3]{bx^2} = z,$$

hypothèses qui réduisent la proposée à

$$x^2 - y + z = m,$$

d'où on déduit

$$y = x^2 + z - m:$$

élevant au carré de part et d'autre, remplaçant y^2 par sa valeur ax, et faisant

$$A = (x^2 - m)^2 - ax, \quad B = 2(x^2 - m),$$

on aura la transformée

$$z^2 + Bz + A = 0 \ldots\ldots (1);$$

mais l'équation $z = \sqrt[3]{bx^2}$ élevée au cube, donne

$$z^3 - bx^2 = 0,$$

et la précédente multipliée par z, devient

$$z^3 + Bz^2 + Az = 0;$$

retranchant la première de la seconde, la différence est

$$Bz^2 + Az + bx^2 = 0 \ldots\ldots (2);$$

multipliant (1) par B, et du produit retranchant (2), on trouve

$$(B^2 - A)z + BA - bx^2 = 0,$$

d'où

$$z^3 = \frac{(bx^2 - BA)^3}{(B^2 - A)^3} = bx^2,$$

et faisant disparaître le dénominateur, on parvient à

$$bx^2(B^2 - A)^3 = (bx^2 - BA)^3.$$

Après avoir remplacé B et A par leurs valeurs, fonctions rationnelles de x, on trouvera une équation du dix-huitième degré.

Soit, en second lieu,

$$\sqrt{ax} - \sqrt{a^2 - ax} = 2a + \sqrt[3]{ax^2} \ldots\ldots (1):$$

pour en faire disparaître les radicaux, posons

$$t=\sqrt{ax}, \quad v=\sqrt{a^2-ax}, \quad y=\sqrt[3]{ax^2} \ldots\ldots (2),$$

substitutions qui transformeraient la proposée dans la suivante,

$$t-v=2a+y:$$

c'est de cette équation qu'il faut nécessairement éliminer t, v et y, pour n'avoir plus qu'une équation rationnelle en x. Elle donne d'abord

$$y=t-v-2a, \quad \text{ou} \quad y=t-r,$$

en faisant

$$r=v+2a;$$

donc

$$y^3=ax^2=t^3-3t^2r+3tr^2-r^3 \ldots\ldots (3),$$

et puisque $t=\sqrt{ax}$, on a

$$t^2=ax, \quad t^3=atx;$$

substituant pour t^2 et t^3 leurs valeurs dans (3), cette équation devient

$$ax^2=atx-3arx+3tr^2-r^3 \ldots\ldots (4);$$

d'ailleurs,

$$r^2=v^2+4av+4a^2=5a^2+4av-ax;$$

en mettant pour v^2 sa valeur a^2-ax; et, à cause de $r=v+2a$, on a

$$r^3=v^3+6av^2+12a^2v+8a^3,$$

remplaçant v^2 par a^2-ax et v^3 par a^2v-avx, on trouve, après les réductions,

$$r^3=14a^3+13a^2v-avx-6a^2x.$$

Substituant maintenant dans (4) pour r, r^2 et r^3 leurs valeurs, on obtient

$$ax^2 = atx + 3ax(-v-2a) + 3t(5a^2+4av-ax) + (-14a^3-13a^2v+avx+6a^2x).$$

Faisant les multiplications indiquées, transposant dans le premier membre les termes affectés de t, et dégageant t, on aura

$$t = \frac{ax^2+14a^3+13a^2v+2avx}{15a^2-2ax+12av} = \frac{x^2+14a^2+13av+2vx}{15a-2x+12v}.$$

Elevant tout au carré, il vient

$$t^2 = ax = \left(\frac{x^2+14a^2+13av+2vx}{15a-2x+12v}\right)^2.$$

Après avoir développé le carré, fait évanouir le dénominateur, substitué pour v^2 sa valeur a^2-ax, opéré toutes les réductions, et transporté dans le premier membre tous les termes affectés de v, on aura, en dégageant v, élevant ensuite les deux membres au carré, et remplaçant v^2 par sa valeur a^2-ax,

$$a^2 - ax = \left(\frac{x^4-8ax^3+184a^2x^2-486a^3x+365a^4}{-4x^3-74ax^2+304a^2x-364a^3}\right)^2;$$

faisant les opérations indiquées, et ordonnant le résultat par rapport aux puissances de x, on trouve enfin,

$$x^8+1008a^2x^6-1464a^3x^5-2762a^2x^4+3680a^5x^3 + 2916a^6x^2-972a^7x+729a^8=0.$$

91. On peut encore se proposer cette question : *Trouver l'équation qui a donné pour l'une de ses racines,*

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}.$$

Ce problème admet plusieurs solutions. On peut d'abord combiner $\sqrt[3]{A}$ et $\sqrt[3]{B}$ avec les trois racines cubiques de l'unité, ainsi qu'on l'a vu (chap. X), ce qui fournit ces neuf combinaisons de facteurs,

$$x - \sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B},\quad x - \alpha\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B},\quad x - \sqrt[3]{A} - \alpha\sqrt[3]{B},$$
$$x - \alpha\sqrt[3]{A} - \alpha\sqrt[3]{B},\quad x - \alpha\sqrt[3]{A} - \alpha^2\sqrt[3]{B},\quad x - \alpha^2\sqrt[3]{A} - \alpha\sqrt[3]{B},$$
$$x - \alpha^2\sqrt[3]{A} - \alpha^2\sqrt[3]{B},\quad x - \alpha^2\sqrt[3]{A} - \sqrt[3]{B},\quad x - \sqrt[3]{A} - \alpha^2\sqrt[3]{B}.$$

Si l'on multiplie ces facteurs entr'eux, et qu'on tienne compte de ces relations connues entre les racines cubiques de l'unité,

$$1 + \alpha + \alpha^2 = 0,\quad \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 = 0,\quad \alpha^3 = 1,$$

il ne restera dans le produit aucun terme irrationnel.

On peut encore poser

$$t = \sqrt[3]{A} \quad \text{et} \quad u = \sqrt[3]{B},$$

d'où résultent

$$t^3 - A = 0,\quad u^3 - B = 0,$$

et conséquemment,

$$x - t - u = 0.$$

Si pour t on écrit ses trois valeurs $\sqrt[3]{A}$, $\alpha\sqrt[3]{A}$, $\alpha^2\sqrt[3]{A}$, on aura à multiplier les trois facteurs

$$[(x-u) - \sqrt[3]{A}]\,[(x-u) - \alpha\sqrt[3]{A}]\,[(x-u) - \alpha^2\sqrt[3]{A}]:$$

or les coefficiens des second, troisième et quatrième termes

étant

$$1 + \alpha + \alpha^2 = 0, \quad \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 = 0, \quad \alpha^3 = 1,$$

le produit se réduira à

$$(x - u)^3 - A = 0.$$

Ecrivant pour u ses trois valeurs $\sqrt[3]{B}$, $\alpha\sqrt[3]{B}$, $\alpha^2\sqrt[3]{B}$, ce produit donnera lieu aux trois autres facteurs

$$(x - \sqrt[3]{B})^3 - A, \quad (x - \alpha\sqrt[3]{B})^3 - A, \quad (x - \alpha^2\sqrt[3]{B})^3 - A;$$

dont le produit réduit d'après les trois relations précédentes, est le même que celui qu'on obtiendrait par le procédé ci-dessus.

Enfin, la manière la plus simple de résoudre la question énoncée, consiste à faire disparaître les radicaux cubiques par des puissances cubiques successives. On aura d'abord

$$x^3 = A + 3\sqrt[3]{A^2B} + 3\sqrt[3]{AB^2} + B:$$

transposant dans le premier membre les termes sans radicaux, on trouvera

$$x^3 - A - B = 3\sqrt[3]{A^2B} + 3\sqrt[3]{AB^2}$$
$$= 3\sqrt[3]{AB}[\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}];$$

donc

$$x^3 - A - B = 3x\sqrt[3]{AB}.$$

Elevant au cube de part et d'autre, l'irrationnalité disparaîtra, et on parviendra à l'équation cherchée,

$$[x^3 - (A + B)]^3 = 27ABx^3,$$

laquelle est du neuvième degré, ainsi que la première solution le démontrait *à priori*. Cette équation est réductible au

troisième degré, par l'hypothèse

$$x^3 = z:$$

or si nous supposons

$$A = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \quad B = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

nous trouverons

$$x^3 + q = -px, \quad \text{d'où} \quad x^3 + px + q = 0,$$

pour l'équation du troisième degré qui a donné pour l'une de ses racines,

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B},$$

comme on le savait d'avance.

92. Il nous reste à faire observer que les opérations au moyen desquelles on fait disparaître les radicaux, introduisent des racines étrangères à la proposée. Nous nous expliquerons sur des exemples.

L'équation

$$\sqrt{x-1} = 1 + \sqrt{x-4} \ldots\ldots (1),$$

en faisant disparaître les radicaux, conduit à

$$x - 4 = 1, \quad \text{d'où} \quad x = 5,$$

valeur qui satisfait à la proposée. L'équation

$$-\sqrt{x-1} = 1 - \sqrt{x-4} \ldots\ldots (2),$$

conduit encore à $x = 5$, après l'évanouissement des radicaux; mais il faut observer qu'elle ne sera satisfaite par cette valeur de x, qu'en prenant chacune des racines $\sqrt{4}$ et $\sqrt{1}$ avec le signe moins. Ainsi l'équation (2) ne peut être satisfaite, lorsqu'on prend les radicaux sous le signe plus.

L'équation

$$2x - \sqrt{x+1} = 4,$$

conduit à

$$4x^2 - 17x + 15 = 0 \ldots\ldots (3),$$

qui a pour racines

$$x = 3, \quad x = \tfrac{5}{4};$$

la première valeur de x satisfait seule à la proposée, mais la seconde, substituée dans le premier membre, donne l'unité, et conséquemment elle ne satisfait pas. Pour rendre raison de ce fait, on observera que le carré de $\sqrt{x+1}$, étant le même que celui de $-\sqrt{x+1}$, les deux équations

$$(4) \ldots -\sqrt{x+1} = 4 - 2x, \quad +\sqrt{x+1} = 4 - 2x \ldots (5),$$

conduisent à l'équation (3), et que $x = 3$ satisfait à (4), tandis que $x = \frac{5}{4}$ satisfait à (5).

Par rapport à l'équation

$$\sqrt{x+2} - \sqrt[3]{3x-5} = 1,$$

si on fait disparaître d'abord le radical cube, puis le radical carré, on est conduit à

$$x^3 - 24x^2 + 21x + 46 = 0,$$

dont les racines sont $+2$, $+23$ et -1 : les deux premières satisfont à la proposée, tandis que la dernière ne convient qu'en prenant le radical carré avec le signe moins. Autrement, si l'on pose

$$\sqrt{x+2} = y, \quad \sqrt[3]{3x-5} = z,$$

d'où

$$x + 2 = y^2, \quad 3x - 5 = z^3 \quad \text{et} \quad y - z = 1,$$

et qu'on élimine x et y entre ces trois équations, on trouvera

$$z^3 - 3z^2 - 6z + 8 = 0,$$

équation qui a pour racines $+1$, $+4$ et -2; les valeurs correspondantes de y, sont $+2$, $+5$ et -1, et celles de x sont, comme précédemment, $+2$, $+23$ et -1 : or à

$$z = -2 = \sqrt[3]{3x-5},$$

correspondent

$$y = -1 = \sqrt{x+2} \quad \text{et} \quad x = -1,$$

et la valeur de y montre qu'il faut prendre le radical carré avec le signe moins.

93. Il nous reste à étendre ces procédés à deux équations entre deux inconnues.

Soient les deux équations

$$y + 1 = \sqrt{2x}, \quad x + y = 1 + \sqrt{x+y+1}:$$

en faisant successivement disparaître les radicaux contenus dans chacune d'elles, on aura celles-ci,

$$2x = y^2 + 2y + 1, \quad x^2 + 2xy - 3x + y^2 - 3y = 0,$$

qui donnent pour équation finale (Ire sect., chap. XXV),

$$y^4 + 8y^3 + 12y^2 - 16y - 5 = 0.$$

Les valeurs de y seront $+1$, -5, $-2+\sqrt{3}$, $-2-\sqrt{3}$, et les valeurs correspondantes de x seront $+2$, $+8$, $2-\sqrt{3}$, et $2+\sqrt{3}$: les valeurs $y=+1$, $x=+2$ satisfont aux proposées; mais $y=-5$ et $x=+8$ ne leur conviennent qu'en prenant $\sqrt{2x}$ avec le signe moins. Les valeurs

$$y = -2 + \sqrt{3}, \quad x = 2 - \sqrt{3},$$

substituées dans les proposées, donnent

$$-1 + \sqrt{3} = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}}, \quad 0 = 1 + \sqrt{1};$$

la seconde n'est donc vraie qu'en prenant en moins le radical $\sqrt{x+y+1}$: en partant de la formule

$$\sqrt{a-\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+c}{2}} - \sqrt{\frac{a-c}{2}},$$

trouvée (Ire sect., chap. XIX) ; et posant $a=4$, $b=12$, on trouvera, à cause de $c=\sqrt{a^2-b}$,

$$\sqrt{4-\sqrt{12}} = \sqrt{3} - \sqrt{+1} = -1 + \sqrt{3}:$$

ainsi on doit prendre $\sqrt{2x}$ en plus. On découvrira facilement les signes qu'on doit supposer aux radicaux pour que les proposées prennent le couple de solutions,

$$y = -2 - \sqrt{3}, \quad x = 2 + \sqrt{3}.$$

CHAPITRE XVII.

De la résolution des équations littérales.

94. Tout ce que nous avons dit jusqu'ici, ne convient qu'aux équations numériques : nous nous occuperons, dans ce chapitre, de la résolution des équations littérales.

95. Pour commencer par le cas le plus simple, considérons d'abord l'équation

$$x^2 - 16ax + 55a^2 = 0:$$

on fera $x = ay$, et on aura la transformée

$$y^2 - 16y + 55 = 0,$$

qui n'est que la proposée en y faisant $a = 1$, ensorte que les racines de celle-ci étant 5 et 11, celles de la première seront $5a$ et $11a$.

Les racines de l'équation

$$x^3 + a^2x - 2a^3 = 0,$$

seront pareillement données par celles de

$$y^3 + y - 2 = 0;$$

et comme l'une des racines y est l'unité, la correspondante dans la proposée, sera $= a$: les deux autres seront imaginaires. On remarquera que les deux équations que nous venons de traiter, ne sont réductibles à des équations numériques que parce qu'elles sont homogènes.

22..

96. Passons aux équations homogènes entre trois lettres, et considérons d'abord la suivante,

$$x^3 + a^2x + abx - 2a^3 - b^3 = 0,$$

on pourra appliquer à sa résolution la méthode des coefficiens indéterminés : à cet effet, et si $b < a$, on posera

$$x = \mathrm{A} + \mathrm{B}b + \mathrm{C}b^2 + \mathrm{D}b^3 + \text{etc.},$$

A, B, C, D, etc. étant des coefficiens, fonctions de a et de nombres, qu'il s'agit d'évaluer. On a, d'après cette hypothèse,

$$\begin{array}{rlllll}
x^3 = & \mathrm{A}^3 + 3\mathrm{A}^2\mathrm{B}b & + 3\mathrm{AB}^2 & \big| \; b^2 + \mathrm{B}^3 & \big| \; b^3 & + \text{etc.} \\
 & & + 3\mathrm{A}^2\mathrm{C} & \big| \; \quad + 3\mathrm{A}^2\mathrm{D} & \big| & + \text{etc.} \\
 & & & \quad + 6\mathrm{ABC} & \big| & + \text{etc.} \\
+ a^2x = & a^2\mathrm{A} + a^2\mathrm{B}b & + a^2\mathrm{C}b^2 & + a^2\mathrm{D}b^3 & & + \text{etc.} \\
+ abx = & \quad + a\mathrm{A}b & + a\mathrm{B}b^2 & + a\mathrm{C}b^3 & & + \text{etc.} \\
- 2a^3 = & - 2a^3 & & & & \\
- b^3 = & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & - b^3; & &
\end{array}$$

et parce que la somme des premiers membres est nulle, il y a lieu aux égalités

$$\begin{array}{r}
\mathrm{A}^3 + a^2\mathrm{A} - 2a^3 = 0, \\
3\mathrm{A}^2\mathrm{B} + a^2\mathrm{B} + a\mathrm{A} = 0, \\
3\mathrm{AB}^2 + 3\mathrm{A}^2\mathrm{C} + a^2\mathrm{C} + a\mathrm{B} = 0, \\
\mathrm{B}^3 + 3\mathrm{A}^2\mathrm{D} + 6\mathrm{ABC} + a^2\mathrm{D} + a\mathrm{C} - 1 = 0, \\
\text{etc.}
\end{array}$$

La première est satisfaite par la supposition

$$\mathrm{A} = a;$$

cette substitution faite dans la seconde, la réduit à

$$3a^2\mathrm{B} + a^2\mathrm{B} + a^2 = 0, \quad \text{d'où} \quad \mathrm{B} = -\tfrac{1}{4}.$$

Ces valeurs de A et de B, portées dans la troisième,

donnent

$$C = \frac{1}{64a};$$

de la quatrième on déduit

$$D = \frac{131}{512a^2}.$$

On trouve donc

$$x = a - \frac{b}{4} + \frac{b^2}{64a} + \frac{131b^3}{512a^2} + \text{etc.},$$

série convergente, puisqu'on a supposé $b < a$.

On remarquera qu'on a déterminé le premier coefficient A par la résolution de l'équation

$$A^3 + a^2A - 2a^3 = 0;$$

mais si cette équation n'admettait pas de racines commensurables, on serait réduit à chercher une valeur approchée de A.

Dans le cas de $b > a$, on supposerait

$$x = A + Ba + Ca^2 + Da^3 + \text{etc.},$$

et opérant ainsi qu'on vient de le voir, on trouverait

$$A = b,\quad B = -\tfrac{1}{3},\quad C = -\frac{1}{3b},\quad D = \frac{55}{81b^2},\quad \text{etc.},$$

d'où résulte

$$x = b - \frac{a}{3} - \frac{a^2}{3b} + \frac{55a^3}{81b^2} - \text{etc.},$$

série convergente.

Sous la première relation $b < a$, si l'on regarde la quantité b comme nulle, la proposée se réduit à

$$x^3 + a^2x - 2a^3 = 0,$$

équation qui est la même que celle qui a servi plus haut

à déterminer A, ensorte qu'on en déduit une première valeur approchée de x, c'est-à-dire a. On pourra donc poser

$$x = a + p,$$

p étant une quantité très-petite, et on aura la transformée

$$\begin{aligned} & a^3 + 3a^2p + 3ap^2 + p^3 = o = a^2b + 4a^2p; \\ & + a^3 + a^2p \\ & + a^2b + abp \\ & - 2a^3 \\ & - b^3. \end{aligned}$$

en négligeant dans cette première approximation, les termes qui renferment les puissances de p et b, supérieures à la première, ainsi que ceux qui renferment des produits de b par p. On a donc

$$p = -\frac{b}{4}.$$

Qu'on suppose maintenant

$$x = a - \frac{b}{4} + q,$$

par la substitution, et en s'arrêtant à la première puissance de q, on trouvera

$$\left(a - \frac{b}{4}\right)^3 + 3\left(a - \frac{b}{4}\right)^2 q + a^2\left(a - \frac{b}{4}\right)$$
$$+ a^2q + ab\left(a - \frac{b}{4}\right) + abq - 2a^3 - b^3 = o;$$

négligeant les puissances de b, supérieures à la seconde, puisqu'on s'en tient à b^2 dans cette approximation, négligeant aussi les produits de b par q, comme étant d'un degré inférieure à b^2, la transformée précédente deviendra

$$-\frac{1}{16}ab^2 + 4a^2q = o, \quad \text{d'où} \quad q = \frac{1}{64}\frac{b^2}{a};$$

donc

$$x = a - \frac{b}{4} + \frac{1}{64}\,\frac{b^2}{a}.$$

Pour trouver un terme de plus, nous poserons

$$x = a - \frac{b}{4} + \frac{1}{64}\,\frac{b^2}{a} + r:$$

en négligeant les puissances de r au-dessus de la première, celles de b au-dessus de b^3, et les produits br, b^2r moindres que b^3, puisqu'on s'en tient à b^3 dans cette approximation, on trouve, après les réductions, cette transformée,

$$4a^2r = \frac{131b^3}{128}, \quad \text{d'où} \quad r = \frac{131}{512}\,\frac{b^3}{a^2},$$

ensorte que

$$x = a - \frac{b}{4} + \frac{1}{64}\,\frac{b^2}{a} + \frac{131}{512}\,\frac{b^3}{a^2} + \text{etc.},$$

série obtenue précédemment par une autre voie.

97. Les équations qui contiennent plus de trois lettres, peuvent se traiter à peu près de la même manière; mais la difficulté consiste à découvrir ceux des termes de l'équation, qui sont les plus grands, et qui déterminent la loi suivant laquelle doit descendre la série. Nous allons résoudre la question par une autre méthode.

Soit l'équation

$$x^3 - acb^2x^2 \begin{array}{l} - a^6b^2 \\ + a^5b^6 \\ + cd \end{array} \left| \begin{array}{l} x + a^8b^4 \\ + a^7b^5 \\ - 2a^4b^3c \end{array} \right. = 0\ldots\ldots(1),$$

dont on demande les racines qui seront exprimées par des suites infinies, si elles sont incommensurables.

D'abord on supposera $x = a^m$, et si l'on est tombé sur une racine de l'équation, nécessairement après avoir ordonné le

résultat par rapport aux puissances successives de la lettre a, les coefficiens de ces puissances seront égaux à zéro; mais on conçoit que, pour qu'une telle réduction ait lieu, il faut que la puissance m de a, soit telle qu'il n'y ait pas dans le résultat de la substitution, un terme unique de plus haut exposant de la lettre a, parce que ce terme ne pouvant se réduire avec aucun autre, sa destruction serait impossible. Soit d'abord, par rapport à la proposée, $x=a^{10}$; et on aura cette ligne des plus grands exposans de la lettre a,

$$a^{30},\quad a^{21},\quad a^{16},\quad a^{8};$$

cette supposition n'est pas admissible, parce que a^{30} est le seul terme de son espèce. Les hypothèses

$$\left.\begin{array}{l} x=a^5 \\ x=a^4 \end{array}\right\} \text{ donnent } \left\{\begin{array}{l} a^{15},\ a^{11},\ a^{11},\ a^{8}, \\ a^{12},\ a^{9},\ a^{10},\ a^{8}, \end{array}\right.$$

et elles doivent être rejetées, parce que les termes a^{15} et a^{12} ne se trouvent pas répétés. Soit enfin $x=a^3$: on a pour la ligne des plus grands exposans,

$$a^{9},\quad a^{7},\quad a^{9},\quad a^{8},$$

supposition admissible, puisqu'elle fournit deux termes d'une même plus haute puissance de la lettre a, et qu'ainsi les termes de a^9 peuvent se détruire. Ces deux termes sont $a^9-b^2a^9$; or, si l'on eut supposé

$$x=ka^3,$$

k étant une indéterminée, la condition

$$k^3a^9-kb^2a^9=0$$

aurait donné

$$k=\pm b;$$

donc $\pm ba^3$ est le premier terme de deux des racines de l'équation proposée. Soit $x=a^2$; ce qui donne pour la ligne des plus hauts exposans de a,

$$a^{6},\quad a^{5},\quad a^{8},\quad a^{8},$$

et faisant, comme dans l'exemple précédent, $x = ka^2$, les deux termes de a^8 seront

$$-kb^2a^8 + b^4a^8 = 0, \quad \text{d'où} \quad k = b^2;$$

donc a^2b^2 est le premier terme d'une troisième racine de l'équation proposée. Toute autre supposition serait à rejeter, ensorte qu'on ne trouverait que trois racines, ce qui doit arriver, puisque la proposée n'est que du troisième degré. Nous verrons bientôt comment on obtiendrait les termes subséquens des trois séries qui expriment les trois racines.

98. Soit, en général, l'équation

$$\left.\begin{matrix} a^n \\ + \text{etc.} \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} x^m + a^{n'} \\ + \text{etc.} \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} x^{m'} + a^{n''} \\ + \text{etc.} \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} x^{m''} + a^{n'''} \\ + \text{etc.} \end{matrix}\right| x^{m'''} + \text{etc.} = 0,$$

la ligne inférieure contenant les termes sous-ordonnés par rapport à la lettre a : on demande quelle puissance de la lettre a il faut substituer à la place de l'inconnue x pour que deux termes aient la plus haute puissance de la lettre a. Si l'on suppose

$$x = a^e,$$

la proposée deviendra

$$\begin{matrix} a^{n+me} + a^{n'+m'e} + a^{n''+m''e} \text{ etc.} = 0. \\ + \text{etc.} + \text{etc.} \quad + \text{etc.} \end{matrix}$$

Considérons deux exposans quelconques, par exemple, $n+me$ et $n' + m'e$: suivant qu'on aura

$$n + me > \text{ou} = \text{ou} < n' + m'e,$$

on aura aussi

$$e > \text{ou} = \text{ou} < \frac{n' - n}{m - m'}.$$

Soient maintenant (fig. 4)

$$Am = m, \quad Am' = m', \quad mn = n, \quad m'n' = n',$$

mn et $m'n'$ étant perpendiculaires sur AN, et menons une

ligne NM qui fasse avec l'axe des abscisses, un angle dont la tangente trigonométrique $= e$: si cette ligne marchant parallèlement à elle-même, jusqu'à rencontrer le point n, rencontre en même temps le point n', on aura, en menant nn'' parallèle à AN,

$$\text{tang}\, n'nn'' = e = \frac{n'n''}{nn''} = \frac{n'm' - nm}{\text{A}m - \text{A}m'} = \frac{n' - n}{m - m'}:$$

si elle laisse le point n' en dessous, alors on aura (fig. 5)

$$e > \frac{n' - n}{m - m'} \quad \text{ou} \quad n + me > n' + m'e.$$

enfin si cette parallèle à MN passant par n, laisse le point n' en dessus, on en conclura

$$e < \frac{n' - n}{m - m'}, \quad \text{d'où} \quad n + me < n' + m'e.$$

Dans le premier de ces trois cas seulement, la substitution $x = a^e$ donnera deux termes de plus grands exposans égaux.

A l'effet de généraliser ce procédé, prenons pour abscisses les exposans de x, et pour ordonnées correspondantes, les plus hauts exposans de a dans chaque coefficient des puissances successives de x. Si on veut avoir deux termes qui renferment la même plus haute puissance de a, il faudra incliner la ligne passant par l'extrémité de l'ordonnée correspondante à la plus grande abscisse, jusqu'à ce qu'elle rencontre un autre point situé de telle manière qu'elle laisse tous les autres en deçà, par rapport à l'axe des abscisses : alors la tangente de cette inclinaison sera la puissance cherchée de la lettre a : on obtiendra donc le premier terme d'une des racines, en égalant à zéro les deux termes correspondans de l'équation, et tirant de là la valeur de x en a. Par exemple, dans l'équation (1), on aurait (fig. 6)

$$\text{A}m = m = 3, \quad mn = n = 0, \quad \text{A}m' = m' = 2, \quad m'n' = n' = 1,$$
$$\text{A}m'' = m'' = 1, \quad m''n'' = n'' = 6, \quad \text{A}m''' = m''' = 0, \quad m'''n''' = n''' = 8:$$

les points n' et n''' doivent rester au-dessous de la ligne mn'', parce que des proportions

$$mm'' : mm' :: m''n'' : y', \quad mm'' : mm''' :: m''n'' : z,$$

on déduit

$$y = 3 > m'n', \qquad z = 9 > m'''n''';$$

donc il faut égaler à zéro la somme des deux termes qui contiennent a avec les exposans $n = 0$ et $n'' = 6$, ce qui donne

$$x^3 - a^6b^2x = 0, \quad \text{d'où} \quad x = \pm a^3b,$$

comme on l'a trouvé plus haut; d'ailleurs on aurait la tangente trigonométrique

$$e = \frac{n''}{m - m''} = \frac{6}{3-1} = 3, \quad \text{donc} \quad a^e = a^3.$$

Pour obtenir une autre valeur de e, on inclinera la ligne passant par le point n'', jusqu'à ce qu'elle rencontre un autre point, ensorte que, dans cette position, elle n'en laisse aucun au-dessus d'elle, et s'il arrive qu'alors elle passe par trois points, on égalera à zéro la somme des termes correspondans, ce qui donnera les premiers termes d'autres racines, et ainsi de suite à l'égard de tous les points qui se trouveront sur le périmètre de ce polygone. Dans l'équation proposée, comme le point n''' est le seul à la gauche de n'', on égalera à zéro la somme des deux termes correspondans, ou de ceux dans lesquels la lettre a est affectée des exposans $n'' = 6$ et $n''' = 8$, et qui sont

$$-a^6b^2x + a^8b^4 = 0, \quad \text{d'où} \quad x = a^2b^2,$$

ainsi qu'il résulte de la première méthode. On trouverait pour ce cas,

$$e = \tfrac{4}{2} = 2, \quad \text{d'où} \quad a^e = a^2,$$

substitution déjà connue.

99. Il est aisé maintenant de se rendre raison de la règle suivante, donnée par *Newton*, dans son Arithmétique universelle.

Pour résoudre une équation littérale, on mènera à angles droits deux lignes AX, AY (fig. 7) qu'on partagera en autant de parties égales qu'il y a d'unités dans les plus hautes puissances de x et de y que nous prendrons ici pour a; puis après avoir coordonné tous les termes de l'équation proposée, horizontalement, par rapport aux puissances de x, et verticalement, par rapport à celles de y, on placera tous les termes qui sont en tête des colonnes verticales, dans les cases de même x et de même y, et au moyen d'une règle, on trouvera sur-le-champ tous les termes des équations partielles, qui fournissent les premiers termes des racines. Faisant une application de ce procédé à l'équation (1), dans laquelle on changera a en y, on trouvera que les lignes qui passent par les cases y^0x^3 et y^6x, y^6x et x^0y^8 laissent tous les autres termes en dessous, et on doit poser

$$\left.\begin{array}{r} x^3 - b^2y^6x = 0 \\ -b^2y^6x + b^4y^8 = 0 \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} x = \pm\, by^3, \\ x = b^2y^2, \end{array}\right.$$

résultats obtenus précédemment.

Reprenons la formule

$$e = \frac{n' - n}{m - m'};$$

et posons l'équation

$$\begin{array}{cc|c|c|c|l} \frac{1}{1} & \frac{2}{2} & \frac{3}{3} & \frac{6}{4} & \frac{7}{5} & \\ yx^5 + 2y^2x^4 & -4y^3 & x^3 + 7y^4 & x^2 - 8y^7 & x + y^8 & = 0: \\ & -3y^2 & +2bc^3y & -3bcy^2 & -by^7 & \\ & & & & +cy^5 & \end{array}$$

comparant le premier terme avec chacun des suivans, on formera la suite des valeurs de e, en divisant la différence entre l'exposant de y, dans le second terme comparé, et

celui de la même lettre dans le premier terme, par la différence, prise en sens contraire, entre les exposans de x, ce qui donnera la suite des fractions qu'on voit au-dessus de la première ligne horizontale de la proposée (on doit faire abstraction des autres termes qui ne sont que sous-ordonnés). Les plus grandes valeurs de e correspondent donc aux termes $-8y^7x$ et y^8, ce qui veut dire que les extrémités du premier côté du polygone, répondront aux termes yx^5 et $-8y^7x$, et que celles du second côté aboutiront aux termes $-8y^7x$ et y^8, ensorte qu'on doit poser les deux équations

$$yx^5 - 8y^7x = 0, \qquad -8y^7x + y^8 = 0,$$

d'où

$$x = y^3\sqrt[4]{8}, \qquad x = \frac{y}{8};$$

et comme $\sqrt[4]{8}$ admet quatre valeurs, on aura de cette manière les premiers termes des cinq racines de la proposée.

Nous procéderons à la recherche de quelques termes des racines de l'équation

$$\frac{3}{2} \qquad\qquad \frac{3}{3}$$

$$my^3 - x^3y - mx^3 = 0,$$

résolue par rapport à y. En appliquant la règle donnée ci-dessus, on trouve

$$my^3 - x^3y = 0, \qquad x^3y + mx^3 = 0,$$

d'où

$$y = \pm\, m^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \text{etc.}, \qquad y = -m + \text{etc.}$$

Pour avoir les seconds termes, on supposera

$$y = +\, m^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + z \ldots\ldots\ldots (1):$$

cette valeur substituée dans la proposée, donne, toutes réductions faites,

$$\frac{3}{2} \qquad\qquad \frac{3}{2} \qquad\qquad \frac{3}{3}$$

$$mz^3 + 3m^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}z^2 + 2x^3z - mx^3 = 0 \ldots\ldots (A);$$

d'où on déduit

$$mz^2 + 3m^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}z + 2x^3 = 0\ldots\ldots(B),$$
$$2x^3z - mx^3 = 0\ldots\ldots(B'):$$

or (B) donne

$$z = -m^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} \quad \text{et} \quad z = -2m^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}},$$

valeurs à rejeter, parce que l'une étant substituée pour z dans (1), donnerait zéro, et l'autre rendrait le premier terme de la seconde racine : on tire de (B'),

$$z = +\frac{m}{2},$$

second terme de la première racine.

La substitution dans la proposée de

$$y = z - m^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}\ldots\ldots.(2),$$

donnerait pour transformée en z,

$$mz^3 - 3m^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}z^2 + 2x^3z - mx^3 = 0\ldots\ldots(C),$$

et, d'après la règle,

$$mz^2 - 3m^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}z + 2x^3 = 0\ldots\ldots(D),$$
$$2x^3z - mx^3 = 0\ldots\ldots(D');$$

d'où résultent d'abord

$$z = +2m^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}, \quad z = +m^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}},$$

valeurs à rejeter : on aurait ensuite

$$z = +\frac{m}{2}.$$

On connaît donc déjà les deux seconds termes des deux

premières racines. Faisant ensuite dans l'équation donnée,

$$y = -m + z,$$

on aura pour transformée

$$\left.\begin{array}{r} mz^3 - \overset{0}{3m^2z^2} - \overset{\frac{3}{2}}{x^3} \\ + 3m^3 \end{array}\right| z - m^4 = 0 \ldots\ldots (E),$$

et en appliquant la règle, on trouve

$$mz^3 - x^3z = 0, \qquad x^3z + m^4 = 0,$$

d'où

$$z = \pm m^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}, \qquad z = -\frac{m^4}{x^3}.$$

On ne doit prendre ici que la valeur de z, qui est simple, puisqu'autrement on aurait plus de trois racines. On a donc déjà trouvé

$$y = m^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \frac{m}{2} + \text{etc.},$$

$$y = -m^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} + \frac{m}{2} + \text{etc.},$$

$$y = -m - \frac{m^4}{x^3} + \text{etc.}$$

Nous procéderons maintenant à la recherche des troisièmes termes, et, à cet effet, nous ferons dans (A),

$$z = \frac{m}{2} + u,$$

ce qui donnera

$$\left.\begin{array}{r} mu^3 + \overset{\frac{3}{2}}{3m^{\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}}} \\ + \frac{3}{2} m^2 \\ \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} u^2 + \overset{\frac{3}{2}}{2x^3} \\ + 3m^{\frac{3}{2}} x^{\frac{3}{2}} \\ + \frac{3}{4} m^3 \end{array}\right| \begin{array}{l} u + \overset{\frac{3}{2}}{\tfrac{3}{4} m^{\frac{5}{2}} x^{\frac{3}{2}}} = 0; \\ + \dfrac{m^4}{8} \\ \end{array}$$

donc, d'après la règle, on aura les équations

$$mu^2 + 3m^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}\,u + 2x^3 = 0,$$

$$2x^3u + \tfrac{3}{4}\,m^{\frac{5}{2}}x^{\frac{3}{2}} = 0, \quad \text{d'où} \quad u = -\tfrac{3}{8}\,m^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{3}{2}};$$

la première de ces équations doit être rejetée, parce qu'étant la même que (B), elle donnerait deux valeurs de u. Pour trouver le troisième terme de la seconde racine, faisons la même substitution pour z dans l'équation (C) qui donnera

$$\begin{array}{c|c|c} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & \frac{3}{6} \\ mu^3 - 3m^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} & u^2 + 2x^3 & u - \frac{3}{4}\,m^{\frac{5}{2}}x^{\frac{3}{2}} = 0, \\ + \frac{3}{2}\,m^2 & - 3m^{\frac{3}{2}}x^{-\frac{3}{2}} & + \frac{m^4}{8} \\ & + \frac{3}{4}\,m^3 & \end{array}$$

de laquelle on tire les deux suivantes,

$$mu^2 - 3m^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}u + 2x^3 = 0,$$

$$2x^3u - \tfrac{3}{4}\,m^{\frac{5}{2}}x^{\frac{3}{2}} = 0:$$

la première répète l'équation (D), et la seconde donne

$$u = \tfrac{3}{8}\,m^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{3}{2}}.$$

Passons enfin à la recherche du troisième terme de la troisième racine, et pour le trouver, faisons dans (E)

$$z = u - \frac{m^4}{x^3},$$

on parviendra aux deux équations

$$mu^2 - x^3 = 0, \quad x^3u + 3m^7x^{-3} = 0,$$

d'où

$$u = +\,m^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}}, \quad u = -\frac{3m^7}{x^6};$$

ensorte qu'on aura

$$y = m^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{m}{2} - \tfrac{3}{8}m^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{3}{2}} + \text{etc.},$$

$$y = -m^{-\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{m}{2} + \tfrac{3}{8}m^{\frac{5}{2}}x^{-\frac{3}{2}} + \text{etc.},$$

$$y = -m - \frac{m^4}{x^3} - \frac{3m^7}{x^6} - \text{etc.}$$

En continuant de cette manière, on trouverait, sans peine, autant qu'on voudra, de termes suivans. On remarquera que les équations qui fournissent les valeurs de z, u, etc. doivent toujours être du premier degré; car, autrement, elles donneraient plus de racines que n'en comporte la proposée.

100. Nous allons reprendre la résolution en séries des équations littérales, par une autre méthode due à *Lagrange*, et qui est insérée dans les *Mémoires de Berlin*, pour l'année 1768 : l'analyse dont nous allons faire usage, suppose le développement en série d'un logarithme, qu'on trouve dans la première section, et dans le chapitre suivant de celle-ci.

Soit l'équation générale

$$0 = a - bx + cx^2 - dx^3 + \text{etc.},$$

dont on suppose que les racines soient x', x'', x''', etc. : on aura d'abord [Ire sect., (chap. XXIII)],

$$a - bx + cx^2 - dx^3 + \text{etc.} = a\left(1 - \frac{x}{x'}\right)\left(1 - \frac{x}{x''}\right)\left(1 - \frac{x}{x'''}\right)\text{etc.}$$

Qu'on divise cette équation par bx, puis qu'on change les signes, et on aura

$$1 - \frac{a}{bx} - \frac{cx - dx^2 + \text{etc.}}{b}$$

$$= -\frac{a}{bx}\left(1 - \frac{x}{x'}\right)\left(1 - \frac{x}{x''}\right)\left(1 - \frac{x}{x'''}\right)\text{etc.}$$

$$= \frac{a}{bx'}\left(1 - \frac{x'}{x}\right)\left(1 - \frac{x}{x''}\right)\left(1 - \frac{x}{x'''}\right)\text{etc.}$$

Prenant les logarithmes de part et d'autre, il viendra

$$\log\left\{1-\frac{a}{bx}-\frac{cx-dx^2+\text{etc.}}{b}\right\}$$

$$=\log\frac{a}{bx'}+\log\left(1-\frac{x'}{x}\right)+\log\left(1-\frac{x}{x''}\right)$$

$$+\log\left(1-\frac{x}{x'''}\right)+\text{etc.}$$

Faisant, pour abréger,

$$X=\frac{a}{x}+cx-dx^2+\text{etc.},$$

d'où résulte

$$1-\frac{a}{bx}-\frac{cx-dx^2+\text{etc.}}{b}=1-\frac{X}{b};$$

et réduisant en séries les logarithmes de $1-\frac{X}{b}$, $1-\frac{x'}{x}$, $1-\frac{x}{x''}$, etc., on aura, après avoir changé les signes,

$$\frac{X}{b}+\frac{X^2}{2b^2}+\frac{X^3}{3b^3}+\text{etc.}=\log\frac{bx'}{a}+\frac{x'}{x}+\frac{x'^2}{2x^2}+\frac{x'^3}{2x^3}+\text{etc.}$$

$$+x\left\{\frac{1}{x''}+\frac{1}{x'''}+\text{etc.}\right\}$$

$$+\frac{x^2}{2}\left\{\frac{1}{x''^2}+\frac{1}{x'''^2}+\text{etc.}\right\}$$

$$+\frac{x^3}{3}\left\{\frac{1}{x''^3}+\frac{1}{x'''^3}+\text{etc.}\right\}$$

$$+\text{etc.}$$

équation identique : donc si on remet à la place de X sa valeur $\frac{a}{x}+cx-\text{etc.}$, et qu'on suppose

$$\frac{X}{b} + \frac{X^2}{2b^2} + \frac{X^3}{3b^3} + \text{etc.} = \alpha + \frac{\beta}{x} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\delta}{x^3} + \text{etc.}$$
$$+ Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{etc.},$$

on aura, par la comparaison,

$$\alpha = \log \frac{bx'}{a}, \quad \beta = x', \quad \gamma = \frac{x'^2}{2}, \quad \delta = \frac{x'^3}{3}, \quad \text{etc.}$$

Ainsi on connaîtra non-seulement la racine x', mais encore son carré, son cube, etc., et son logarithme.

Soit l'équation du second degré

$$a - bx + cx^2 = 0,$$

on aura donc

$$X = \frac{a}{x} + cx,$$

$$X^2 = \frac{a^2}{x^2} + 2ac + c^2x^2,$$

$$X^3 = \frac{a^3}{x^3} + \frac{3a^2c}{x} + 3ac^2x + c^3x^3,$$

$$X^4 = \frac{a^4}{x^4} + \frac{4a^3c}{x^2} + 6a^2c^2 + 4ac^3x^2 + c^4x^4,$$

etc.

Donc, en observant que β est le coefficient de $\frac{1}{x}$, on ne devra retenir dans $\frac{X}{b}$, $\frac{X^2}{2b^2}$, $\frac{X^3}{3b^3}$, etc. que les coefficiens de $\frac{1}{x}$, et on aura

$$x' = \beta = \frac{a}{b} + \frac{3a^2c}{3b^3} + \frac{5.4a^3c^2}{2.5b^5} + \frac{7.6.5a^4c^3}{2.3.7b^7} + \text{etc.}$$

Et en effet, l'équation proposée étant résolue, donne

$$x = \frac{b}{2c} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}:$$

or,

$$\sqrt{b^2-4ac}=b-2\left(\frac{ac}{b}+\frac{a^2c^2}{b^3}+\frac{4a^3c^3}{2b^5}+\frac{6.5a^4c^4}{2.3b^7}+\text{etc.}\right);$$

donc

$$x=\frac{b}{2c}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2c}=\frac{a}{b}+\frac{a^2c}{b^3}+\frac{4a^3c^2}{2b^5}+\text{etc.}$$

M. *Lagrange* donne ensuite les moyens de simplifier la composition des coefficiens β, γ, δ, etc. des puissances négatives de x ; mais nous nous contenterons d'appliquer son analyse au coefficient β.

Soit, pour abréger,

$$\xi=\frac{cx-dx^2+ex^3+\text{etc.}}{b},$$

et on aura, d'après ce qui précède,

$$\log\left\{1-\frac{a}{bx}-\xi\right\}=\log\frac{a}{bx'}+\log\left(\quad\frac{x'}{x}\right)+\log\left(1-\frac{x}{x''}\right)$$
$$+\log\left(1-\frac{x}{x'''}\right)$$
$$=\frac{X}{b}+\frac{X^2}{2b^2}+\frac{X^3}{3b^3}+\text{etc.}=-\log\left(1-\frac{X}{b}\right)$$
$$=-\log\left\{\left(1-\frac{a}{bx}\right)\left(1-\frac{\xi}{1-\frac{a}{bx}}\right)\right\}$$
$$=-\log\left(1-\frac{a}{bx}\right)-\log\left(1-\frac{\xi}{1-\frac{a}{bx}}\right)$$
$$=\frac{a}{bx}+\frac{a^2}{2b^2x^2}+\frac{a^3}{3b^3x^3}+\text{etc.}$$
$$+\frac{\xi}{1-\frac{a}{bx}}+\frac{\xi^2}{2\left(1-\frac{a}{bx}\right)^2}+\frac{\xi^3}{3\left(1-\frac{a}{bx}\right)^3}$$
$$+\frac{\xi^4}{4\left(1-\frac{a}{bx}\right)^4}+\text{etc.}$$

Or on a

$$\frac{1}{1-\frac{a}{bx}}=1+\frac{a}{bx}+\frac{a^2}{b^2x^2}+\frac{a^3}{b^3x^3}+\text{etc.};$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{a}{bx}\right)^2}=1+\frac{2a}{bx}+\frac{3a^2}{b^2x^2}+\frac{4a^3}{b^3x^3}+\text{etc.};$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{a}{bx}\right)^3}=\frac{1}{2}\left\{1.2+\frac{2.3a}{bx}+\frac{3.4a^2}{b^2x^2}+\text{etc.},\right\}$$

$$\frac{1}{\left(1-\frac{a}{bx}\right)^4}=\frac{1}{2.3}\left\{1.2.3+2.3.4.\frac{a}{bx}+\frac{3.4.5.a^2}{b^2x^2}+\frac{4.5.6.a^3}{b^3x^3}+\text{etc.}\right\}$$

etc.

Il reste donc à multiplier ces développemens respectivement par ξ, ξ^2, ξ^3, etc., après quoi on rassemblera les coefficiens de $\frac{1}{x}$.

Proposons-nous l'équation

$$a-bx+cx^n=0:$$

en la comparant avec

$$a-bx+cx^2-\text{etc.}=0,$$

qui devient, d'après la valeur de ξ,

$$a-bx+bx\xi=0,$$

on aura

$$bx\xi=cx^n,\quad \text{d'où}\quad \xi=\frac{cx^{n-1}}{b};$$

$$\xi^2=\frac{c^2x^{2n-2}}{b^2},\quad \xi^3=\frac{c^3x^{3n-3}}{b^3},\quad \xi^4=\frac{c^4x^{4n-4}}{b^4},\quad \text{etc.}$$

Or le seul terme du premier développement, à multiplier par ξ, pour n'avoir que x en dénominateur, est $\frac{a^n}{b^nx^n}$;

d'où résulte

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{ca^n}{b^{n+1}};$$

le seul terme du second développement à multiplier par ξ^2, sous la même condition, est $\frac{2n.a^{2n-1}}{b^{2n-1}x^{2n-1}}$, et on a, en divisant par 2,

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{2n}{2}\cdot\frac{c^2a^{2n-1}}{b^{2n+1}}.$$

Le seul terme du troisième développement à multiplier par ξ^3, est $\frac{1}{2}\cdot\frac{3n.\overline{3n-1}.a^{3n-2}}{b^{3n-2}x^{3n-2}}$, et après avoir divisé le produit par 3, on trouve

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2.3}\cdot\frac{3n.\overline{3n-1}.c^3a^{3n-2}}{b^{3n+1}}.$$

Pareillement le seul terme du quatrième développement à multiplier par ξ^4, est $\frac{1}{2.3}\cdot\frac{4n.\overline{4n-1}.\overline{4n-2}.a^{4n-3}}{b^{4n-3}x^{4n-3}}$, et après avoir divisé le produit par 4, on obtient

$$\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{2.3.4}\cdot\frac{4n.\overline{4n-1}.\overline{4n-2}.c^4a^{4n-3}}{b^{4n+1}},$$

et ainsi de suite. Donc une des racines de la proposée, sera

$$x'=\frac{a}{b}+\frac{ca^n}{b^{n+1}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2nc^2a^{2n-1}}{b^{2n+1}}+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{3n.\overline{3n-1}.c^3a^{3n-2}}{b^{3n+1}}$$
$$+\frac{1}{2.3.4}\cdot\frac{4n.\overline{4n-1}.\overline{4n-2}.c^4a^{4n-3}}{b^{4n+1}}+\text{etc.}$$

Si l'on pose $x=\frac{1}{y}$, on aura la transformée

$$ay^n-by^{n-1}+c=0.$$

Prenons pour second exemple, l'équation à quatre termes,

$$a-bx+cx^n-x^r=0:$$

on fera

$$bx\xi = cx^n - x^r,$$

d'où

$$\xi = \frac{cx^{n-1} - x^{r-1}}{b},$$

$$\xi^2 = \frac{c^2x^{2n-2} - 2cx^{n+r-2} + x^{2r-2}}{b^2},$$

$$\xi^3 = \frac{c^3x^{3n-3} - 3c^2x^{2n+r-3} + 3cx^{n+2r-3} - x^{3r-3}}{b^3},$$

et ainsi de suite. Le seul terme du premier développement à multiplier par $\frac{cx^{n-1}}{b}$, afin de n'avoir que le facteur $\frac{1}{x}$, est le terme divisé par x^n, c'est-à-dire $\frac{a^n}{b^n x^n}$, et on a pour produit $\frac{1}{x}\,\frac{ca^n}{b^{n+1}}$: pour trouver l'autre, on changera n en r, et c en -1, ce qui donnera sur-le-champ $-\frac{1}{x}\cdot\frac{a^r}{b^{r+1}}$. Il sera facile de composer tous les autres termes à l'instar de ceux-ci, et on trouvera pour une des racines,

$$\begin{aligned} x' = {} & \frac{a}{b} + \left(\frac{ca^n}{b^{n+1}} - \frac{a^r}{b^{r+1}}\right) \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{2nc^2a^{2n-1}}{b^{2n+1}} - 2\,\frac{(n+r)\,ca^{n+r-1}}{b^{n+r+1}} + \frac{2r\,.\,a^{2r-1}}{b^{2r+1}}\right) \\ & + \frac{1}{2.3}\left[\frac{3n.3n-1.c^3a^{3n-2}}{b^{3n+1}} - 3\,\frac{(2n+r)(2n+r-1)c^2a^{2n+r-2}}{b^{2n+r+1}}\right. \\ & \left. + 3\,\frac{(n+2r)(n+2r-1)ca^{n+2r-2}}{b^{n+2r+1}} - \frac{3r.3r-1.a^{3r-2}}{b^{3r+1}}\right] + \text{etc.} \end{aligned}$$

Soit enfin l'équation générale

$$a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + \text{etc.} = 0,$$

on aura

$$bx\xi = cx^2 - dx^3 + ex^4 - fx^5 + \text{etc.},$$

et par conséquent,

$$\xi = \frac{cx - dx^2 + ex^3 - fx^4 + \text{etc.}}{b},$$

$$\xi^2 = \frac{c^2x^2 - 2cdx^3 + (d^2 + 3ce)\,x^4 - \text{etc.}}{b^2},$$

$$\xi^3 = \frac{c^3x^3 - 3cdx^4 + \text{etc.}}{b^3},$$

$$\xi^4 = \frac{c^4x^4 - \text{etc.}}{b^4},$$

etc.

Par un procédé semblable à celui que nous avons employé dans les deux exemples précédens, on composera le coefficient de $\frac{1}{x}$, qui sera l'une des racines x', et on trouvera

$$\begin{aligned} x' = \frac{a}{b} + \frac{a^2c}{b^3} - \frac{a^3d}{b^4} + \frac{a^4fe}{b^5} - \frac{a^5f}{b^6} + \text{etc.} \\ + \frac{2a^3c^2}{b^5} - \frac{5a^4cd}{b^6} + \frac{3a^5(d^2 + 2ce)}{b^7} + \text{etc.} \\ + \frac{5a^4c^3}{b^7} - \frac{21a^5cd}{b^8} + \text{etc.} \\ + \frac{14a^5c^4}{b^9} + \text{etc.} \\ + \text{etc.} \end{aligned}$$

c'est la formule connue de *Newton* pour le retour des suites, que nous avons trouvée autrement dans le calcul différentiel.

Nous allons, d'après *Lagrange*, présenter quelques observations générales sur la nature des différentes racines d'une même équation, et sur la manière de les distinguer l'une de l'autre.

Nous reprendrons, à cet effet, l'équation générale

$$0 = a - bx + cx^2 - dx^3 + ex^4 - \text{etc.};$$

dans laquelle nous supposerons qu'il ne manque aucun terme. Je remarque d'abord que si l'on suppose $a = 0$, l'équation proposée se décompose dans celles-ci,

$$0 = x,$$
$$0 = -b + cx - dx^2 + ex^3 - \text{etc.};$$

d'où l'on voit que la supposition de $a = 0$, doit rendre nulle une des racines de l'équation; conséquemment, parmi les fonctions qui expriment ces racines, il doit y en avoir une et il ne peut y en avoir qu'une qui s'évanouisse en faisant $a = 0$, puisque l'évanouissement de a ne réduit qu'une racine à zéro.

Supposons de plus $b = 0$, et la dernière des deux équations précédentes se décomposera encore dans celles-ci,

$$0 = x,$$
$$0 = c - dx + ex^2 - \text{etc.}$$

Cette supposition fera donc évanouir une nouvelle racine, de sorte que parmi les fonctions qui représentent ces racines, il faudra qu'il y en ait une qui s'évanouisse par $a = 0$, $b = 0$.

En continuant le même raisonnement, on prouvera que parmi les fonctions dont il s'agit, il y en aura aussi une qui s'évanouira par $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$; une autre qui s'évanouira par $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$, $d = 0$, et ainsi de suite. Nous appellerons *première racine*, celle qui devient nulle par $a = 0$; *seconde racine*, celle qui devient nulle par $a = 0$, $b = 0$, etc. Ainsi si l'on a plusieurs expressions des racines d'une équation, on pourra reconnaître si elles représentent la même racine ou des racines différentes.

La racine

$$x' = \frac{a}{b} + \frac{a^2c}{b^3} + \frac{4a^3c^2}{2b^5} + \text{etc.},$$

trouvée plus haut, s'évanouit par $a = 0$: il reste à trouver

la seconde. A cet effet, nous donnerons à l'équation

$$a - bx + cx^2 = 0,$$

la forme

$$b - cx - \frac{a}{x} = 0,$$

qui peut se rapporter à celle-ci

$$a - bx + cx^n = 0,$$

en faisant, dans cette dernière,

$$n = -1, \quad a = b, \quad b = c \quad \text{et} \quad c = -a:$$

de cette manière, la formule générale qui représente x', deviendra

$$x'' = \frac{b}{c} - \frac{a}{b} - \frac{a^2c}{b^3} - \frac{4a^3c^2}{b^5} - \frac{5.6a^4c^3}{2.3b^7} - \text{etc.},$$

laquelle pour $a = 0$, se réduit à $\frac{b}{c}$, puis faisant $b = 0$, elle devient nulle : cette série représente donc la seconde racine.

Nous venons de voir que la supposition de $a = 0$, $b = 0$, doit rendre nulles deux des racines de la proposée ; donc si on suppose d'abord $b = 0$, ce qui réduit l'équation à

$$a + cx^2 - dx^3 + \text{etc.} = 0,$$

et qu'au lieu de faire $a = 0$, on le suppose infiniment petit, il est clair que les deux racines devront devenir infiniment petites, autrement elles ne s'évanouiraient pas pour $a = 0$. Ainsi par rapport à l'équation

$$my^3 - x^3y - mx^3 = 0,$$

traitée (99), et que nous mettrons sous la forme

$$a + by + dy^3 = 0,$$

en observant que le terme de c manque, nous ferons d'abord

$a = 0$, ce qui donnera

$$b + dy^2 = 0:$$

ainsi parmi les racines de la proposée, il y en a une qui doit s'anéantir pour $a = -mx^3 = 0$, c'est-à-dire, pour $m = 0$, parce qu'on ne peut supposer $x = 0$, sans qu'il en résulte $a = 0$, $b = 0$, en même temps, hypothèses relatives aux autres racines. Ainsi la dernière des trois formules trouvées (99), et qui s'anéantit pour $m = 0$, est la première racine. De l'autre équation

$$b + dy^2 = 0,$$

on déduit

$$y = \pm m^{-\frac{1}{2}} x^{\frac{3}{2}} = \pm \frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}.$$

On conclut de là que les deux autres racines doivent devenir infinies pour $m = 0$, ou qu'elles doivent se réduire à $\pm \frac{x^{\frac{3}{2}}}{m^{\frac{1}{2}}}$, ce que montrent en effet les deux premières formules du numéro cité.

La proposée

$$-mx^3 - x^3y + my^3 = 0,$$

est comparable avec

$$a - bx + cx^n = 0,$$

en faisant dans celle-ci, $n = 3$, $x = y$, $c = m$, $b = +x^3$, $a = -mx^3$, et on trouve, après ces substitutions dans la formule générale ci-dessus, en y changeant x' en y,

$$y = -m - \frac{m^4}{x^3} - \frac{3m^7}{x^6} - \text{etc.},$$

qui conséquemment donne la première racine.

Si on donne à l'équation

$$a - bx + cx^3 = 0,$$

la forme

$$\frac{b}{c} - x^2 - \frac{ax^{-1}}{c} = 0\,;$$

et ensuite celle-ci

$$\frac{b}{c} - t - \frac{at^{-\frac{1}{2}}}{c} = 0,$$

en faisant

$$t = x^2, \quad \text{d'où} \quad x = t^{\frac{1}{2}};$$

on aura une équation qu'on pourra encore comparer avec

$$a - bx + cx^n = 0\,;$$

ensorte qu'ayant trouvé la racine t en série, on aura les deux autres racines x par l'élévation à la puissance $\frac{1}{2}$, ou par l'extraction de la racine carrée qui donne deux signes, et conséquemment deux séries. Nous avons déduit des formules générales données par *Lagrange*, les deux dernières racines y, et nous les avons trouvées exactement conformes à celles qui ont été obtenues (99).

Il sera bon de consulter le dernier paragraphe du mémoire cité, sur *la convergence ou divergence des séries qui représentent les racines des équations littérales.*

CHAPITRE XVIII.

Développemens en séries des quantités exponentielles et logarithmiques, et applications de ces séries.

101. SOIT l'exponentielle a^x à développer en une série procédant suivant les puissances ascendantes de x : j'écris a sous la forme d'un binome $1 + (a - 1)$; ensorte que

$$a^x = [1 + (a - 1)]^x :$$

en développant d'après la formule du binome, on trouve

$$[1 + (a-1)]^x = 1 + x(a-1) + \frac{x(x-1)}{1.2}(a-1)^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1.2.3}(a-1)^3 + \text{etc.},$$

et, après avoir ordonné par rapport à x, il vient

$$[1 + (a-1)]^x$$
$$= 1 + \left[(a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \text{etc.}\right] x$$
$$+ (\quad) x^2 + (\quad) x^3 + (\quad) x^4 + \text{etc.} \ldots\ldots (1).$$

Il est donc prouvé que l'exponentielle a^x peut être représentée par une série procédant suivant les puissances ascendantes, entières et positives de x. D'après cela, nous poserons (Ire sect., chap. 20)

$$a^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.} \ldots\ldots (2),$$

en observant que, pour $x=0$, on a

$$a^x = a^0 = 1 :$$

à l'effet d'évaluer les coefficiens A, B, C, etc. indéterminés et indépendans de x, nous partirons de cette propriété dont jouit exclusivement l'exponentielle a^x, de donner des résultats identiques, en faisant $x=2x$, et en élevant au carré : par le changement de x en $2x$, l'identité précédente devient

$$a^{2x}=1+2Ax+4Bx^2+8Cx^3+16Dx^4+32Ex^5+\text{etc.}:$$

élevant de part et d'autre la même identité au carré, en regardant, pour plus de commodité, la série infinie, comme un binome dont le premier terme est l'unité, on trouve

$$a^{2x}=1+2Ax+\begin{array}{c}2B\\+A^2\end{array}\Bigg|\,x^2+\begin{array}{c}2C\\+2AB\end{array}\Bigg|\,x^3+\begin{array}{c}2D\\+2AC\\+B^2\end{array}\Bigg|\,x^4+\begin{array}{c}2E\\+2AD\\+2BC\end{array}\Bigg|\,x^5+\text{etc.}$$

Egalant les coefficiens des mêmes puissances de x, pris dans les deux développemens de a^{2x}, on obtiendra ces déterminations,

$$B = \frac{1}{2} A^2,$$

$$C = \frac{1}{2.3} A^3,$$

$$D = \frac{1}{2.3.4} A^4,$$

$$E = \frac{1}{2.3.4.5} A^5,$$

etc.,

d'où l'on conclut

$$a^x = 1+Ax+\frac{A^2x^2}{2}+\frac{A^3x^3}{2.3}+\frac{A^4x^4}{2.3.4}+\text{etc.}\ldots\ldots(3).$$

Comme les développemens (1) et (2) sont identiques, on a

nécessairement

$$A = (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} + \text{etc.}\ldots(M);$$

ensorte que le développement (3) est connu.

On reconnaîtra facilement l'avantage de l'analyse suivante sur celle que nous venons d'employer.

On a en même temps

$$a^x = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + \text{etc.},$$
$$a^y = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \text{etc.},$$

parce que les indéterminées A, B, C, etc. étant indépendans de x, ne doivent pas changer par le changement de x en y : la soustraction donne

$$a^x - a^y = A(x-y) + B(x^2-y^2) + C(x^3-y^3) + \text{etc.},$$

c'est-à-dire,

$$a^y(a^{x-y}-1) = A(x-y) + B(x^2-y^2) + C(x^3-y^3) + \text{etc.}\ldots(4);$$

mais d'ailleurs,

$$a^x - 1 = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{etc.}:$$

remplaçant ici x par $x-y$, et multipliant de part et d'autre par a^y, on trouve

$$a^y(a^{x-y}-1) = a^y[A(x-y) + B(x-y)^2 + C(x-y)^3 + \text{etc.}]\ldots(5).$$

Après avoir divisé par $x-y$ les seconds membres des identités (4) et (5), fait $y = x$, et ce qui donne

$$a^y = a^x = 1 + Ax + Bx^2 + \text{etc.},$$

on tombe sur cette identité

$$A + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3 + \text{etc.}$$
$$= A(1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{etc.}):$$

la comparaison des coefficiens des mêmes puissances de x

donne, comme ci-dessus,

$$B = \frac{1}{2}A^2,\quad C = \frac{1}{2.3}A^3,\quad D = \frac{1}{2.3.4}A^4,\quad \text{etc.}:$$

mais ici la loi est évidente.

Du développement (3), on déduit pour $x = 1$,

$$a = 1 + A + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{2.3} + \text{etc.}\ldots\ldots(N),$$

série réciproque de (M) : ainsi par (M), le nombre A dépend de la base a, et par (N), la base a dépend à son tour de A.

Du même développement (3), on tire, pour $x = \frac{1}{A}$;

$$a^{\frac{1}{A}} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \text{etc.}\ldots(N').$$

Ainsi la quantité $a^{\frac{1}{A}}$ est un nombre constant qu'on désigne ordinairement par e, nombre qui est la valeur particulière de la base a, lorsque $A = 1$, comme on le voit d'après (N) qui, dans cette hypothèse, donne

$$a = e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \text{etc.}\ldots\ldots(P):$$

on a donc cette relation

$$a^{\frac{1}{A}} = e,\quad \text{d'où}\quad a = e^{A}\ldots\ldots(Q)$$

Si donc dans (3), on fait $A = 1$, hypothèse qui nécessite le changement de a en e, on obtiendra ce développement de l'exponentielle e^x,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4} + \text{etc.}\ldots\ldots(6).$$

Pour évaluer, d'après la série (P), le nombre e jusqu'à la

la neuvième décimale, par exemple, on fera les calculs suivans :

$$\frac{1}{1.2} = 0,5,$$

$$\frac{1}{1.2.3} = 0,166\ 666\ 666\ 7,$$

$$\frac{1}{1.......4} = 0,041\ 666\ 666\ 7,$$

$$\frac{1}{1.......5} = 0,008\ 333\ 333\ 3,$$

$$\frac{1}{1.......6} = 0,001\ 388\ 888\ 9,$$

$$\frac{1}{1.......7} = 0,000\ 198\ 412\ 7,$$

$$\frac{1}{1.......8} = 0,000\ 024\ 801\ 6,$$

$$\frac{1}{1.......9} = 0,000\ 002\ 755\ 6,$$

$$\frac{1}{1......10} = 0,000\ 000\ 275\ 6,$$

$$\frac{1}{1......11} = 0,000\ 000\ 025\ 0,$$

$$\frac{1}{1......12} = 0,000\ 000\ 002\ 1,$$

$$\frac{1}{1......13} = 0,000\ 000\ 000\ 2\ ,$$

et par l'addition on obtiendra

$$e = 2,71828\ 182.$$

Ces calculs sont, comme on voit, très-faciles à exécuter, puisque, pour passer d'un résultat au suivant, il suffit de diviser le précédent par un diviseur d'un ou de deux chiffres au plus. Le nombre e, calculé avec 25 décimales, est

$$e = 2,71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874 \text{ etc.}$$

102. Reprenons la relation

$$a^{\frac{1}{A}} = e,$$

trouvée plus haut ; elle donne $\frac{1}{A} = \log e$ pour la base a, et $\frac{1}{A}\, la = 1$ pour la base e, d'où $A = la$: ces logarithmes, désignés par l et calculés sur la base e, sont dits *logarithmes de Néper*, ou *logarithmes népériens*, et quelquefois *logarithmes hyperboliques*, parce qu'ils sont représentés par l'aire de l'hyperbole équilatère entre ses asymptotes (*Calcul diff. et intég.*) : mais cette dernière dénomination est impropre. On a donc

$$a = e^{la}, \quad \text{d'où} \quad a^x = e^{xla},$$

moyennant quoi on peut réduire toutes les exponentielles à la même base népérienne e.

103. Nous avons déjà donné (Ire sect., chap. XX) le développement en série des logarithmes : nous allons revenir sur cette question, et la traiter avec toute l'étendue que réclame son importance.

Nous emploierons, en premier lieu, une analyse analogue à celle dont nous avons fait usage en second lieu, pour développer l'exponentielle.

En observant que pour $x = 0$, $\log(1 + x) = \log 1 = 0$, nous poserons

$$\log(1 + x) = M(x + Ax^2 + Bx^3 + \text{etc.}),$$

A, B, C, etc. étant des coefficiens indéterminés et indépendans de x, et M un nombre qui fixe le système de logarithmes, et qu'on nomme *module*. On aura donc

$$\log(1 + y) = M(y + Ay^2 + By^3 + \text{etc.});$$

retranchant le second développement du premier, on a pour différence,

$$\log\left(\frac{1+x}{1+y}\right)=M(x-y)[1+A(x+y)+B(x^2+yx+y^2)$$
$$+C(x^3+yx^2+y^2x+y^3)+\text{etc.}].$$

Pour obtenir un autre développement de $\log\left(\frac{1+x}{1+y}\right)$, soit

$$\frac{1+x}{1+y}=1+z, \text{ d'où } z=\frac{x-y}{1+y}:$$

on aura, d'après le développement hypothétique,

$$\log\left(\frac{1+x}{1+y}\right)=\log(1+z)=M(z+Az^2+Bz^3+\text{etc.}),$$

c'est-à-dire,

$$\log\left(\frac{1+x}{1+y}\right)=M\left[\frac{x-y}{1+y}+A\frac{(x-y)^2}{(1+y)^2}+B\frac{(x-y)^3}{(1+y)^3}+\text{etc.}\right]$$
$$=M(x-y)\left[\frac{1}{1+y}+A\frac{x-y}{(1+y)^2}+B\frac{(x-y)^2}{(1+y)^3}+\text{etc.}\right].$$

La comparaison de ces deux développemens de $\log\left(\frac{1+x}{1+y}\right)$ donne, après la division par $M(x-y)$ et l'hypothèse $y=x$,

$$1+2Ax+3Bx^2+4Cx^3=1-x+x^2-x^3+\text{etc.};$$

d'où résultent ces déterminations,

$$A=-\tfrac{1}{2},\quad B=\tfrac{1}{3},\quad C=-\tfrac{1}{4},\quad D=\tfrac{1}{5},\quad \text{etc.},$$

et conséquemment,

$$\log(1+x)=M\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\frac{x^5}{5}-\text{etc.}\right).$$

L'analyse suivante est due à *Lagrange*. Considérons l'équation générale

$$y=a^x,$$

dans laquelle x est le logarithme de y pour la base a : mettons à la place de a l'équivalent $1 + a - 1$, et ensuite $[1+(a-1)]^x$, ou $[(1+a-1)^n]^{\frac{x}{n}}$, au lieu de a^x, on aura

$$y = \{[1+(a-1)]^n\}^{\frac{x}{n}},$$

n étant une quantité quelconque qui disparaît d'elle-même dans la valeur de y. Or,

$$[1+(a-1)]^n = 1 + n(a-1) + \frac{n(n-1)}{2}(a-1)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(a-1)^3 + \text{etc.}:$$

ordonnant ensuite les termes de ce développement suivant les puissances de n, on aura une série de cette forme,

$$[1+(a-1)]^n = 1 + An + Bn^2 + \text{etc.},$$

et il est aisé de voir que

$$A = (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} + \text{etc.},$$

même valeur que celle trouvée (101). Les autres coefficiens B, C, etc. dépendent aussi de a ; mais nous n'aurons pas besoin de les chercher, parce qu'ils disparaissent du calcul, comme on va le voir. Nous aurons donc

$$y = (1 + An + Bn^2 + Cn^3 + \text{etc.})^{\frac{x}{n}}$$
$$= 1 + \frac{x}{n}(An+Bn^2+\text{etc.}) + \frac{x(x-n)}{1.2n^2}(An+Bn^2+\text{etc.})^2$$
$$+ \frac{x(x-n)(x-2n)}{2.3.n^3}(An+Bn^2+\text{etc.})^3 + \text{etc.},$$

et, en réduisant,

$$y = 1 + x(A + Bn + \text{etc.}) + \frac{x(x-n)}{2}(A + Bn + \text{etc.})^2$$
$$+ \frac{x(x-n)(x-2n)}{2.3}(A + Bn + \text{etc.})^3 + \text{etc.}$$

Maintenant comme la quantité n est arbitraire, et doit par la nature même de la fonction y, disparaître de l'expression de cette fonction, il faudra que tous les termes multipliés par n, et ses puissances, se détruisent mutuellement ; ne tenant donc aucun compte de ces termes, on aura simplement

$$y = a^x = 1 + Ax + \frac{A^2x^2}{2} + \frac{A^3x^3}{2.3} + \text{etc.},$$

série déjà trouvée plus haut.

Cherchons de la même manière la valeur de x en y: à cet effet, nous mettrons l'équation $a^x = y$ sous la forme

$$[1 + (a-1)]^{nx} = [1 + (y-1)]^n,$$

qui est identique avec la précédente, et où n est une quantité quelconque à volonté, qui ne doit point entrer dans la valeur de x en y: développant les deux membres à la manière du binome, on aura, après la division par n,

$$x(a-1) + \frac{x(nx-1)}{2}(a-1)^2 + \frac{x(nx-1)(nx-2)}{2.3}(a-1)^3 + \text{etc.}$$
$$= (y-1) + \frac{n-1}{2}(y-1)^2 + \frac{(n-1)(n-2)}{2.3}(y-1)^3 + \text{etc.}$$

Or n ne devant pas entrer dans l'expression de x en y, il faudra que les termes multipliés par les différentes puissances de n, se détruisent d'eux-mêmes, ensorte qu'il ne reste que ceux où n n'entre pas. D'après cette considération, on aura l'équation suivante, dans laquelle nous emploierons, pour abréger, la quantité A déterminée ci-dessus,

$$Ax = (y-1) - \tfrac{1}{2}(y-1)^2 + \tfrac{1}{3}(y-1)^3 - \text{etc.};$$

d'où l'on tire

$$x = \log y = \frac{(y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 + \text{etc.}}{A} \ldots.(7);$$

mais cette formule n'est convergente que lorsque le nombre

y dont elle donne le logarithme, est peu différent de l'unité : aussi n'est-elle d'aucune utilité pour le calcul des logarithmes ordinaires. Le moyen suivant donné par *Lagrange*, est propre à la rendre convergente pour tous les nombres y.

Puisque $\log \sqrt[r]{y} = \frac{1}{r} \log y$, on aura, par cette substitution dans la série précédente,

$$\log y = \frac{r}{A}[(\sqrt[r]{y}-1) - \tfrac{1}{2}(\sqrt[r]{y}-1)^2 + \tfrac{1}{3}(\sqrt[r]{y}-1)^3 - \text{etc.}] \ldots (8),$$

où l'on peut prendre pour r un nombre quelconque positif ou négatif : quel que soit le nombre y, on peut toujours en prendre une racine du degré r, tel que $\sqrt[r]{y}$ soit un nombre aussi peu différent qu'on voudra de l'unité (Ire sect., chap. IX) : ainsi la formule précédente donnera toujours la valeur de $\log y$, avec toute l'exactitude qu'on pourra desirer. Si l'on prend r négativement, alors $\sqrt[r]{y}$ devient $\frac{1}{\sqrt[r]{y}}$, et la série qui exprime $\log y$ devient, en changeant les signes,

$$\log y = \frac{r}{A}\left[\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{y}}\right) + \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{y}}\right)^2 + \tfrac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{\sqrt[r]{y}}\right)^3 + \text{etc}\right] (9).$$

Le nombre y étant plus grand que l'unité, $\sqrt[r]{y}$ sera plus grande que l'unité, et conséquemment on aura les deux inégalités dans le même sens,

$$\sqrt[r]{y} - 1 > 0, \quad 1 - \frac{1}{\sqrt[r]{y}} > 0,$$

et y étant moindre que l'unité, c'est-à-dire, une fraction vraie, on aura celles-ci,

$$\sqrt[r]{y} - 1 < 0, \quad 1 - \frac{1}{\sqrt[r]{y}} < 0.$$

Si le nombre a est la base des logarithmes, on pourra, par

les mêmes formules, déterminer aussi exactement qu'on voudra, la valeur du module $\frac{1}{A}$; car en faisant $y=a$, d'où $\log a = 1$, on aura

$$A = r\left[(\sqrt[r]{a}-1) - \tfrac{1}{2}(\sqrt[r]{a}-1)^2 + \tfrac{1}{3}(\sqrt[r]{a}-1)^3 - \text{etc.}\right],$$

ou bien

$$A = r\left[\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{a}}\right)+\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{a}}\right)^2+\tfrac{1}{3}\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{a}}\right)^3+\text{etc.}\right]$$

Il est clair que les deux séries qui donnent $\log y$, seront nécessairement convergentes, quand on extraira de y une racine r telle que $\sqrt[r]{y}$ n'excède l'unité que d'une fraction décimale très-petite, et telle conséquemment que $\sqrt[r]{y}-1$ soit une fraction très-petite; car alors $1-\frac{1}{\sqrt[r]{y}}$ sera une fraction plus petite encore, puisqu'on a

$$1-\frac{1}{\sqrt[r]{y}} = \frac{\sqrt[r]{y}-1}{\sqrt[r]{y}}:$$

dans ce cas, la série (8) donnera

$$\log y < \frac{r}{A}(\sqrt[r]{y}-1),$$

et de la série (9), on déduira

$$\log y > \frac{r}{A}\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt[r]{y}}\right).$$

Ainsi on a deux limites pour la valeur de $\log y$, qu'on peut resserrer autant qu'on le veut, en prenant r toujours plus grand; ensorte que dans le cas de r infiniment grand, il est permis de regarder l'un et l'autre des seconds membres des deux inégalités précédentes, comme l'exacte valeur de $\log y$.

C'est sous cet aspect qu'on peut dire qu'à un nombre donné y répond toujours une infinité de logarithmes, puisque sa racine infinitième a nécessairement une infinité de valeurs différentes (chap. XI et XIII).

Supposons donc que l'indice r soit pris tel que la racine r de y ne contienne que l'unité avant la virgule, et qu'après la virgule il se trouve s zéro; alors, si l'on s'arrête à $2s$ décimales, le terme $(y^r - 1)^2$, et, *à fortiori*, les suivans ne donnent rien, de sorte qu'on a, dans ce cas,

$$\log y = \frac{r}{A}(\sqrt[r]{y} - 1) \quad \text{et} \quad A = r(\sqrt[r]{a} - 1).$$

Ainsi prenant $r = 2^{60}$, on trouve, pour $a = 10$,

$$\sqrt[r]{a} = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00199\ 71742\ 08125\ 50527\ldots$$
$$\frac{1}{r} = 0{,}00000\ 00000\ 00000\ 00086\ 73617\ 37988\ 40354\ldots$$

de sorte que l'on aura le module

$$\frac{1}{la} = \frac{1}{A} = \frac{1}{r} \times \frac{1}{\sqrt[r]{a} - 1} = \frac{8673617379884035 4}{1997174208125505 27}$$
$$= 0{,}43429\ 44819\ 03251\ldots\ldots$$

Si l'on veut avoir le logarithme de 3, on fera $y = 3$, et employant de même soixante extractions de racines carrées, on trouvera

$$\sqrt[r]{y} = 1{,}00000\ 00000\ 00000\ 00095\ 28942\ 64074\ 58932, \text{ etc.},$$

et de là,

$$\log y = \frac{\sqrt[r]{y} - 1}{\sqrt[r]{a} - 1} = \frac{952894264074589 32\ldots}{199717420812550527\ldots}$$
$$= 0{,}47712\ 12547\ 19662\ldots$$

Cette méthode est, comme l'on voit, très-laborieuse par le grand nombre d'extractions de racines qu'elle exige; mais les séries que nous avons données ci-dessus, servent à la simplifier

et à la compléter; car, quel que soit le nombre y, il suffira d'en extraire quelques racines carrées, jusqu'à ce qu'on parvienne à un nombre $\sqrt[r]{y}$ qui n'ait que l'unité avant la virgule; alors les puissances de $\sqrt[r]{y}-1$ seront des fractions d'autant plus petites qu'elles seront plus hautes : par conséquent il suffira toujours de prendre un certain nombre des premiers termes de la série pour avoir les logarithmes exacts jusqu'à tel nombre de décimales qu'on voudra.

104. Mais dans le travail de la construction des tables, on doit se proposer non pas de calculer isolément un logarithme, mais de l'exprimer, s'il est possible, au moyen de quelques logarithmes précédens, et d'une série qui sera nécessairement d'autant plus convergente, que quoiqu'infinie, elle ne doit plus donner qu'une fraction décimale très-petite.

Changeons d'abord, dans la série (7), y en $1+b$, et nous aurons, après avoir remplacé A par sa valeur $\frac{1}{la}$,

$$\log(1+b)=\frac{1}{la}\left(b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4}+\text{etc.}\right)\ldots\ldots(10):$$

changeons b en $-b$, et la série (10) deviendra

$$\log(1-b)=\frac{1}{la}\left(-b-\frac{b^2}{2}-\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4}-\text{etc.}\right);$$

la différence entre ces deux développemens, est

$$\log\left(\frac{1+b}{1-b}\right)=\frac{2}{la}\left(b+\frac{b^3}{3}+\frac{b^5}{5}+\frac{b^7}{7}+\text{etc.}\right)\ldots\ldots(11).$$

Posant

$$\frac{1+b}{1-b}=1+\frac{u}{n},\qquad \text{d'où}\qquad b=\frac{u}{2n+u},$$

et substituant dans (11), il viendra

$$\log\left(1+\frac{u}{n}\right)=\frac{2}{la}\left[\left(\frac{u}{2n+u}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{u}{2n+u}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{u}{2n+u}\right)^5+\text{etc.}\right].$$

Or,

$$\log\left(1+\frac{u}{n}\right)=\log\left(\frac{n+u}{n}\right)=\log(n+u)-\log n,$$

donc, en posant $u=1$, on aura

$$\log(n+1)=\log n+\frac{2}{la}\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3+\text{etc.}\right]\ (12),$$

série trouvée (Ire sect., chap. XX), et d'autant plus convergente que le nombre n sera plus grand : elle servira à calculer $l2$ pour $a=10$: en effet, de la relation

$$\log n=\frac{ln}{la};$$

démontrée (Ire sect., chap. XVI), on déduit

$$ln=la\times\log n;$$

de sorte qu'en multipliant les deux membres de la série (12) par la, on retombe sur les logarithmes de la base e, et on a

$$l(n+1)=ln+2\left[\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^3+\text{etc.}\right].$$

Faisant maintenant $n=4$, puis $n=2$, on aura

$$l.5=2l.2+2\left[\frac{1}{9}+\frac{1}{3(9)^3}+\frac{1}{5(9)^5}+\text{etc.}\right],$$

$$l.2=2\left[\frac{1}{3}+\frac{1}{3(3)^3}+\frac{1}{5(3)^5}+\text{etc.}\right];$$

d'où l'on déduit

$$l.10=2{,}30258\ 50929\ 94045\ 68402\ \text{etc.},$$

et

$$\frac{1}{l.10}=0{,}43429\ 44819\ 03251\ 82765\ \text{etc.},$$

valeur du module, déjà trouvée plus haut.

Si dans la série (7), on fait

$$y - 1 = \frac{2}{n^3 - 3n},$$

on aura

$$\log\left(\frac{n^3 - 3n + 2}{n^3 - 3n}\right)$$

$$= \frac{1}{la}\left[\frac{2}{n^3 - 3n} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n^3 - 2n}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{n^3 - 3n}\right)^3 + \text{etc.}\right].$$

Posant ensuite

$$y - 1 = -\frac{2}{n^3 - 3n},$$

on aura

$$\log\left(\frac{n^3 - 3n - 2}{n^3 - 3n}\right)$$

$$= \frac{1}{la}\left[-\frac{2}{n^3 - 3n} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{n^3 - 3n}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{n^3 - 3n}\right)^3 - \text{etc.}\right],$$

et en soustrayant la seconde identité de la première, on trouvera

$$\log\left(\frac{n^3 - 3n + 2}{n^3 - 3n}\right) - \log\left(\frac{n^3 - 3n - 2}{n^3 - 3n}\right) = \log\left(\frac{n^3 - 3n + 2}{n^3 - 3n - 2}\right)$$

$$= \frac{2}{la}\left[\frac{2}{n^3 - 3n} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{n^3 - 3n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{n^3 - 3n}\right)^5 + \text{etc.}\right);$$

mais

$$\frac{n^3 - 3n + 2}{n^3 - 3n - 2} = \frac{(n-1)^2 (n+2)}{(n+1)^2 (n-2)};$$

donc

$$\log\left(\frac{n^3 - 3n + 2}{n^3 - 3n - 2}\right) = 2\log(n-1) + \log(n+2)$$
$$- 2\log(n+1) - \log(n-2).$$

Reportant cette décomposition dans le premier membre de l'identité précédente, et dégageant $\log.(n+2)$, on obtiendra

$$\log(n+2) = \log(n-2) + 2\log(n+1) - 2\log(n-1)$$
$$+ \frac{2}{la}\left[\frac{2}{n^3 - 3n} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{n^3 - 3n}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{n^3 - 3n}\right)^5 + \text{etc.}\right] \ldots\ldots (13);$$

série qui n'est pas assez convergente pour le calcul des logarithmes des trois premiers nombres premiers 2, 3 et 5, et que nous n'emploierons qu'à partir du nombre premier 7 inclusivement. Ainsi nous chercherons par une autre voie les logarithmes des nombres 2, 3 et 5.

De ce développement connu,

$$\log(n+1) = \log n + \frac{2}{la}\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \text{etc.}\right],$$

on déduit, en changeant $n+1$ en n, et conséquemment n en $n-1$,

$$\log n = \log(n-1) + \frac{1}{la}\left[\frac{1}{2n-1} + \frac{1}{3(2n-1)^3} + \text{etc.}\right].$$

Qu'on fasse dans cette identité $n = z^2$, et qu'on représente par S la série qui multiplie $\frac{2}{la}$, on aura

$$2\log z = \log(z+1) + \log(z-1) + \frac{2}{la}.S,$$

d'où

$$\log(z+1) = 2\log z - \log(z-1) - \frac{2}{la}.S.$$

Faisant successivement $z=4$, $=5$, $=9$, et représentant par S′, S″, S‴ ce que devient S par ces trois valeurs de z, on aura les trois équations

$$\log 5 = 2\log 4 - \log 3 - \frac{2S'}{l.a},$$

$$\log 6 = 2\log 5 - \log 4 - \frac{2S''}{l.a},$$

$$\log 10 = 2\log 9 - \log 8 - \frac{2S'''}{l.a},$$

desquelles on déduit les trois suivantes,

$$\log 5 - 4 \log 2 + \log 3 = -\frac{2S'}{l.a},$$

$$\log 3 + 3 \log 2 - 2 \log 5 = -\frac{2S''}{l.a},$$

$$\log 5 + 4 \log 2 - 4 \log 3 = -\frac{2S'''}{l.a}.$$

Si l'on regarde log 2, log 3, log 5 comme trois inconnues à évaluer, on trouvera

$$\log 2 = \frac{2}{l.a}[7S' + 5S'' + 3S'''],$$

$$\log 3 = \frac{2}{l.a}[11S' + 8S'' + 5S'''];$$

$$\log 5 = \frac{2}{l.a}[16S' + 12S'' + 7S'''].$$

Substituant dans ces trois équations les valeurs en séries de S', S'' et S''' pour $z = 4$, $= 5$, $= 9$, on aura

$$\log 2 = \frac{2}{l.a}\Big[7\left(\frac{1}{31} + \frac{1}{3.31^3} + \frac{1}{5.31^5} + \text{etc.}\right) + 5\left(\frac{1}{49} + \frac{1}{3.49^3} + \frac{1}{5.49^5} + \text{etc.}\right) + 3\left(\frac{1}{161} + \frac{1}{5.161^3} + \frac{1}{5.161^5} + \text{etc.}\right)\Big],$$

$$\log 3 = \frac{2}{l.a}\Big[11\left(\frac{1}{31} + \frac{1}{3.31^3} + \frac{1}{5.31^5} + \text{etc.}\right) + 8\left(\frac{1}{49} + \frac{1}{3.49^3} + \frac{1}{5.49^5} + \text{etc.}\right) + 5\left(\frac{1}{161} + \frac{1}{3.161^3} + \frac{5}{5.161^5} + \text{etc.}\right)\Big],$$

$$\log 5 = \frac{1}{l.a}\Big[16\left(\frac{1}{31} + \frac{1}{3.31^3} + \frac{1}{5.31^5} + \text{etc.}\right) + 12\left(\frac{1}{49} + \frac{1}{3.49^3} + \frac{1}{5.49^5} + \text{etc.}\right) + 7\left(\frac{1}{161} + \frac{1}{3.161^3} + \frac{1}{5.161^5} + \text{etc.}\right)\Big].$$

A partir du nombre 7 et pour les nombres premiers qui suivent, on emploiera la formule (13) qui donne immédiatement, en y faisant $n=5, =9, =11, =15$, etc.,

$$\log 7 = \log 3 + 2 \log 6 - 2 \log 4 + \frac{2}{la}\left(\frac{1}{55} + \frac{1}{3.\overline{55}^3} + \frac{1}{5.\overline{55}^5} + \text{etc.}\right),$$

$$\log 11 = \log 7 + 2 \log 10 - 2 \log 8 + \frac{2}{la}\left(\frac{1}{351} + \frac{1}{3.\overline{351}^3} + \frac{1}{5.\overline{351}^5} + \text{etc.}\right),$$

$$\log 13 = \log 9 + 2 \log 12 - 2 \log 10 + \frac{2}{la}\left(\frac{1}{649} + \frac{1}{3.\overline{649}^3} + \frac{1}{5.\overline{649}^5} + \text{etc.}\right),$$

$$\log 17 = \log 13 + 2 \log 16 - 2 \log 14 + \frac{2}{la}\left(\frac{1}{1665} + \frac{1}{3.\overline{1665}^3} + \frac{1}{5.\overline{1665}^5} + \text{etc.}\right);$$

etc.

Mais à partir du nombre premier 53, la formule (13) cède l'avantage à la suivante, qui est due à M. *Haros*, auteur d'une *Instruction abrégée sur les nouvelles Mesures*, avec des *Tables de rapports et de réduction.*

Reprenons la série

$$\log\left(\frac{1+b}{1-b}\right) = \frac{2}{la}\left(b + \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} + \text{etc.}\right):$$

si on fait

$$\frac{1+b}{1-b} = n, \quad \text{d'où} \quad b = \frac{n-1}{n+1},$$

on obtiendra la suivante,

$$\log n = \frac{2}{l.a}\left[\left(\frac{n-1}{n+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^5 + \text{etc.}\right];$$

et posant $n=\frac{p}{q}$, ce qui donne

$$n-1=\frac{p-q}{q},\quad n+1=\frac{p+q}{q},$$

on aura

$$\log\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{2}{l.a}\left[\frac{p-q}{p+q}+\frac{1}{3}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^5+\text{etc.}\right]\ldots(14),$$

série toujours convergente. Supposons

$$p=x^4-25x^2=x^2(x^2-25)=x^2(x+5)(x-5);$$

$$q=x^4-25x^2+144=(x^2-9)(x^2-16)$$
$$=(x+3)(x-3)(x+4)(x-4),$$

la substitution donnera

$$2\log x+\log(x+5)+\log(x-5)-\log(x+3)$$
$$-\log(x-3)-\log(x+4)-\log(x-4)$$
$$=-\frac{2}{l.a}\left[\frac{72}{x^4-25x^2+72}+\frac{1}{3}\left(\frac{72}{x^4-25x^2+72}\right)^3+\text{etc.}\right];$$

d'où l'on déduira

$$\log(x+5)=\log(x+3)+\log(x-3)+\log(x+4)$$
$$+\log(x-4)-\log(x-5)-2\log x$$
$$-\frac{2}{l.a}\left[\frac{72}{x^4-25x^2+72}+\frac{1}{3}\left(\frac{72}{x^4-25x^2+72}\right)^3+\text{etc.}\right]\ldots(15).$$

Pour se faire une idée de l'approximation de cette formule, on fera $x=1000$: substituant cette valeur dans le premier terme de la série précédente, il sera, à très-peu-près,

0,00000 00000 72.....

et multipliant par le double du module, ou par $\frac{2}{la}$, on aura environ

0,00000 00000 62.....

Si l'on évalue le second terme, on trouvera, après la multiplication faite par $\frac{2}{la}$,

0,00000 00000 00000 00000 00000 00000 11, etc.

Donc au moyen de tables qui donneraient les logarithmes de 1004 premiers nombres avec trente décimales, il suffirait du premier terme de cette série pour obtenir ceux des nombres suivans avec la même approximation.

Pour le nombre premier 53, le troisième terme de cette formule donne

0,00000 00000 00000 00000 00000 96945 etc.

Si l'on fait

$$q = x^6 - 98x^4 + 2401x^2 - 14400$$
$$= (x+8)(x-8)(x+5)(x-5)(x+3)(x-3),$$
$$p = x^6 - 98x^4 + 2401x^2 = x^2(x+7)^2(x-7)^2,$$

on aura

$$p - q = 144000, \quad p + q = 2x^6 - 196x^4 + 4802x^2 - 14400;$$

et

$$\frac{p-q}{p+q} = \frac{7200}{x^6 - 98x^4 + 2401x^2 - 7200},$$

et la série (14) deviendra

$$2\log x + 2\log(x+7) + 2\log(x-7) - \log(x+8) - \log(x-8)$$
$$- \log(x+5) - \log(x-5) - \log(x+3) - \log(x-3)$$
$$= \frac{2}{la}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{7200}{x^6-98x^4+2401x^2-7200} \\ +\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{7200}{x^6-98x^4+2401x^2-7200}\right)^3 + \text{etc.}\end{array}\right\} \ldots\ldots (16).$$

Si pour x on écrit successivement les nombres 9, 10, 11,

12, 13, 14, 17, 19, 25 et 27, on aura les équations

$$4\log 2 + 2\log 3 - \log 7 - \log 17$$
$$= \frac{2}{la}\left[\frac{25}{263} + \frac{1}{3}\left(\frac{25}{263}\right)^3 + \text{etc.}\right]$$
$$-\log 3 - \log 7 - \log 13 + 2\log 17$$
$$= \frac{2}{la}\left[\frac{8}{281} + \frac{1}{3}\left(\frac{8}{281}\right)^3 + \text{etc.}\right]$$
$$-3\log 2 + 2\log 3 - \log 7 + 2\log 11 - \log 19$$
$$= \frac{2}{la}\left[\frac{25}{2153} + \frac{1}{3}\left(\frac{25}{2153}\right)^3 + \text{etc.}\right]$$
$$-\log 3 - \log 7 - \log 17 + 2\log 19$$
$$= \frac{2}{la}\left[\frac{2}{359} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{359}\right)^3 + \text{etc.}\right]$$
$$-3\log 2 - \log 3 - \log 7 + 2\log 13$$
$$= \frac{2}{la}\left[\frac{1}{337} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{337}\right)^3 + \text{etc.}\right]$$
$$-\log 3 + 6\log 7 - 2\log 11 - \log 17 - \log 19$$
$$= \frac{2}{la}\left[\frac{200}{117449} + \frac{1}{3}\left(\frac{200}{117449}\right)^3 + \text{etc.}\right]$$
$$2\log 2 - \log 3 - \log 5 - \log 7 - \log 11 + 2\log 17$$
$$= \frac{2}{la}\left[\frac{1}{2311} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2311}\right)^3 + \text{etc.}\right]$$
$$-3\log 2 - 2\log 3 - \log 7 - 2\log 11 + 2\log 13 + 2\log 19$$
$$= \frac{2}{la}\left[\frac{25}{121993} + \frac{1}{3}\left(\frac{25}{121993}\right)^3 + \text{etc.}\right]$$
$$6\log 2 + 2\log 3 + 2\log 5 - \log 7 - 2\log 11 - \log 17$$
$$= \frac{2}{la}\left[\frac{1}{28799} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{28799}\right)^3 + \text{etc.}\right]$$
$$-4\log 2 + 4\log 3 - \log 7 - \log 11 + 2\log 17 - \log 19$$
$$= \frac{2}{la}\left[\frac{1}{46817} + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{46817}\right)^3 + \text{etc.}\right].$$

Ces dix équations ne renfermant que les logarithmes des huit premiers nombres 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19, il n'en faut que huit pour calculer ces huit logarithmes : nous ferons choix des huit dernières, comme renfermant les séries les plus convergentes, séries que nous désignerons par S_1, S_2, S_3, S_4, etc., à partir de la troisième inclusivement : ces équations résolues donnent, en représentant $\frac{2}{la}$ par M,

$$\log 2 = M(94S_1 - 40S_2 - 74S_3 + 10S_4 + 28S_5 + 74S_6 + 14S_7 - 36S_8),$$

$$\log 3 = M(148S_1 - 62S_2 - 116S_3 + 16S_4 + 44S_5 + 116S_6 + 22S_7 - 56S_8),$$

$$\log 5 = M(226S_1 - 103S_2 - 183S_3 + 22S_4 + 64S_5 + 183S_6 + 33S_7 - 88S_8),$$

$$\log 7 = M(266S_1 - 115S_2 - 211S_3 + 28S_4 + 78S_5 + 211S_6 + 39S_7 - 102S_8),$$

$$\log 11 = M(328S_1 - 142S_2 - 260S_3 + 34S_4 + 96S_5 + 260S_6 + 48S_7 - 126S_8),$$

$$\log 13 = M\left(348S_1 - \frac{297}{2}S_2 - \frac{547}{2}S_3 + 37S_4 + 103S_5 + \frac{549}{2}S_6 + \frac{103}{2}S_7 - 133S_8\right)$$

$$\log 17 = M(390S_1 - 171S_2 - 311S_3 + 40S_4 + 114S_5 + 311S_6 + 57S_7 - 150S_8),$$

$$\log 19 = M(402S_1 - 173S_2 - 319S_3 + 42S_4 + 118S_5 + 319S_6 + 59S_7 - 154S_8).$$

En calculant dans la supposition de $\log a = 1$, les logarithmes de 2 et de 5, et les ajoutant, on aura le logarithme *népérien* de 10 : le quotient de l'unité par ce logarithme sera le mo-

dule des tables. Pour avoir le logarithme de 23, on fera, par exemple, dans (16), $x+8=23$, d'où $x=15$, et on aura

$$\log 23 = 2\log 2 - \log 3 - \log 7 + 2\log 11$$
$$-2\mathrm{M}\left[\frac{1}{967}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{967}\right)^3+\text{etc.}\right].$$

On aurait pu faire l'une des hypothèses,

$$x+7=23,\quad x+5=23,\quad x+3=23,\quad x-7=23,$$

et même cette dernière est l'une des plus avantageuses. Voyez pour les détails de calcul, un Mémoire de M. *Lavernède*, consigné dans les *Annales de Mathématiques*, tome I, n°s 1 et 2.

105. Nous terminerons ce qui concerne le calcul des logarithmes, par l'exposition de quelques formules remarquables en ce qu'elles donnent par un petit nombre de termes, les logarithmes des nombres au-dessus de 1000, avec toute l'approximation desirable dans un grand nombre de cas.

A cet effet, nous reprendrons la série

$$\log\left(\frac{1+b}{1-b}\right)=2\mathrm{M}\left[b+\frac{b^3}{3}+\frac{b^5}{5}+\frac{b^7}{7}+\text{etc.}\right],$$

dans laquelle M représente le module $\frac{1}{la}$: si l'on suppose

$$\frac{1+b}{1-b}=\frac{x^2}{x^2-1},\quad \text{d'où}\quad b=\frac{1}{2x^2-1},$$

cette série devient

$$\log\left(\frac{1+b}{1-b}\right)=\log\left(\frac{x^2}{x^2-1}\right)$$
$$=2\mathrm{M}\left(\frac{1}{2x^2-2}+\frac{1}{3(2x^2-1)^3}+\frac{1}{5(2x^2-1)^5}+\text{etc.}\right);$$

d'où l'on déduit

$$\log x = \frac{\log(x+1) + \log(x-1)}{2}$$

$$+ M\left[\frac{1}{2x^2-1} + \frac{1}{3(2x^2-1)^3} + \text{etc.}\right],$$

série très-convergente, au moyen de laquelle on résoudra facilement la question suivante :

Étant donnés les logarithmes des nombres premiers au-dessous de 1000, avec 15 décimales, trouver les logarithmes des nombres premiers au-dessus de 1000, avec 12 décimales au moins.

Lorsque x est un peu plus grand que 1000, le terme $\frac{1}{3(2x^2-1)^3}$ équivaut à peine à

$$\frac{1}{24000\ 00000\ 00000\ 00000};$$

on peut donc le négliger, et on aura

$$\log x = \frac{\log(x+1) + \log(x-1)}{2} + M\left(\frac{1}{2x^2-1}\right).$$

Si au lieu de $M\left(\frac{1}{x^2-1}\right)$ on prenait $M\left(\frac{1}{2x^2-2}\right)$, l'erreur serait exprimée par la différence

$$M\left[\frac{1}{(2x^2-1)(2x^2-2)}\right];$$

donc, dans le cas le plus défavorable, c'est-à-dire, lorsque x excède 1000 de très-peu d'unités, cette erreur serait d'environ

$$\frac{0{,}43429\ldots}{400\ 00000\ 00000} = 0{,}00000\ 00000\ 001 :$$

ainsi, pour avoir 12 ou 13 décimales exactes, il suffit de

recourir à la formule

$$\log x = \frac{\log(x+1)+\log(x-1)}{2} + \mathrm{M}\left(\frac{1}{2x^2-2}\right)$$
$$= \frac{\log(x+1)+\log(x-1)}{2} + \left(\frac{\frac{1}{2}\mathrm{M}}{(x+1)(x-1)}\right) \ldots (17);$$

mais x étant un nombre premier, les facteurs $x+1$ et $x-1$ seront des nombres pairs et se décomposeront toujours en facteurs plus petits que x; on pourra donc trouver leurs logarithmes avec 13 décimales, et on aura déjà

$$\frac{\log(x+1)+\log(x-1)}{2}.$$

A l'égard du terme $\frac{\frac{1}{2}\mathrm{M}}{(x+1)(x-1)}$, on peut en calculer la valeur numérique par les tables de logarithmes ordinaires, en prenant le logarithme du module M avec 7 décimales seulement, et retranchant de ce logarithme celui de 2, le reste sera un logarithme constant, dont on soustraira celui du dénominateur qu'on a déjà. Or, d'après ce qui a été dit sur les caractéristiques négatives (Ire sect., chap. XVI),

$$\log \mathrm{M} = \bar{1},63778\ 43,$$
$$\log \tfrac{1}{2}\mathrm{M} = \bar{1},33675\ 43;$$

donc

$$\log\left[\frac{\frac{1}{2}\mathrm{M}}{(x+1)(x-1)}\right] = \bar{1},3367543 - [\log(x+1)+\log(x-1)].$$

Soit, pour application, $x = 1097$ dont on cherche le logarithme avec 12 décimales : on a

$$x+1 = 1098 = 18 \times 61,$$
$$x-1 = 1096 = 8 \times 137:$$

on trouve dans les tables de *Hutton*, ou dans celles de *Callet*, sous le titre : *Tables de Logarithmes vulgaires et de logarithmes*

hyperboliques, *à 20 décimales*, etc.,

$$\log 18 = 1{,}25527\,25051\,033$$
$$\log 61 = 1{,}78532\,98350\,108$$
$$\text{Somme} = 3{,}04060\,23401\,141$$
$$\log 8 = 0{,}90308\,99869\,919$$
$$\log 137 = 2{,}13672\,05671\,564$$
$$\text{Somme} = 6{,}08041\,28942\,624$$
$$\tfrac{1}{2}\,\text{somme} = 3{,}04020\,64471\,322 = \frac{\log(x+1)+\log(x-1)}{2}$$
$$\log \tfrac{1}{2}M = \bar{1},33675\,43$$
$$\log(x+1)+\log(x-1) = 6{,}08041\,29$$
$$\log\tfrac{1}{2}M - [\log(x+1)+\log(x-1)] = \bar{7},25634\,14 = \log 0{,}00000\,01804\,433$$
$$0{,}00000\,01804\,433$$
$$\frac{\log(x+1)+\log(x-1)}{2} = 3{,}04020\,64471\,312$$
$$\text{Somme} = 3{,}04020\,66275\,745 = \log x = \log 1097$$

Ce logarithme ne diffère de celui de *Hutton* ou de *Callet*, que de deux unités dans la 13ième décimale.

Nous ferons connaître une formule propre à donner avec 15 ou 16 décimales, le logarithme d'un très-grand nombre, pourvu qu'on ait des tables de logarithmes des nombres naturels, depuis 1 jusqu'à 1000, calculées avec 16 décimales.

A cet effet, on fera une fraction ayant pour numérateur les six ou sept premiers chiffres du nombre donné, et pour dénominateur, l'unité suivie d'autant de zéros qu'il y aura de chiffres au numérateur; puis réduisant cette fraction en fraction continue, par le procédé connu, on cherchera celle des fractions intégrantes qui, sous des termes plus petits que 1000, approchera le plus de la fraction donnée. Soit $\frac{q}{p}$ cette fraction qui peut être plus grande ou plus petite que le nombre donné;

nous la supposerons plus petite, et en désignant par a le nombre donné, on posera l'équation

$$a = \frac{q\,(1+x)}{p\,(1-x)},$$

$\frac{1+x}{1-x}$ étant un nombre très-peu au-dessus de l'unité : on déduit de là

$$\log a = \log q - \log p + \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$= \log q - \log p + 2\mathrm{M}\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \text{etc.}\right);$$

mais la fraction

$$x = \frac{ap-q}{ap+q}$$

étant très-petite, puisque son numérateur revient à $\left(a - \frac{q}{p}\right)p$, quantité plus petite que $\frac{1}{p}$ (I[re] sect., chap. XXXI), ses puissances 3[e], 4[e], 5[e], etc. pourront être négligées dans l'emploi numérique de la formule; ensorte qu'elle se réduira à

$$\log a = \log q - \log p + 2\mathrm{M}\left(\frac{ap-q}{ap+q}\right)\ldots\ldots(18).$$

Faisons une application de ce moyen à la recherche de

$$\log \sin 0^q,556,$$

q désignant le quart de la circonférence : on a

$$\sin 0^q,556 = 0,76649\ 30068\ 09349\ 8 = a.$$

Après avoir formé la fraction $\frac{766493}{1000000}$, on opérera sur les deux termes comme pour en chercher le plus grand commun diviseur, et on trouvera la suite des quotiens 1, 3, 3, 1, 1, 5, 1, 4 qui donneront les fractions convergentes

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{1},\ \frac{3}{4},\ \frac{10}{13},\ \frac{13}{17},\ \frac{23}{30},\ \frac{128}{167},\ \frac{151}{197},\ \frac{732}{955};$$

ensorte qu'on peut prendre la dernière pour une approximation du sinus proposé. On aura donc

$$\frac{q}{p} = \frac{732}{955}.$$

Au moyen de ces données, on trouvera

$$\frac{ap - q}{ap + q} = 0,00000\ 05611\ 05665\ 7 :$$

le cube de ce nombre aurait 18 zéros après la virgule, et conséquemment on peut le négliger. Or,

$$2\mathrm{M} = 0,86858\ 89638\ 06503\ 65530$$

$$2\mathrm{M}.\frac{ap-q}{ap+q} = 0,00000\ 04873\ 96159\ 5$$

$$\log q = \log 732 = 2,86451\ 10810\ 58391\ 9$$

$$\text{Somme} = 2,86451\ 15684\ 54551\ 4$$

$$\log 955 = 2,98000\ 33715\ 83746\ 4$$

$$\text{différence} = \bar{1},88450\ 81968\ 70805\ 1$$

$$= \log \sin 0^{q},556.$$

106. Nous avons trouvé ci-dessus ce développement de l'exponentielle, savoir :

$$a^x = 1 + \mathrm{A}x + \frac{\mathrm{A}^2 x^2}{2} + \text{etc.},$$

et $\mathrm{A} = la$, ensorte que

$$a^x = 1 + xla + \frac{1}{2}(xla)^2 + \frac{1}{2.3}(xla)^3 + \text{etc.} \ldots\ldots (19) :$$

on a d'ailleurs $la^x = xla$, d'où résulte encore cette autre forme de développement

$$a^x = 1 + la^x + \frac{1}{2}(la^x)^2 + \frac{1}{2.3}(la^x)^3 + \text{etc.} ;$$

en faisant $a^x = n$, on obtient

$$n = 1 + ln + \frac{1}{2}(ln)^2 + \frac{1}{2.3}(ln)^3 + \text{etc.}$$

Si l'on suppose $ln = 1$, auquel cas n devient le nombre e, on aura comme plus haut,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \text{etc.}$$

Le développement de a^x donnerait, en faisant $a^x = n$, d'où $x = \log n$ pour la base a, et remplaçant A par la,

$$n = 1 + la.\log n + \frac{1}{2}(la.\log n)^2 + \text{etc.}$$

c'est-à-dire, en remplaçant la par $\frac{1}{M}$,

$$n = 1 + \frac{\log n}{M} + \frac{1}{2}\left(\frac{\log n}{M}\right)^2 + \frac{1}{2.3}\left(\frac{\log n}{M}\right)^3 + \text{etc.},$$

formule qui sert à calculer le nombre n, lorsqu'on connaît son logarithme tabulaire.

Si dans le développement de a^x, on change d'abord x en nx, puis a en x, il vient

$$x^{nx} = 1 + Anx + \frac{A^2}{2}n^2x^2 + \frac{A^3}{2.3}n^3x^3 + \text{etc.},$$

où

$$A = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \text{etc.}$$

Or ce développement A n'étant autre chose que le logarithme népérien de x, on aura

$$x^{nx} = 1 + nx(lx) + \frac{n^2x^2}{2}(lx)^2 + \frac{n^3x^3}{2.3}(lx)^3 + \text{etc.}$$

formule qui trouve son emploi dans le calcul intégral.

Nous pouvons maintenant démontrer ce développement curieux,

$$x^m - r^m = \frac{m(lx-lr)}{1} + \frac{m^2(l^2x-l^2r)}{2} + \frac{m^3(l^3x-l^3r)}{2.3} + \text{etc.}$$

En effet, substituant successivement x^m, puis r^m pour a^x dans le premier membre du développement (19), et dans le second $\frac{mlx}{la}$, $\frac{mlr}{la}$ pour x, on aura

$$x^m = 1 + mlx + \frac{1}{2}m^2(lx)^2 + \frac{1}{2.3}m^3(lx)^3 + \text{etc.},$$

$$r^m = 1 + mlr + \frac{1}{2}m^2(lr)^2 + \frac{1}{2.3}m^3(lr)^3 + \text{etc.},$$

séries dont la différence est le théorème en question.

107. Nous nous proposons de faire voir comment, au moyen des séries logarithmiques et exponentielles, on peut résoudre ces trois questions :

1°. *Trouver un nombre qui, élevé à une puissance désignée par lui-même, soit égal à un nombre proposé.*

La traduction de cette question est

$$x^x = a,$$

a étant le nombre donné. Il est facile de trouver pour a un nombre qui ne diffère pas d'une unité du nombre cherché : en appelant p ce nombre, nous poserons

$$x = p + z;$$

on aura donc

$$(p+z)^{p+z} = a,$$

d'où

$$(p+z)\log(p+z) = \log a:$$

mais

$$\log(p+z) = \log p + \log\left(1+\frac{z}{p}\right) = \log p + M\left(\frac{z}{p} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{p^2} + \text{etc.}\right);$$

donc

$$\log a = (p+z)\log(p+z) = p\log p + z\log p + Mz,$$

en négligeant tous les termes où z passe le premier degré. On déduit de là

$$z = \frac{\log a - p\log p}{\log p + M}\ldots\ldots\ldots(1).$$

Appliquons cette formule au cas de $a = 2000$; on a d'abord, à moins d'une unité près, comme nous le verrons bientôt,

$$p = 4{,}8,$$

conséquemment,

$$z = \frac{\log 2000 - 4{,}8\log 4{,}8}{\log 4{,}8 + 0{,}4342945}.$$

Mais

$$\log 2000 = 3{,}3010300, \qquad \log 4{,}8 = 0{,}68124124,$$
$$4{,}8\log 4{,}8 = 3{,}2699579;$$

donc

$$z = \frac{0{,}0310721}{1{,}1155357} = 0{,}0278,$$

conséquemment,

$$x = p + z = 4{,}8278.$$

Si l'on desirait une plus grande approximation, on supposerait dans (1),

$$p = 4{,}8278, \quad \text{d'où} \quad z = \frac{0{,}0000253}{1{,}1180438} = 0{,}00002263,$$

et de là,

$$x = z + p = 4{,}82782263.$$

A l'égard de la première approximation $4{,}8$, on découvre aisément que 2000 est compris entre

$$4^4 = 256, \qquad 5^5 = 3125;$$

donc x est entre 4 et 5. Supposons

$$x = 4,5 = \frac{9}{2},$$

on voit qu'il faudrait qu'on eût

$$\left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{9}{2}} = 2000;$$

mais

$$\left(\frac{9}{2}\right)^4 \left(\frac{9}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{6561}{16} \times \frac{3}{2} \sqrt{2} = 870,$$

à très-peu près : le nombre cherché est donc entre 4,5 et 5. Supposons $x = 4,8$, on a

$$4,8 \log 4,8 = 3,269958 = \log 1862,$$

et l'erreur est — 138, ensorte qu'en prenant $x = 4,8$ pour une première donnée, l'approximation est plus rapide.

2°. *Trouver la somme des puissances* m *des racines d'une équation, immédiatement en coefficiens de cette équation, sans passer par les sommes des puissances inférieures.*

3°. *Connaissant les sommes des puissances des racines d'une équation, traduire un coefficient quelconque de l'équation en sommes de ces puissances.*

Soit une équation d'un degré quelconque

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} \ldots\ldots + V = 0,$$

dont a, b, c, d, etc. soient les racines : on aura

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \text{ etc.}$$

Posons $x = \frac{1}{z}$; on trouvera, après la multiplication par z^m, l'identité,

$$1 + Az + Bz^2 \ldots + Vz^m = (1-az)(1-bz)(1-cz)(1-dz), \text{ etc.};$$

prenant de part et d'autre les logarithmes népériens, on aura

$$l.(1+Az+Bz^2+Cz^3+\ldots\ldots)$$
$$=l.(1-az)+l.(1-bz)+l.(1-cz)+l.(1-dz)+\text{etc.}$$

Si dans le développement,

$$l.(1-b)=-b-\frac{b^2}{2}-\frac{b^3}{3}-\frac{b^4}{4}-\text{etc.},$$

on fait b successivement $=az$, $=bz$, $=cz$, $=$ etc., on aura

$$\begin{aligned}l.(1+Az+Bz^2+Cz^3+\text{etc}\ldots)=&-(a+b+c+d+\text{etc.})\,z\\&-(a^2+b^2+c^2+d^2+\text{etc.})\frac{z^2}{2}\\&-(a^3+b^3+c^3+d^3+\text{etc.})\frac{z^3}{B}\\&-(a^4+b^4+c^4+d^4+\text{etc.})\frac{z^4}{4}\\&\text{etc.}\end{aligned}$$

posant donc

$$\begin{aligned}S_1&=a+b+c+d+\text{etc.},\\S_2&=a^2+b^2+c^2+d^2+\text{etc.},\\S_3&=a^3+b^3+c^3+d^3+\text{etc.},\\S_4&=a^4+b^4+c^4+d^4+\text{etc.},\\&\text{etc.},\end{aligned}$$

l'identité précédente deviendra

$$l.(1+Az+Bz^2+Cz^3+\text{etc.})$$
$$=-zS_1-\frac{z^2}{2}S_2-\frac{z^3}{3}S_3-\frac{z^4}{4}S_4-\text{etc.};$$

pour avoir le développement du premier membre, on remplacera dans

$$l.(1+b) = b - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} + \text{etc.},$$

b par $Az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc.}$, et après avoir ordonné par rapport aux puissances de z, on obtiendra cette identité,

$$-zS_1 - \frac{z^2}{2} S_2 - \frac{z^3}{3} S_3 - \frac{z^4}{4} S_4 - \text{etc.}$$

$$= Az + \left.\begin{array}{l} B \\ -\frac{A^2}{2} \end{array}\right| z^2 + \left.\begin{array}{l} C \\ -\frac{2AB}{2} \\ +\frac{A^3}{3} \end{array}\right| z^3 + \left.\begin{array}{l} D \\ -\frac{2AC}{2} \\ -\frac{B^2}{2} \\ +\frac{3A^2B}{3} \\ -\frac{A^4}{4} \end{array}\right| z^4 + \text{etc.} \ldots (1).$$

En comparant les coefficiens des mêmes puissances de z, on parvient aux relations suivantes,

$$S_1 = -A,$$
$$S_2 = -\tfrac{2}{1} B + \tfrac{2}{2} A^2,$$
$$S_3 = -\tfrac{3}{1} C + \tfrac{3}{2}\, 2AB - \tfrac{3}{3} A^3,$$
$$S_4 = -\tfrac{4}{1} D + \tfrac{4}{2} (2AC + B^2) - \tfrac{4}{3}\, 3A^2B + \tfrac{4}{4} A^4.$$
$$S_5 = -\tfrac{5}{1} E + \tfrac{5}{2} (2AD + 2BC) - \tfrac{5}{3} (3A^2C + 3AB^2), + \tfrac{5}{4}\, 4A^3B - \tfrac{5}{5} A^5,$$

etc.

L'avantage de ces formules sur celles que nous avons données (chap. V), consiste en ce que chacune des sommes S_1, S_2, S_3, etc., est exprimée en coefficiens de l'équation, ensorte que pour calculer l'une de ces sommes, on n'a pas besoin d'évaluer celles qui précèdent, ce qui est un avantage précieux. Pour que ces formules soient identiques avec

celles du chapitre cité, il faut faire les coefficiens A, C, E, etc. négatifs.

Nous passerons à la solution de la seconde question, et pour la résoudre, nous partirons de cette formule trouvée précédemment,

$$l.(1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc.})$$
$$= - zS_1 - \frac{z^2}{2} S_2 - \frac{z^3}{3} S_3 - \frac{z^4}{4} S^4 - \text{etc.},$$

qui n'est autre chose que

$$l.(1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc.}) = le^{-zS_1 - \frac{z^2}{2} S_2 - \frac{z^3}{3} S_3 - \text{etc.}},$$

en observant que $le = 1$; mais lorsque deux logarithmes rapportés à la même base, sont égaux, les nombres de ces logarithmes sont égaux; ainsi, en passant des logarithmes aux nombres, il vient

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc.} = e^{-zS_1 - \frac{z^2}{2} S_2 - \frac{z^3}{3} S^3 - \frac{z^4}{4} S_4 - \text{etc.}}$$

Tout se réduit donc à développer le second membre suivant les puissances de z, au moyen de la formule

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.},$$

dans laquelle on fera

$$x = - zS_1 - \frac{z^2}{2} S_2 - \frac{z^3}{3} S_3 - \frac{z^4}{4} S_4 - \text{etc.};$$

après avoir ordonné le résultat suivant les puissances de z, on trouvera

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \text{etc.} = 1 - S_1 z \left.\begin{array}{l} - \frac{S_2}{2} \\ + \frac{S_1^2}{2} \end{array}\right| z^2 \left.\begin{array}{l} - \frac{S_3}{3} \\ + \frac{S_1 S_2}{1.2} \\ - \frac{S_1^3}{1.2.3} \end{array}\right| z^3 - \text{etc.} \quad (2)$$

d'où l'on déduit, par la comparaison des coefficiens des mêmes puissances de z,

$$A = -S_1,$$

$$B = -\frac{S_2}{2} + \frac{S_1^2}{1.2},$$

$$C = -\frac{S_3}{3} + \frac{1}{1.2} S_1 \frac{S_2}{1.2} - \frac{S_1^3}{1.2.3},$$

etc.

Waring a donné pour la solution de ce problème, une formule qu'il compose par les combinaisons, et qui s'accorde avec les précédentes : elle se trouve dans ses *Meditationes algebricæ*, *cap. I*, *Probl. III*, *coroll.*, ainsi que dans son premier ouvrage de 1762. Il aurait été sans doute plus simple de déduire les valeurs des coefficiens en S_1, S_2, etc. de l'identité (1) qui donne en même temps la solution des deux énoncés; mais nous avons voulu résoudre les deux questions séparément.

108. Enfin nous ferons connaître un usage très-simple qu'a fait *Lagrange*, de la formule

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{etc.},$$

pour trouver le développement d'une puissance quelconque d'une quantité composée d'autant de termes que l'on voudra. A cet effet, si à la place de x, on met $i\,(p+q+r+\text{etc.})$, on aura

$$e^{i(p+q+r+\text{etc.})} = 1 + i(p+q+r+\text{etc.}) + \frac{i^2}{1.2}(p+q+r+\text{etc.})^2$$
$$+ \frac{i^3}{1.2.3}(p+q+r+\text{etc.})^3 + \text{etc}:$$

ainsi le terme multiplié par i^m, sera

$$\frac{(p+q+r+\text{etc.})^m}{1.2.3\ldots\ldots m};$$

d'un autre côté, on a

$$e^{i(p+q+r+\text{etc.})}=e^{ip}\times e^{iq}\times e^{ir}\times \text{etc.}=\left(1+ip+\frac{i^2p^2}{1.2}+\frac{i^3p^3}{1.2.3}+\text{etc.}\right)$$
$$\times\left(1+iq+\frac{i^2q^2}{1.2}+\frac{i^3q^3}{1.2.3}+\text{etc.}\right)$$
$$\times\left(1+ir+\frac{i^2r^2}{1.2}+\frac{i^3r^3}{1.2.3}+\text{etc.}\right)$$
$$\times\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donc le coefficient de i^m, dans le développement de ces différens produits, multiplié par $1.2.3.\ldots.m$, sera la valeur de $(p+q+r+\text{etc.})^m$. Or il est visible que ce coefficient se trouvera composé d'autant de termes de la forme

$$\frac{p^\lambda q^\mu r^\nu}{1.2.3.\ldots.\lambda\times 1.2.3.\ldots.\mu\times 1.2.3.\ldots.\nu\times\ldots.};$$

que l'on peut donner de valeurs différentes à λ, μ, ν, etc., de sorte qu'on ait

$$\lambda+\mu+\nu+\text{etc.}=m,$$

en prenant pour λ, μ, ν, etc. des nombres entiers positifs. Ainsi la puissance $(p+q+r+\text{etc.})^m$ sera composée d'autant de termes de la forme

$$\frac{1.2.3.4\ldots.(m-1)\,m}{1.2.3\ldots\lambda\times 1.2.3\ldots\mu\times 1.2.3\ldots\nu\times\text{etc.}}\times p^\lambda q^\mu r^\nu\ \text{etc.}\ldots\ldots(1),$$

ce qui s'accorde avec ce que donne la théorie des combinaisons. Ce terme peut être écrit sous la forme

$$\frac{1.2.3.4\ldots\lambda(\lambda+1)\ldots(m-1)m}{1.2.3\ldots\lambda\times 1.2.3\ldots\mu\times 1.2.3\ldots\nu\times\text{etc.}}\times p^\lambda q^\mu r^\nu\ \text{etc.}$$
$$=\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots.(\lambda+2)(\lambda+1)}{1.2.3\ldots.\mu\times 1.2.3\ldots..\nu\times\text{etc.}}\times p^\lambda q^\mu r^\nu\ \text{etc.}$$

Mais de $m=\lambda+\mu+\nu+\text{etc.}$, on tire

$$\lambda=m-\mu-\nu-\text{etc.};$$

donc la formule précédente devient

$$\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-\mu-\nu-\text{etc}\dots+1)}{1.2\dots\mu\times 1.2\dots\nu\times\text{etc.}}\,q^{\mu}r^{\nu}\dots p^{m-\mu-\nu-\text{etc.}},$$

ce qui fournit l'énoncé d'une règle.

109. Faisons quelques applications, et supposons $m=6$: on cherchera de combien de manières on peut faire 6, et on aura ces décompositions :

6					
5	1				
4	2				
3	3				
4	1	1			
3	2	1			
2	2	2			
3	1	1	1		
2	2	1	1		
2	1	1	1	1	
1	1	1	1	1	1

d'où résulteront ces différentes espèces de termes, savoir : pour

$\lambda=6$, les termes de la forme p^6,

$\lambda=5,\ \mu=1$ .... $6p^5q$,

$\lambda=4,\ \mu=2$ .... $15p^4q^2$,

$\lambda=3,\ \mu=3$ .... $20p^3q^3$,

$\lambda=4,\ \mu=1,\ \nu=1$ .... $30p^4qr$,

$\lambda=3,\ \mu=2,\ \nu=1$ .... $60p^3q^2r$,

$\lambda=2,\ \mu=2,\ \nu=2$ .... $90p^2q^2r^2$,

$\lambda=3,\ \mu=1,\ \nu=1,\ \xi=1$ .... $120p^3qrs$,

$\lambda=2,\ \mu=2,\ \nu=1,\ \xi=1$ .... $180p^2q^2rs$,

$\lambda=2,\ \mu=1,\ \nu=1,\ \xi=1,\ \rho=1$ .... $360p^2qrst$,

$\lambda=1,\ \mu=1,\ \nu=1,\ \xi=1,\ \rho=1,\ \pi=1$ ... $720pqrstv$,

en observant qu'on ne doit retenir dans la formule générale que les facteurs pour lesquels μ, ν, etc. ne sont pas nuls.

Le polynome étant de la forme

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + \text{etc.})^m,$$

il faudra, dans la formule (1), changer p en a, q en bx, r en cx^2, etc., ce qui donnera

$$\frac{1.2.3.4\ldots\ldots ma^\lambda b^\mu c^\nu d^\xi e^\pi \text{ etc. } x^{\mu+2\nu+3\xi+4\pi+5\rho+\text{etc.}}}{1.2.3\ldots\lambda \times 1.2.3\ldots\mu \times 1.2.3\ldots\nu \times \text{etc.}},$$

en observant que $\lambda + \mu + \nu + \xi + \text{etc.} = m$.

Qu'il s'agisse d'avoir le coefficient de x^6 dans le développement de

$$(a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 + fx^5 + gx^6 + \text{etc.})^6,$$

sans l'effectuer.

Il est d'abord évident qu'on ne doit pas retenir a^6, et que a^5 ne peut être multiplié que par g, ce produit étant pris six fois.

Cherchons les termes de a^4 : dans ces termes, a^4 ne peut se trouver multiplié que par le produit de deux des coefficiens de x, ou par le carré de l'un de ces coefficiens, puisque chaque coefficient de x^6 ne peut être que de six dimensions : on doit donc partager le nombre 6 en deux parties, ce qui ne peut se faire que de ces trois manières, 1 et 5, 4 et 2, 3 et 3 : or l'exposant de x, savoir :

$$\mu + 2\nu + 3\xi + 4\pi + 5\rho + \text{etc.} = 6\,;$$

donc

$$\mu = 1 \quad \text{et} \quad \rho = 1, \qquad \nu = 1 \quad \text{et} \quad \pi = 1, \qquad \xi = 2,$$

les autres quantités étant nulles : conséquemment les coefficiens de x^6 seront, abstraction faite des nombres qui doivent les multiplier,

$$a^4bf, \quad a^4ce, \quad a^4d^2,$$

et le coefficient total de x en a^4, sera

$$30a^4bf + 30a^4ce + 15a^4d^2,$$

en observant que chaque terme de la forme p^4qr est répété 30 fois, tandis que chacun des termes de la forme p^4q^2 est répété 15 fois.

Passons aux termes de x^6 en a^3 : ces termes ne peuvent être que de trois dimensions, en b, c, d, etc., parce que λ étant $=3$, on doit avoir

$$\mu + \nu + \text{etc.} = 6 - 3:$$

donc à cause de

$$\mu + 2\nu + 3\xi + 4\pi + \text{etc.} = 6,$$

il faut partager le nombre 6 en trois parties, ce qui donne ces décompositions :

$$4, \quad 1, \quad 1;$$
$$3, \quad 2, \quad 1;$$
$$2, \quad 2, \quad 2;$$

et conséquemment,

$$\pi = 1, \quad \mu = 1, \quad \nu = 0, \quad \text{etc.};$$
$$\xi = 1, \quad \nu = 1, \quad \mu = 1, \quad \pi = 0, \quad \text{etc.};$$
$$\nu = 1, \quad \mu = 0, \quad \xi = 0, \quad \text{etc.}$$

Ainsi $\mu = 1$ étant répété deux fois, $\nu = 1$ étant répété trois fois, on a eb^2, dcb, c^3, et pour les termes en a^3 pris avec les coefficiens numériques,

$$60a^3b^2e + 120a^3bcd + 20a^3c^3.$$

Les termes en a^2 sont de quatre dimensions en b, c, d, etc. : ainsi le nombre b doit être partagé en quatre parties, comme il suit,

$$3, \quad 1, \quad 1, \quad 1,$$
$$2, \quad 2, \quad 1, \quad 1,$$

d'où

$$\xi = 1, \quad \mu = 1,$$
$$\nu = 1, \quad \mu = 1,$$

μ étant répété trois fois dans le premier cas, et deux fois dans le second, et ν étant répété deux fois : on conclut de là ces coefficiens b^3d, b^2c^2, et conséquemment ces termes en a^2

$$60a^2b^3d + 90a^2b^2c^2,$$

en observant que ces termes se rapportent à ceux-ci p^3q^2r, $p^2q^2r^2$ qui, dans le tableau précédent, ont pour coefficiens respectifs 60 et 90.

Ce partage du nombre 6,

$$2, 1, 1, 1, 1,$$

donne un seul coefficient de a, savoir, $cb.b.b.b$, d'où l'on conclut $30ab^4c$ pour un autre coefficient de x^6.

Enfin le partage du nombre 6 en

$$1, 1, 1, 1, 1, 1,$$

donne b^6.

Ensorte qu'on aura pour facteur de b^6,

$$6a^5g+30a^4bf+30a^4ce+15a^4d^2+60a^3b^2e+120a^3bcd+20a^3c^3$$
$$+60a^2b^3d+90a^2b^2c^2+30ab^4c+b^6.$$

Voyez, sur ce sujet important, les chapitres XVI, XVII et XVIII des *Élémens d'Arithmétique universelle*, par *Kramp*, et le septième numéro du tome II des *Annales de mathématiques*.

CHAPITRE XIX.

Des séries qui expriment le sinus, le cosinus, etc. *par l'arc, et l'arc par le sinus, la tangente; et conséquences qui en résultent.*

110. Nous commencerons par les séries qui donnent le sinus et le cosinus suivant les puissances de l'arc, séries auxquelles nous parviendrons par deux analyses différentes.

Pour l'arc $=0$, le sinus est nul, et le cosinus est égal au rayon; d'où il suit que tous les termes de la série du sinus, doivent renfermer l'arc en facteur, et que l'un des termes de la série du cosinus, doit être le rayon que nous supposerons égal à l'unité. D'une autre part, ces séries ne doivent procéder que suivant les puissances entières et positives de l'arc; car en admettant une puissance négative de l'arc dans ces séries, le sinus et le cosinus de l'arc nul, seraient infinis; conséquence absurde. Dans la supposition d'une puissance fractionnaire de l'arc, telle que $G\sqrt[n]{x^m}$, à une valeur de l'arc, correspondraient des valeurs en nombre n du sinus et du cosinus, ce qui est faux (*); d'ailleurs si l'on supposait des puissances de l'arc, que le développement ne dût pas contenir, l'analyse les rejetterait en donnant o pour valeurs de leurs coefficiens. On posera donc

$$\sin x = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \text{etc.}\ldots\ldots(a),$$
$$\cos x = 1 + A'x + B'x^2 + \text{etc.}\ldots\ldots(b).$$

(*) On sait qu'à un sinus ou à un cosinus donné, répondent des arcs en nombre infini; mais la réciproque n'a pas lieu.

Ici nous avons dû supposer toutes les puissances entières et positives de l'arc; car c'est au calcul à redresser ce qu'il peut y avoir d'inexact dans cette supposition ; cependant on déduit d'une considération fort simple, que la série du sinus ne doit contenir que des puissances impaires de l'arc , tandis que celle du cosinus ne doit contenir que ses puissances paires. En effet, à l'arc $-x$ répond $-\sin x$, ensorte que l'identité (a) devient

$$-\sin x = -Ax + Bx^2 - Cx^3 + Dx^4 - \text{etc.}\ldots(c);$$

retranchant (c) de (a), et divisant la différence par 2, on trouve

$$\sin x = Ax + Cx^3 + Ex^5 + \text{etc.}\ldots(d).$$

Le changement de $+x$ en $-x$ n'en apporte pas dans le signe de $\cos x$, ensorte que

$$\cos x = 1 - A'x + B'x^2 - C'x^3 + \text{etc.}\ldots(e);$$

ajoutant (e) et (b), et divisant la somme par 2, on obtient

$$\cos x = 1 + B'x^2 + D'x^4 + \text{etc.}\ldots(f).$$

On pourra donc supposer

$$\sin x = Ax + Bx^3 + Cx^5 + \text{etc.}\ldots(1),$$
$$\cos x = 1 + A'x^2 + B'x^4 + \text{ete.}\ldots(2).$$

A l'effet de déterminer les coefficiens A, B, C.... A', B', C', etc. indépendans de l'arc x, on partira de ces deux propriétés fondamentales

$$\sin(x+y) = \sin y \cos x + \cos y \sin x\ldots(3),$$
$$\cos(x+y) = \cos y \cos x - \sin y \sin x\ldots(4),$$

qui doivent être vérifiées par les développemens (1) et (2), en y changeant x en $x+y$, pour avoir les fonctions non développées $\sin(x+y)$, $\cos(x+y)$: après ces substitutions, si l'on ordonne suivant x les identités qu'on obtien-

dra, en faisant entrer y et ses puissances dans les coefficiens de x et de ses puissances, et si l'on égale seulement les coefficiens de la première puissance de x, la seule qu'on ait à former, on obtiendra ces deux identités

$$A + 3By^2 + 5Cy^4 + \text{etc.} = A + AA'y^2 + AB'y^4 + \text{etc.},$$
$$2A'y + 4B'y^3 + \text{etc.} = - A^2y - ABy^3 + \text{etc.},$$

qui devant avoir lieu, quel que soit l'arc y, donnent

$$A = A, \quad 2A' = - A^2, \quad 3B = AA',$$
$$4B' = - AB, \quad 5C = + AB', \quad \text{etc.},$$

d'où l'on tire

$$A' = -\frac{A^2}{2}, \quad B = -\frac{A^3}{2.3}, \quad B' = \frac{A^4}{2.3.4},$$
$$C = \frac{A^5}{2.3.4.5}, \quad C' = -\frac{A^6}{2.3.4.5.6}, \quad \text{etc.}:$$

Par ces substitutions, les développemens (1) et (2) deviennent

$$\sin x = Ax - \frac{A^3x^3}{2.3} + \frac{A^5x^5}{2.3.4.5} - \text{etc.},$$
$$\cos x = 1 - \frac{A^2x^2}{2} + \frac{A^4x^4}{2.3.4} - \text{etc.},$$

et il reste à déterminer A : à cet effet, on divisera $\sin x$ et son développement par x, et on aura

$$\frac{\sin x}{x} = A - \frac{A^3x^2}{2.3} + \frac{A^5x^4}{2.3.4.5} - \text{etc.}$$

Or le rapport $\frac{\sin x}{x}$ approchant de l'unité, à mesure que x diminue (Trig.), ce rapport ne devient rigoureusement égal à l'unité, que pour $x = 0$; donc

$$A = 1.$$

Nous donnerons bientôt une détermination plus rigoureuse de ce coefficient A.

Nous allons rechercher les mêmes séries par une autre voie.

En partant de la formule

$$(\cos x+\sin x\,\sqrt{-1})^n=\cos nx+\sin nx.\sqrt{-1}\ldots\ldots(5),$$

démontrée (chap. XI), on a réciproquement

$$\cos x+\sin x.\sqrt{-1}=(\cos nx+\sin nx.\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}},$$

le nombre n pouvant être quelconque. Maintenant quelle que soit l'expression de $\sin x$ en série de l'arc x, elle ne peut être que de la forme

$$Ax+Bx^2+Cx^3+\text{etc.},$$

ainsi que nous l'avons prouvé précédemment. Mais comme $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$, on aura

$$\cos x=\sqrt{1-A^2x^2-2ABx^3-\text{etc.}}=1-\frac{A^2x^2}{2}+\text{etc.};$$

or les coefficiens A, B, C, etc. étant indépendans de l'arc x, seront les mêmes pour tout autre arc : substituant donc nx pour x, on aura pareillement

$$\sin nx=nAx+n^2Bx^2+n^3Cx^3+\text{etc},$$
$$\cos nx=1-\frac{n^2A^2x^2}{2}+\text{etc.};$$

donc la formule (5) deviendra

$$\cos x+\sin x.\sqrt{-1}$$
$$=\left[1+nAx.\sqrt{-1}+n^2\left(B.\sqrt{-1}-\frac{A^2}{2}\right)x^2+\text{etc.}\right]^{\frac{1}{n}}.$$

Développons le second membre à la manière du binome, en faisant, pour abréger,

$$X=Ax.\sqrt{-1}+n\left(B.\sqrt{-1}-\frac{A^2}{2}\right)x^2+\text{etc.},$$

on aura

$$\cos x + \sin x.\sqrt{-1} = 1 + \frac{1}{n}(nX) + \frac{1-n}{2n^2}(nX)^2 + \frac{(1-n)(1-2n)}{2.3.n^3}(nX)^3 + \text{etc.}$$

$$= 1 + X + \frac{1-n}{2}X^2 + \frac{(1-n)(1-2n)}{2.3}X^3 + \text{etc.}$$

Comme les valeurs de $\cos x$ et $\sin x$ doivent être indépendantes du nombre arbitraire n, il s'ensuit que tous les termes du second membre, qui se trouveront multipliés par une même puissance de n, doivent se détruire d'eux-mêmes : ne tenant donc compte que des termes où n ne se trouve pas après le développement, il est aisé de voir que la quantité X se réduira à son premier terme $Ax.\sqrt{-1}$, de sorte qu'on aura simplement

$$\cos x + \sin x.\sqrt{-1} = 1 + Ax.\sqrt{-1} + \frac{1}{2}(Ax\sqrt{-1})^2 + \frac{1}{2.3}(Ax.\sqrt{-1})^3 + \text{etc.} \ldots\ldots (6).$$

En effectuant les puissances de $\sqrt{-1}$, et comparant les parties réelles des deux membres ensemble, et les parties imaginaires ensemble, on aura

$$\sin x = Ax - \frac{A^3x^3}{2.3} + \frac{A^5x^5}{2.3.4.5} - \text{etc.} \ldots\ldots (7),$$

$$\cos x = 1 - \frac{A^2x^2}{2} + \frac{A^4x^4}{2.3.4} - \text{etc.} \ldots\ldots (8).$$

Pour avoir de même la valeur de x en sinus et cosinus de x, on n'aura qu'à reprendre la formule fondamentale

$$\cos nx + \sin nx.\sqrt{-1} = (\cos x + \sin x.\sqrt{-1})^n,$$

dans laquelle on mettra pour $\sin nx$ et $\cos nx$ leurs valeurs en séries, savoir :

$$nAx + n^2Bx^2 + \text{etc.}, \quad 1 - \frac{n^2A^2x^2}{2} + \text{etc.},$$

et on développera la puissance n du second membre : on aura ainsi,

$$1 + nAx.\sqrt{-1} + n^2\left(B.\sqrt{-1} - \frac{A^2}{2}\right)x^2 + \text{etc.}$$

$$= \cos^n x\left[1 + n\frac{\sin x}{\cos x}\sqrt{-1} + \frac{n(n-1)}{2}\left(\frac{\sin x}{\cos x}\sqrt{-1}\right)^2 + \text{etc.}\right].$$

Or,

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \text{tang } x, \quad \cos x = \sqrt{1-\sin^2 x};$$

donc

$$\cos^n x = (1-\sin^2 x)^{\frac{n}{2}} = 1 - \frac{n}{2}\sin^2 x + \frac{n(n-2)}{2.4}\sin^4 x + \text{etc.}$$

Substituant ces valeurs, la quantité n ne se trouvera plus que dans les coefficiens, et ordonnant les termes suivant les puissances de cette quantité, le second membre deviendra de cette forme,

$$1 + nP + n^2Q + \text{etc.},$$

en faisant, pour abréger,

$$P = \text{tang } x\sqrt{-1} - \tfrac{1}{2}(\text{tang } x\sqrt{-1})^2 + \tfrac{1}{3}(\text{tang } x\sqrt{-1})^3 - \text{etc.}$$
$$- \tfrac{1}{2}\sin^2 x - \tfrac{1}{4}\sin^4 x - \tfrac{1}{6}\sin^6 x - \text{etc.},$$

$$Q = \tfrac{1}{2}(\text{tang } x\sqrt{-1})^2 + \text{etc.};$$

effaçant l'unité dans les deux membres, et divisant toute l'équation par n, il viendra

$$Ax\sqrt{-1} + n\left(B\sqrt{-1} - \frac{A^2}{2}x^2 + \text{etc.}\right) = P + nQ + \text{etc.};$$

et comme cette identité doit subsister, quelle que soit la quantité n qui y conserve son indétermination, il faudra que les termes qui contiennent les différentes puissances de n, se

détruisent d'eux-mêmes, ce qui la réduira d'abord à

$$Ax\sqrt{-1}=P,$$

savoir, en développant les puissances de $\tan x\sqrt{-1}$,

$$\begin{aligned}Ax\sqrt{-1} = {} & (\tan x - \tfrac{1}{3}\tan^3 x + \tfrac{1}{5}\tan^5 x - \text{etc.})\sqrt{-1} \\ & + \tfrac{1}{2}\tan^2 x - \tfrac{1}{4}\tan^4 x + \tfrac{1}{6}\tan^6 x - \text{etc.} \\ & - \tfrac{1}{2}\sin^2 x - \tfrac{1}{4}\sin^4 x - \tfrac{1}{6}\sin^6 x - \text{etc.}\end{aligned}$$

Comme on peut prendre le radical $\sqrt{-1}$ en plus ou en moins, il est visible qu'en le prenant successivement sous ces deux signes, et soustrayant les deux équations l'une de l'autre, on aura, après la division par $2A\sqrt{-1}$,

$$x=\frac{\tan x - \frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x - \text{etc.}}{A} \quad\ldots\ldots(9),$$

ce qui donne l'arc développé suivant les puissances de sa tangente. Nous reviendrons bientôt sur cette série, à l'effet de la rendre convergente, c'est-à-dire, propre à donner la valeur approchée de la circonférence en parties du rayon.

On peut encore parvenir directement au développement (9), comme on va le voir.

La tangente devant être négative avec l'arc, on prouvera, comme on l'a fait plus haut à l'égard du sinus, que l'arc procède suivant les puissances impaires de la tangente. Soit donc

$$x = A\tan x + B\tan^3 x + C\tan^5 x + \text{etc.}:$$

on aura de même

$$y = A\tan y + B\tan^3 y + C\tan^5 y + \text{etc.},$$

et en changeant dans la première identité, x en $x-y$,

$$x-y = A\tan(x-y) + B\tan^3(x-y) + \text{etc.};$$

mais en soustrayant la série y de la série x, on a

$$\begin{aligned}x-y = {} & (\tan x - \tan y) \\ & \times[A+B(\tan^2 x + \tan x\tan y + \tan^2 y) + \text{etc.}];\end{aligned}$$

donc

$$A \operatorname{tang}(x-y) + B \operatorname{tang}^3(x-y) + \text{etc.}$$
$$=(\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} y)[A + B(\operatorname{tang}^2 x + \operatorname{tang} x \operatorname{tang} y + \operatorname{tang}^2 y) + \text{etc}].$$

Or,

$$\operatorname{tang} x - \operatorname{tang} y = (1 + \operatorname{tang} x \operatorname{tang} y) \operatorname{tang}(x-y);$$

substituant et supprimant le facteur $\operatorname{tang}(x-y)$, on aura

$$A + B \operatorname{tang}^2(x-y) + C \operatorname{tang}^4(x-y) + \text{etc.}$$
$$= (1 + \operatorname{tang} x \operatorname{tang} y)[A + B(\operatorname{tang}^2 x + \operatorname{tang} x \operatorname{tang} y + \operatorname{tang}^2 y) + \text{etc.}].$$

Posant alors $y = x$, cette identité deviendra

$$A = (1 + \operatorname{tang}^2 x)[A + 3B \operatorname{tang}^2 x + 5C \operatorname{tang}^4 x + \text{etc.}];$$

ou en développant,

$$A = A + 3B \left| \operatorname{tang}^2 x + 5C \right| \operatorname{tang}^4 x + 7D \left| \operatorname{tang}^6 x + \text{etc.};\right.$$
$$\quad\;\; + A \quad\quad\quad\quad + 3B \quad\quad\quad\quad + 5C$$

donc

$$A = A,\quad 3B + A = 0,\quad 5C + 3B = 0,\quad 7D + 5C = 0,$$

d'où

$$B = -\tfrac{1}{3}A,\quad C = +\tfrac{1}{5}A,\quad D = -\tfrac{1}{7}A,\quad \text{etc.};$$

donc enfin,

$$x = A[\operatorname{tang} x - \tfrac{1}{3}\operatorname{tang}^3 x + \tfrac{1}{5}\operatorname{tang}^5 x - \text{etc.}].$$

Il résulte de la formule (3), (chap. XVIII), en y changeant x en $x\sqrt{-1}$, que l'identité (6) trouvée plus haut, peut se mettre sous la forme

$$\cos x + \sin x \sqrt{-1} = a^{x\sqrt{-1}} \ldots\ldots (10),$$

De cette formule on déduit, en prenant le radical en plus et en moins, ces expressions remarquables de $\sin x$ et $\cos x$

en exponentielles imaginaires,

$$\sin x = \frac{a^{x\sqrt{-1}} - a^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \quad \cos x = \frac{a^{x\sqrt{-1}} + a^{-x\sqrt{-1}}}{2} \ldots (11).$$

De la formule (10) on tire, en prenant de part et d'autre les logarithmes népériens,

$$l(\cos x + \sin x\sqrt{-1}) = x\sqrt{-1}\,.\,la$$
$$= l\cos x + l(1 + \operatorname{tang} x.\sqrt{-1}),$$

ou bien, en prenant successivement le radical en plus et en moins, et soustrayant une équation de l'autre,

$$x = \frac{1}{la} \times \frac{1}{2\sqrt{-1}} \times l\left(\frac{1 + \operatorname{tang} x.\sqrt{-1}}{1 - \operatorname{tang} x\sqrt{-1}}\right) \ldots (12).$$

Si l'on fait $b = \operatorname{tang} x\sqrt{-1}$ dans le développement de $l\left(\frac{1+b}{1-b}\right)$ trouvé (chap. XVIII), on retombera, après les réductions, sur la formule (9).

111. Il nous reste à prouver que, dans les expressions de $\sin x$ et $\cos x$ en séries, la quantité A doit être égale à l'unité, démonstration que *Lagrange* a affranchie de la considération des infiniment petits. Il est rigoureusement démontré, par les théorèmes d'*Archimède*, que le sinus est toujours moindre que l'arc, tandis que la tangente est toujours plus grande, au moins dans le premier quart de cercle (*) : ainsi on aura

$$\sin x < x^* \quad \text{et} \quad \frac{\sin x}{\cos x} > x;$$

mais

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x};$$

(*) 1°. (fig. 8) AT est > AM, parce qu'on a Tria. ATC : sect. ACM :: AT $\times \frac{1}{2}$ AC : AM $\times \frac{1}{2}$ AC :: AT : AM, et que l'aire ATC est > l'aire ACM ; 2°. MAN est > MN ; donc AM est > MP.

donc

$$\frac{\sin x}{\sqrt{1-\sin^2 x}} > x,$$

d'où l'on tire

$$\sin x > \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Si donc on prend l'arc x moindre qu'un droit, et assez petit pour que Ax soit moindre que l'unité, et si l'on observe que le premier terme Ax de la série (7) du sinus, est plus grand que $\sin x$, tandis que la somme des deux premiers est moindre que $\sin x$, on aura nécessairement,

$$1°. \quad \sin x < Ax, \quad \text{et} \quad > \frac{x}{\sqrt{1+xx}};$$

par conséquent,

$$Ax > \frac{x}{\sqrt{1+xx}} \quad \text{et} \quad A > \frac{1}{\sqrt{1+xx}};$$

$$2°. \quad \sin x > Ax - \frac{A^3x^3}{2.3} \quad \text{et} \quad < x;$$

par conséquent,

$$Ax - \frac{A^3x^3}{2.3} < x, \quad \text{d'où} \quad A - \frac{A^3x^2}{2.3} < 1;$$

c'est-à-dire,

$$A < 1 + \frac{A^3x^2}{2.3}.$$

Comme ces relations doivent avoir lieu, quelque petit que soit x, il résulte de la première que A ne peut être moindre que l'unité; car s'il était possible que A fût < 1, on aurait $\frac{1}{A} > 1$: or la condition $A > \frac{1}{\sqrt{1+xx}}$ donne $\frac{1}{A} < \sqrt{1+xx}$;

et quelque petit que fût l'excès de $\frac{1}{A}$ sur l'unité, il serait

toujours possible de prendre l'arc x tellement petit, qu'on eût $\sqrt{1+xx}<\frac{1}{A}$, tandis que cette quantité doit toujours être $>\frac{1}{A}$.

Il résulte de la seconde condition que A ne peut être plus grand que l'unité ; car quelque petit que fût l'excès de A sur l'unité, il serait toujours possible de prendre x assez petit pour que l'on eût

$$A > 1 + \frac{A^3x^2}{2.3},$$

tandis qu'au contraire on doit toujours avoir

$$A < 1 + \frac{A^3x^2}{2.3};$$

donc puisque la valeur de A ne peut être ni moindre ni plus grande que l'unité, on aura nécessairement $A = 1$: faisant cette substitution dans les séries qui expriment $\sin x$ et $\cos x$, on aura enfin,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.} \ldots (13),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.} \ldots (14),$$

développemens rapportés au cercle dont le rayon est l'unité.

Nous ferons remarquer qu'à cause de $A = 1$, la formule (6) devient

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = 1 + x\sqrt{-1} + \frac{1}{2}(x\sqrt{-1})^2 + \frac{1}{2.3}(x\sqrt{-1})^3 + \text{etc.},$$

c'est-à-dire, en prenant le radical avec le double signe,

$$\cos x \pm \sin x\sqrt{-1} = e^{\pm x\sqrt{-1}} \ldots\ldots (15),$$

comme on le conclut du développement connu,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \text{etc.},$$

en y changeant x en $\pm x\sqrt{-1}$, ensorte que la formule (12) devient

$$x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{1+\text{tang}\,x.\sqrt{-1}}{1-\text{tang}\,x.\sqrt{-1}}\right) \ldots (12').$$

Reprenons les deux propriétés (15) qui reviennent à

$$\cos x + \sin x.\sqrt{-1} = e^{x\sqrt{-1}},$$
$$\cos x - \sin x.\sqrt{-1} = e^{-x\sqrt{-1}},$$

en les divisant l'une par l'autre, puis les ajoutant, et soustrayant la seconde de la première, on trouve

$$\left.\begin{array}{l} e^{2x\sqrt{-1}} = \dfrac{\cos x + \sin x\sqrt{-1}}{\cos x - \sin x\sqrt{-1}} = \dfrac{1+\text{tang}\,x\sqrt{-1}}{1-\text{tang}\,x\sqrt{-1}} \\ \sin x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \\ \cos x = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \end{array}\right\} \ldots\ldots (16).$$

La division des deux dernières donne

$$\text{tang}\,x = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} = \frac{1}{\sqrt{-1}}\,\frac{e^{2x\sqrt{-1}} - 1}{e^{2x\sqrt{-1}} + 1} \ldots (17).$$

112. Comme on n'a besoin que des sinus et cosinus des arcs de la moitié du quadrant (Trig.), la valeur de x ne surpassera jamais $\frac{\pi}{4} = 0{,}78539\ 8$ etc., π étant la demi-circonférence (Géom.) : ainsi les termes des séries $\sin x$, $\cos x$, décroîtront très-rapidement ; mais avant d'aborder le calcul des sinus, ou de passer à l'évaluation des sinus en parties du rayon, nous donnerons celle de π, en supposant le rayon égal à l'unité.

Reprenons, à cet effet, la série (9), qui, à cause de

$A = 1$, devient

$$x = \tan x - \frac{1}{3}\tan^3 x + \frac{1}{5}\tan^5 x - \frac{1}{7}\tan^7 x + \text{etc.}\ldots(18),$$

et faisons $x = \frac{\pi}{4}$; nous aurons

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.},$$

parce que $\tan\frac{\pi}{4} = 1$.

Mais cette série est trop peu convergente pour être employée avec succès. Nous la remplacerons d'abord par deux autres plus convergentes, dues à *Euler*. A cet effet, nous reprendrons la formule connue

$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b}.$$

Soit $a + b = \frac{\pi}{4}$: il s'agit de déterminer les deux arcs a et b au moyen de leurs tangentes : nous aurons, dans l'hypothèse présente,

$$1 = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} :$$

cette équation à deux inconnues donnera $\tan a$ au moyen de $\tan b$, et réciproquement. Soit

$$\tan a = \frac{1}{n},$$

on aura

$$\frac{1}{n} + \tan b = 1 - \frac{\tan b}{n},$$

d'où

$$\tan b = \frac{n-1}{n+1}.$$

Or la supposition la plus favorable pour la convergence des

séries propres à donner a et b au moyen de leurs tangentes, est celle de $n = 2$ qui donne

$$\text{tang } a = \tfrac{1}{2}, \quad \text{tang } b = \tfrac{1}{3}.$$

Si donc on remplace, dans la série (18), d'abord, x par a, et tang x par $\frac{1}{2}$; et, en second lieu, x par b, et tang x par $\frac{1}{3}$, puis qu'on ajoute, on trouvera

$$\frac{\pi}{4} = \text{arc } 50° = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \quad \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{7}\right)^7 + \text{etc.}$$

A cette série nous allons en substituer une autre beaucoup plus convergente, due à M. *Bertrand* de Genève.

Soit, à cet effet, la formule connue

$$\text{tang } 2a = \frac{2 \text{ tang } a}{1 - \text{tang}^2 a}:$$

prenant tang $a = \frac{1}{5}$, on trouve

$$\text{tang } 2a = \frac{5}{12},$$

et conséquemment $2a < 50°$; puisque tang $50° = 1$. D'après cette valeur de tang $2a$, on aura

$$\text{tang } 4a = \frac{2 \text{ tang } 2a}{1 - \text{tang}^2 2a} = \frac{120}{119},$$

d'où l'on conclut $4a > 50°$: soient

$$4a = \text{A}, \quad 50° = \text{B}, \quad \text{A} - \text{B} = b,$$

d'où

$$50° = \text{A} - (\text{A} - \text{B}) = 4a - b;$$

on connaît déjà la valeur numérique de tang A ou de tang $4a$, et

on cherchera celle de tang (A — B), qui est (Trig.)

$$\tang (A - B) = \frac{\tang A - \tang B}{1 + \tang A \tang B} = \frac{1}{239} = \tang b.$$

Maintenant, si dans le développement (18), on remplace, 1°. x par a, et tang x par $\frac{1}{5}$; 2°. x par b, et tang x par $\frac{1}{239}$; on aura

$$4a = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \text{etc.}\right)$$

$$b = \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3(239)^3} + \frac{1}{5(239)^5} - \frac{1}{7(239)^7} + \text{etc.}\right),$$

et conséquemment,

$$\frac{\pi}{4} \text{ ou } 50° = 4\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3.5^3} + \frac{1}{5.5^5} - \frac{1}{7.5^7} + \text{etc.}\right)$$
$$- \left(\frac{1}{239} - \frac{1}{3(239)^3} + \frac{1}{5(239)^5} - \frac{1}{7(239)^7} + \text{etc.}\right),$$

série très-convergente, et de laquelle on conclura, en calculant un très-petit nombre des premiers termes,

$$\pi = \text{arc } 200^g = 3{,}14159\ 26535\ 89793 \text{ etc.},$$

et de là on déduit les autres arcs en parties du rayon.

113. Que R′ désigne un arc égal au rayon, on trouvera la valeur de R′ en centigrades ou minutes décimales, par la proportion

$$1 : R' :: \pi : 20000',$$

d'où

$$R' = \frac{20000'}{\pi}, \quad \text{et} \quad \log R' = 3{,}80388\ 01 \text{ etc.}$$

Que R″ désigne la valeur en secondes décimales de l'arc égal au rayon, et on aura

$$R'' = \frac{2000000''}{\pi}, \quad \text{d'où} \quad \log R'' = 5{,}80388\ 01 \text{ etc.}$$

Ainsi un arc quelconque donné en parties du rayon $=1$, sera exprimé en secondes décimales, en le multipliant par R''; et un arc donné en secondes, sera converti en parties du rayon, en le divisant par R''. Si l'on employait l'ancienne division du cercle, on aurait

$$R''=206264'',8 \text{ etc.}, \quad \text{d'où} \quad \log R''=5,31442\ 51 \text{ etc.}$$

Il est remarquable que $R''=\frac{1}{\sin 1''}$, du moins à très-peu près. Pour s'en convaincre, il suffit de remarquer que $\sin 1''$ pouvant être pris pour l'arc même, on a sensiblement

$$\frac{1}{\sin 1''}=\frac{1}{\text{arc } 1''}=R'', \quad \text{donc} \quad R''=\frac{1}{\sin 1''}.$$

114. Donnons un exemple de l'évaluation du sinus d'un arc en parties du rayon, et proposons-nous de calculer le sinus de $\frac{\pi}{6}$, qu'on sait être égal à la moitié du rayon. A cet effet, reprenons la série du sinus

$$\sin x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\text{etc.}\ldots(19),$$

laquelle est encore convergente pour $x=1$, c'est-à-dire pour l'arc égal au rayon : or la demi-circonférence π étant $=3,14159\ 26535\ 89793\ 2$, etc. pour le rayon 1, on a la proportion

$$3,14159, \text{etc.} : \pi \text{ ou } 200^g :: 1 : x=53^\circ,\ 661977237, \text{ etc.} :$$

on pourra donc, au moyen de la série précédente, calculer en parties du rayon égal à l'unité, les sinus des arcs depuis 0° jusqu'à $63^\circ 66'$, dans la circonférence divisée en 400 parties.

Pour faciliter l'évaluation numérique des sinus, nous poserons

$$\sin x=A-B+C-D+E-F+\text{etc.}\ldots(20),$$

et le rapprochement des développemens (19) et (20) donnera

$$A = x,\quad B = A^2\,\tfrac{1}{6}\,A,\quad C = A^2\,\tfrac{1}{20}\,B,$$
$$D = A^2\,\tfrac{1}{42}\,C,\quad E = A^2\,\tfrac{1}{72}\,D,\quad \text{etc.}$$

Il suffira donc de calculer x^2 ou A^2 qui sera un facteur constant dans les termes successifs : mais d'abord il convient de reconnaître la loi des dénominateurs 6, 20, 42, 72, etc.: à cet effet, qu'on les écrive verticalement, et qu'on en prenne sur le fait les différences, puis les différences entre ces différences, ainsi qu'on le voit dans le tableau ci-dessous,

Nombres.	Diff. 1res.	Diff. 2mes.
6		
	14	
20		8
	22	
42		8
	30	
72		8
	38	
110		8
	46	
156		8
	54	
210		etc.
	etc.	
etc.		

et l'on s'assurera que ces dénominateurs jouissent de la propriété de donner des différences secondes constantes, ensorte que par des additions, on pourra prolonger indéfiniment la colonne de ces diviseurs. En ajoutant, par exemple, 8 à 54, on obtient 62, différence première qui, ajoutée à 210, donne 272, diviseur qui suit immédiatement 210.

Qu'il s'agisse maintenant d'avoir, avec neuf décimales exactes, le sinus de $\frac{1}{6}\pi$, qu'on sait être $= \frac{1}{2}$ rayon : on prendra l'arc $\frac{1}{6}\pi$ avec dix décimales, et on en formera le quarré, en faisant la multiplication sous la condition (Arith.)



de ne retenir que dix décimales dans chacun des produits partiels, ainsi qu'il suit :

$$
\begin{array}{r}
\frac{1}{6}\pi = 0{,}5235987756 \\
0{,}5235987756 \\
\hline
0{,}2617993878 \\
104719755 \\
15707963 \\
2617994 \\
461239 \\
41888 \\
3665 \\
367 \\
26 \\
3 \\
\hline
\frac{1}{6}\pi^2 = 0{,}2741556778,
\end{array}
$$

ensuite les multiples de $(\frac{1}{6}\pi)^2$ qui sont

$$
\begin{aligned}
1.(\tfrac{1}{6}\pi)^2 &= 0{,}2741556778 \\
2.(\tfrac{1}{6}\pi)^2 &= 0{,}5483113556 \\
3.(\tfrac{1}{6}\pi)^2 &= 0{,}8224670334 \\
4.(\tfrac{1}{6}\pi)^2 &= 1{,}0966227112 \\
5.(\tfrac{1}{6}\pi)^2 &= 1{,}3707783890 \\
6.(\tfrac{1}{6}\pi)^2 &= 1{,}6449340668 \\
7.(\tfrac{1}{6}\pi)^2 &= 1{,}9190897446 \\
8.(\tfrac{1}{6}\pi)^3 &= 2{,}1932454224 \\
9.(\tfrac{1}{6}\pi)^2 &= 2{,}4674011002.
\end{aligned}
$$

Au moyen de cette table auxiliaire, on conclura aisément les termes successifs A, B, C, D, E, etc., qui seront

$$
\begin{array}{l|l}
A = 0{,}5235987756 & -B = 0{,}0239245962 \\
C = 0{,}0003279532 & -D = 0{,}0000021407 \\
E = 0{,}0000000082 & \\
\hline
+\ 0{,}5239267370 & -\ 0{,}0239267369
\end{array}
$$

ensorte qu'après la soustraction, on trouve

$$\sin \tfrac{1}{6}\pi = 0{,}5000000001.$$

115. Passons aux séries qui expriment la tangente et la cotangente d'un arc suivant les puissances de cet arc.

On sait que $\tang x = \frac{\sin x}{\cos x}$ pour un rayon égal à l'unité; et comme le premier terme du quotient de la série du sinus, divisée par celle du cosinus, est l'arc x, on pourra poser

$$\tang x = x + Ax^2 + Bx^3 + Cx^4 + \text{etc.};$$

d'ailleurs lorsque l'arc x devient $-x$, $\tang x$ devient $-\tang x$; d'où l'on conclut, comme plus haut à l'égard de la série du sinus, que la série de la tangente ne doit contenir que les puissances impaires de l'arc : ainsi en désignant par a, b, c, etc. les coefficiens numériques de la série du sinus, et par α, β, γ, etc. ceux de la série du cosinus, on a l'identité

$$x + Ax^3 + Bx^5 + Cx^7 + \text{etc.} = \frac{x - ax^3 + bx^5 - cx^7 + \text{etc.}}{1 - \alpha x^2 + \beta x^4 - \gamma x^6 + \text{etc.}};$$

faisant disparaître le dénominateur, puis comparant les coefficiens des mêmes puissances de x, on est conduit à ce développement,

$$\begin{aligned}\tang x = x &+ \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3.5} + \frac{17x^7}{3^2.5.7} + \frac{62x^9}{3^2.5.7.9} \\ &+ \frac{1382x^{11}}{3^2.5^2.7.9.11} + \frac{21844x^{13}}{3^3.5^2.7.9.11.13} \\ &+ \frac{929569x^{15}}{3^3.5^2.7^2.9.11.13.15} + \text{etc.} \ldots (21).\end{aligned}$$

La cotangente étant $= \frac{\cos}{\sin}$, on posera

$$\frac{1}{x} + Ax + Bx^3 + Cx^5 + \text{etc.} = \frac{1 - \alpha x^2 + \beta x^4 - \gamma x^6 + \text{etc.}}{x - ax^3 + bx^5 - cx^7 + \text{etc.}};$$

d'où résultera

$$\text{cotang}\, x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^2.5} - \frac{2x^5}{3^3.5.7} - \frac{x^7}{3^3.5^2.7} - \frac{2x^9}{3^5.5.7.11}$$
$$- \frac{1382x^{11}}{3^6.5^3.7^2.9.11.13} - \frac{4x^{13}}{3^6.5^2.7.9.11.13} - \text{etc.}\ldots(22),$$

où l'on peut supposer

$$\frac{1}{x} - \text{cotang}\, x = z,$$

et alors

$$z = \frac{x}{3} + \frac{x^3}{3^2.5} + \frac{2x^5}{3^3.5.7} + \text{etc.}:$$

connaissant le nombre z et le quotient $\frac{1}{x}$, on a la valeur numérique de cotang x. On remarquera que la série cotang x, contient un terme de puissance négative de x, ce qui doit arriver ici, puisqu'à un arc nul répond, en effet, une cotangente infinie.

116. Il nous reste à résoudre cette question : *Un arc étant donné, trouver le logarithme du sinus, du cosinus et de la tangente de cet arc;* question dont la solution suppose la différentiation du logarithme du sinus, du cosinus et de la tangente (Calc. diff.).

On a

$$d.(\log \sin x) = \frac{d.(\sin x)}{\sin x} = \frac{dx.\cos x}{\sin x} = dx.\cot x$$
$$= dx\left[\frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{3^2.5} - \frac{2x^5}{3^3.5.7} + \text{etc.}\right]:$$

intégrant et introduisant le module

$$M = 0,43429\ 44819 \text{ etc.},$$

on trouve



$$\log \sin x = \log x - \mathrm{M}\left[\frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{2^2.3^2.5} + \frac{x^6}{3^2.5.7.9}\right.$$
$$+ \frac{x^8}{3^3.5^2.7.8} + \frac{x^{10}}{3^2.5^2.7.9.11}$$
$$+ \frac{691x^{12}}{3^2.5^3.6.7^2.9^2.11.13} + \frac{2x^{14}}{3^2.5^2.7^2.9^2.11.13}$$
$$\left. + \frac{3617x^{16}}{3^2.5^4.7^2.9^2.11.13.15.16.17} + \text{etc.}\right] \ldots\ldots(23).$$

On a de même,

$$d\,(\log \cos x) = \frac{d\,(\cos x)}{\sin x} = -\frac{dx.\sin x}{\cos x} = -dx \ \text{tang}\ x$$
$$= -dx\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{3.5} + \text{etc.}\right],$$

et en intégrant,

$$\log \cos x = -\mathrm{M}\left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3.4} + \frac{x^6}{5.9} + \frac{17x^8}{5.7.8.9}\right.$$
$$+ \frac{31x^{10}}{5^2.7.9^2} + \frac{691x^{12}}{5^2.6.7.9^2.11} + \frac{10922x^{14}}{3.5^2.7^2.9^2.11.13}$$
$$\left. + \frac{929569x^{16}}{3.5^2.7^2.8^2.11.13.15.16} + \text{etc.}\right] \ldots\ldots(24).$$

Enfin comme

$$\log \text{tang}\ x = \log \sin x - \log \cos x,$$

il suffit de prendre la différence entre les deux séries qu'on vient de trouver. La série du cosinus est la seule qui n'exige pas le logarithme de l'arc. Mais, en général, la voie la plus courte pour former des tables de logarithmes sinus, est de calculer les sinus naturels, c'est-à-dire, les sinus en parties du rayon, puis d'en former les logarithmes par les séries données dans le chapitre précédent.



117. On connaît la série

$$\log(1-x^2) = -2M\left[\tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{1}{6}x^6 + \text{etc.}\right],$$

M désignant le module

$$M = 0{,}43429\ 44819\ 03251\ 82765\ 11289 \text{ etc.};$$

mais à un arc x très-petit, on peut, ainsi que nous l'avons prouvé, substituer son sinus : donc, dans cette hypothèse,

$$1 - xx = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x;$$

conséquemment, après la division par 2,

$$\log\cos x = -M\left[\tfrac{1}{2}\sin^2 x + \tfrac{1}{4}\sin^4 x + \tfrac{1}{6}\sin^6 x + \text{etc.}\right] \ldots\ldots (25),$$

série trouvée par M. *Delambre*, et qui donne les logarithmes des cosinus des petits arcs, ou ceux des sinus des arcs voisins de 100 degrés.

La formule connue

$$\sin\left(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{2}x\right) = 2\sin\tfrac{1}{2}x\cos\tfrac{1}{2}x,$$

d'où

$$\sin\tfrac{1}{2}x = \frac{\sin x}{2\cos\frac{1}{2}x},$$

donne les logarithmes des sinus des arcs au-dessous de 50°, lorsqu'on connaît ceux des sinus des arcs compris entre 50° et 100° : il suffit donc de calculer ces logarithmes. M. *Delambre* propose, à cet effet, la série

$$\log\sin(x+a) = \log\sin x$$

$$+ 2M\left\{\left[\frac{\sin(x+a)-\sin x}{\sin(x+a)+\sin x}\right] + \frac{1}{3}\left[\frac{\sin(x+a)-\sin x}{\sin(x+a)+\sin x}\right]^3\right.$$

$$\left. + \frac{1}{5}\left[\frac{\sin(x+a)-\sin x}{\sin(x+a)+\sin x}\right]^5\right\} + \text{etc.} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (26),$$

qui se déduit du développement connu

$$\log(n+x) = \log n + 2M\left[\frac{x}{2n+x} + \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2n+x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x}{2n+x}\right)^5 + \text{etc.}\right];$$

en y faisant

$n = \sin x$, $n + x = \sin(x+a)$, d'où $x = \sin(x+a) - \sin x$.

Pour $x = 50°$ et $a = 1°$, le log sin 51° sera donné par une série très-convergente : elle le sera d'autant plus que l'arc sera plus voisin de 100°, parce que la différence $\sin(x+a) - \sin x$ va toujours en décroissant, ce dont il est facile de s'assurer, tandis qu'au contraire le dénominateur $\sin(x+a) + \sin x$ va toujours en augmentant.

On a cette suite de transformations

$$\frac{\sin(x+a) - \sin x}{\sin(x+a) + \sin x} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x+a-x)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x+a+x)} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}a}{\operatorname{tang}(x+\frac{1}{2}a)}$$
$$= \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}a \cot(x+\tfrac{1}{2}a),$$

en observant que $\frac{\sin(x+a) - \sin x}{\sin(x+a) + \sin x}$ est la différence de deux sinus, divisée par la somme des mêmes sinus, rapport qui est celui de la tangente de la demi-différence des arcs, à la tangente de la demi-somme des mêmes arcs. Si l'on fait cette substitution dans(26), on obtiendra cet autre développement de $\log\sin(x+a)$, savoir,

$$\log\sin(x+a) = \log\sin x$$
$$+ 2M\left[\operatorname{tang}\frac{a}{2}\cot\left(x+\frac{a}{2}\right) + \frac{1}{3}\left(\operatorname{tang}\frac{a}{2}\right)^3\cot^3\left(x+\frac{a}{2}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{5}\left(\operatorname{tang}\frac{a}{2}\right)^5\cot^5\left(x+\frac{a}{2}\right) + \text{etc.}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (27).$$

Plus on approche de l'arc de 100°, plus les termes de cette série deviennent petits, et plus elle est convergente.

118. La formule qui donne le développement du sinus suivant l'arc, étant plus propre à calculer ou à vérifier un sinus en particulier, qu'à construire des tables, nous pensons qu'on ne sera pas fâché de trouver ici un aperçu des moyens employés au bureau du Cadastre, pour obtenir les sinus et tangentes naturels, avec une approximation qui dépasse tous les besoins.

Considérons une suite d'angles en progression par différences

égales ; si l'on représente $2 \sin \frac{1}{2} a$ par p, on aura cette série de sinus et de différences successives :

Sinus.	1res différences.	2mes différences.	3mes différences.	4mes différences.
$\sin x$				
	$p \cos (x + \frac{1}{2} a)$			
$\sin (x + a)$		$-p^2 \sin (x + a)$		
	$p \cos (x + \frac{3}{2} a)$		$-p^3 \cos (x + \frac{3}{2} a)$	
$\sin (x + 2a)$		$-p^2 \sin (x + 2a)$		$+p^4 \sin (x + 2a)$
	$p \cos (x + \frac{5}{2} a)$		$-p^3 \cos (x + \frac{5}{2} a)$	
$\sin (x + 3a)$		$-p^2 \sin (x + 3a)$		$+p^4 \sin (x + 3a)$
etc.	etc.	etc.	etc.	etc.

etc. . . . . (A).

Dans la colonne intitulée *premières différences*, se trouvent les différences entre chaque sinus et celui qui est immédiatement au-dessus : la colonne des *deuxièmes différences* est donnée par une première différence moins que celle qui est au-dessus : les *différences troisièmes* résultent de la même manière de deux différences secondes consécutives, et ainsi de suite.

Ayant donc un premier sinus, $\sin x$, par exemple, et seulement le premier terme de chacune des colonnes de différences, on peut prolonger toutes ces colonnes par des additions, et continuer aussi celle des sinus.

Il resulte de la loi de dérivation des différences successives, le tableau suivant :

$$\left.\begin{aligned}
\sin\,(x+a\,) &= +\sin x + p\cos(x+\tfrac{1}{2}a) \\
p\cos(x+\tfrac{3}{2}a) &= -p\cos(x+\tfrac{1}{2}a) - p^2\sin(x+1a) \\
-p^2\sin(x+2a) &= -p^2\sin(x+1a) - p^3\cos(x+\tfrac{3}{2}a) \\
-p^3\cos(x+\tfrac{5}{2}a) &= -p^3\cos(x+\tfrac{3}{2}a) + p^4\sin(x+2a)
\end{aligned}\right\}\ldots(\mathrm{B}).$$

etc.

Maintenant, pour abréger, posons

$$\left.\begin{aligned}
p\ \cos\,(x+\tfrac{1}{2}a) &= \Delta^1 \sin x \\
-\,p^2\ \sin\,(x+1a) &= \Delta^2 \sin x \\
-\,p^3\ \cos\,(x+\tfrac{3}{2}a) &= \Delta^3 \sin x \\
p^4\ \sin\,(x+2a) &= \Delta^4 \sin x
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots.(\mathrm{C}),$$

etc.

les notations Δ^1, Δ^2, Δ^3, etc. écrites en avant de $\sin x$, devant rappeler les différences successives relatives à $\sin x$, et les relations (B) deviendront

$$\left.\begin{aligned}
\sin\ (x+a\,) &= \ \ \sin x + \Delta^1 \sin x \\
p\ \cos\,(x+\tfrac{3}{2}a) &= \Delta^1 \sin x + \Delta^2 \sin x \\
-\,p^2\ \sin\,(x+2a) &= \Delta^2 \sin x + \Delta^3 \sin x \\
-\,p^3\ \cos\,(x+\tfrac{5}{2}a) &= \Delta^3 \sin x + \Delta^4 \sin x \\
p^4\ \sin\,(x+3a) &= \Delta^4 \sin x + \Delta^5 \sin x
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(\mathrm{D}).$$

etc.

Enfin, si l'on multiplie chaque membre des équations du tableau (D) par $-p^2$, et qu'en place des produits des premiers membres par ce facteur, on écrive leurs valeurs prises dans le tableau (C), on aura le suivant :

$$\left.\begin{array}{l} \Delta^2 \sin x = -p^2 (\sin x + \Delta^1 \sin x) \\ \Delta^3 \sin x = -p^2 (\Delta^1 \sin x + \Delta^2 \sin x) \\ \Delta^4 \sin x = -p^2 (\Delta^2 \sin x + \Delta^3 \sin x) \\ \Delta^5 \sin x = -p^2 (\Delta^3 \sin x + \Delta^4 \sin x) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (E),$$

etc.

auquel il faut joindre cette valeur de la différence première ;

$$\Delta^1 \sin x = \sin a \cos x - \tfrac{1}{2} p^2 \sin x.$$

Du tableau (E), on déduit cette formule générale,

$$\Delta^n \sin x = -p^2 (\Delta^{n-2} \sin x + \Delta^{n-1} \sin x) ;$$

et on remarque que, pour un autre sinus de départ, on est obligé de calculer de nouveau une suite de différences relatives à ce sinus : c'est ce qui a déterminé M. *Legendre* à rechercher une formule qui fasse dépendre les différences successives du sinus de tout arc, de celles des sinus de deux arcs fixes qui sont zéro et le quart de la circonférence. A cet effet, qu'on se reporte au tableau (C), et on aura, par le développement des premiers membres, celui qui suit :

$$\left.\begin{array}{l} \Delta^1 \sin x = +p \cos x \cos \tfrac{1}{2} a - p \sin x \sin \tfrac{1}{2} a \\ \Delta^2 \sin x = -p^2 \cos x \sin 1a - p^2 \sin x \cos 1a \\ \Delta^3 \sin x = -p^3 \cos x \cos \tfrac{3}{2} a + p^3 \sin x \sin \tfrac{3}{2} a \\ \Delta^4 \sin x = +p^4 \cos x \sin 2a + p^4 \sin x \cos 2a \\ \Delta^5 \sin x = +p^5 \cos x \cos \tfrac{5}{2} a - p^5 \sin x \sin \tfrac{5}{2} a \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (F).$$

etc.

Si l'on représente le quart de la circonférence par 1, et qu'on fasse les hypothèses

$$x = 0, \quad x = 1,$$

le tableau (F) donnera

$x = 0$	$x = 1$	
$\Delta^1 \sin 0 = + p \cos \frac{1}{2} a$	$\Delta^1 \sin 1 = - p \sin \frac{1}{2} a$	
$\Delta^2 \sin 0 = - p^2 \sin 1 a$	$\Delta^2 \sin 1 = - p^2 \cos 1 a$	
$\Delta^3 \sin 0 = - p^3 \cos \frac{3}{2} a$	$\Delta^3 \sin 1 = + p^3 \sin \frac{3}{2} a$	.....(G).
$\Delta^4 \sin 0 = + p^4 \sin 2a$	$\Delta^4 \sin 1 = + p^4 \cos 2a$	
$\Delta^5 \sin 0 = + p^5 \cos \frac{5}{2} a$	$\Delta^5 \sin 1 = - p^5 \sin \frac{5}{2} a$	
etc.	etc.	

Les valeurs des différences d'un même ordre qui se rapportent à sin o et à sin 1, dans le tableau précédent, étant les coefficiens de $\sin x$ et $\cos x$ dans les différences successives (F), on pourra en faire les substitutions qui donneront ces nouvelles expressions des différences consécutives de $\sin x$,

$$\Delta^1 \sin x = \cos x . \Delta^1 \sin 0 + \sin x . \Delta^1 \sin 1,$$
$$\Delta^2 \sin x = \cos x . \Delta^2 \sin 0 + \sin x . \Delta^2 \sin 1,$$
$$\Delta^3 \sin x = \cos x . \Delta^3 \sin 0 + \sin x . \Delta^3 \sin 1,$$
etc. ;

d'où résulte ce terme général des différences,

$$\Delta^n \sin x = \cos x . \Delta^n \sin 0 + \sin x . \Delta^n \sin 1,$$

qui est la formule annoncée.

Or, pour $x = 0$ et $a = 0{,}0001 = 1'$, on a

$$\Delta^1 \sin 0 = \sin 0{,}0001 ;$$

et pour $x = 1$, $a = 0{,}0001$, on a

$$\Delta^1 \sin 1 = -\frac{p^2}{2} = -2 \sin^2 \tfrac{1}{2} a = \cos a - 1 = \cos 0{,}0001 - 1.$$

Ces deux premières différences calculées, les autres en résultent d'après le tableau (E), en faisant dans les formules qu'il contient, $x=0$, puis $x=1$: il reste donc à multiplier par $\cos x$ la différence relative au $\sin 0$, et par $\sin x$ celle de même ordre, qui se rapporte à $\sin 1$, et à faire la somme de ces deux produits.

Les élémens à calculer sont donc

$$\Delta^1 \sin 0 = \sin 0{,}0001 = 0{,}000157079632033525565 2138, \text{etc.}$$

$$\Delta^1 \sin 1 = 1 - \cos 0{,}0001 = 0{,}000000001233700547599474750 2, \text{etc.}$$

$$p^2 = 2(1 - \cos 0{,}0001, \text{etc.}) = 0{,}000000002467401095198949 50, \text{etc.}$$

Si l'on évalue les différences successives de sin o, sin 1, c'est-à-dire,

Δ^1 avec 25 décimales,
Δ^2..... 26
Δ^3..... 28
Δ^4..... 29
Δ^5..... 30
Δ^6..... 32
Δ^7..... 33
Δ^8..... 34
Δ^9..... 35

puis le sinus et le cosinus d'un arc de départ, par exemple, de 0,01 du quart de circonférence avec 21 décimales exactes, et qu'on déduise de ces élémens, d'après la formule

$$\Delta^n \sin x = \cos x . \Delta^n \sin 0 + \sin x . \Delta^n \sin 1,$$

les différences $\Delta^1 \sin x$, $\Delta^2 \sin x$..... $\Delta^9 \sin x$, on aura par de simples additions et soustractions de ces différences, indiquées par le tableau (A), les sinus de 0,01 à 0,02, de dix en dix-millièmes avec 21 décimales exactes. Arrivé à 0,02, on en calculera le sinus et le cosinus, *à priori*, puis les neuf différences correspondantes, et on interpolera de la même manière les cent sinus de 0,02 à 0,03, et ainsi de suite.

Pour les tangentes, les différences ne se présentent pas sous une forme aussi commode ; mais comme ces lignes se déduisent facilement des sinus et cosinus, au moins dans la digression de 0 à 0,5, comme nous l'avons dit plus haut, il sera inutile de recourir à d'autres formules.

119. C'est par ces procédés, et d'autres qui leur sont analogues, mais qui ne peuvent trouver place ici, qu'ont été calculées dans les bureaux de l'ancien cadastre, les grandes tables des sinus et tangentes naturels avec 22 décimales exactes, ainsi que les logarithmes des nombres, travail dont j'ai consigné l'annonce dans le discours préliminaire qui accompagne celles de *Callet*. Dans le rapport fait à l'Institut, MM. *Lagrange*, *Laplace* et *Delambre* disent de ces tables, *qu'elles sont le monument de calcul le plus vaste et le plus imposant qui ait jamais été exécuté ou même conçu.* Un des grands avantages de l'emploi de ces méthodes, était de pouvoir mettre en œuvre à la fois un nombre indéfini de calculateurs, de la plupart desquels on ne pouvait attendre d'autres connaissances que celle de l'addition et de la soustraction. L'impression de ce grand travail a été suspendue par différentes raisons ; mais, ajoutent les géomètres chargés de ce rapport, « espérons que, dans des temps de paix et de bonheur, un gouvernement, ami des sciences et des arts, ordonnera l'achèvement d'un ouvrage qui doit être desiré de tous ceux qui cultivent les sciences mathématiques. » Un tel vœu émis par les premiers géomètres, est pour moi une raison de plus de me féliciter d'avoir coopéré à ce grand œuvre dont la publication serait pour tous les collaborateurs, l'indemnité la plus flatteuse et la plus réelle de leurs travaux. Nous recommanderons la lecture des discours qui se trouvent en tête des tables de *Callet* et de celles de *Borda*, revues, augmentées et publiées par M. *Delambre*, et particulièrement les chapitres VI et VII de *la Trigonométrie* de *Cagnoli*.

120. Si dans le développement de e^x, on fait successi-

vement

$$x = 2\sqrt{a} \quad \text{et} \quad x = -2\sqrt{a},$$

on trouvera

$$\frac{e^{2\sqrt{a}} - e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}} + e^{-2\sqrt{a}}}\sqrt{a} = 2a \times \frac{1 + \frac{4a}{2.3} + \frac{16a^2}{2.3.4.5} + \frac{64a^3}{2.3\ldots.7} + \text{etc.}}{1 + \frac{4a}{2} + \frac{16a^2}{2.3.4} + \frac{64a^3}{2.3\ldots.6} + \text{etc.}};$$

si l'on applique au développement en fraction continue du facteur de $2a$, la méthode donnée (chap. III), on aura

$$a = 1, \quad a' = 2a, \quad a'' = \frac{2a^2}{3}, \quad a''' = \frac{4a^3}{5.9};$$

$$b = 1, \quad b' = \frac{2}{3}a, \quad b'' = \frac{2a^2}{3.5}, \quad b''' = \frac{4a^3}{5.7.9};$$

$$c = \frac{4}{3}a, \quad d = \frac{4}{3.5}a, \quad e = \frac{16}{3.5.7}a^2, \quad \text{etc.};$$

ensorte que

$$\frac{e^{2\sqrt{a}} - e^{-2\sqrt{a}}}{e^{2\sqrt{a}} + e^{-2\sqrt{a}}}\sqrt{a} =$$

$$2a \times \cfrac{1}{\cfrac{1}{1} + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\frac{4}{3}a} + \cfrac{1}{\cfrac{\frac{4}{3}a}{\frac{4}{3.5}a} + \cfrac{1}{\cfrac{\frac{4}{3.5}a}{\frac{16}{3.5.7}a^2} + \cfrac{1}{\frac{16}{3.5.7}a^2 + \text{etc.}}}}}}$$

Qu'on fasse $4a = -x^2$, et le premier membre deviendra (111, form. 17)

$$\frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}} \times \frac{x\sqrt{-1}}{2} = \frac{-x \tang x}{2}:$$

on aura donc, après avoir changé les signes, divisé par x et

28..

multiplié par 2,

$$\tan x = \cfrac{x}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{-\frac{x^2}{3}} + \cfrac{1}{-\cfrac{\frac{x^2}{3}}{\cfrac{x^2}{-3.5}} + \cfrac{1}{-\cfrac{\frac{x^2}{3.5}}{\cfrac{x^4}{3.5.7}} + \cfrac{1}{\frac{x^4}{3.5.7}} + \text{etc.}}}}}$$

$$= \cfrac{x}{1 - \cfrac{x^2}{3 - \cfrac{x^2}{5 - \cfrac{x^2}{7 - \cfrac{x^2}{9 - \text{etc.}}}}}} \quad \ldots\ldots (28),$$

transformation à laquelle M. *Legendre* est parvenu par un procédé bien différent (Géom., note IV), et qui est le développement annoncé (chap. III).

121. Les formules (16)

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \qquad \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

en changeant x en $x\sqrt{-1}$, deviennent

$$\sin x\sqrt{-1} = \frac{e^{-x} - e^{+x}}{2\sqrt{-1}}, \qquad \cos x\sqrt{-1} = \frac{e^{-x} + e^{+x}}{2} \ldots (29);$$

ensorte que la propriété

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x,$$

qui suppose cette formule fondamentale

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

a lieu pour un arc imaginaire tel que $x\sqrt{-1}$: en effet, d'après les formules précédentes, on a

$$\sin(2x\sqrt{-1}) = \frac{e^{-2x} - e^{+2x}}{2\sqrt{-1}},$$

$$2\sin(x\sqrt{-1}) \times \cos(x\sqrt{-1}) = \frac{e^{-2x} - e^{+2x}}{2\sqrt{-1}};$$

on a donc aussi

$$\sin[(x+y)\sqrt{-1}] = \sin(x\sqrt{-1})\cos(y\sqrt{-1}) + \sin(y\sqrt{-1})\cos(x\sqrt{-1}),$$

extension du théorème connu à des arcs imaginaires.

Si on élève au carré les deux membres des formules (29), on trouvera, après les réductions,

$$[\sin(x\sqrt{-1})]^2 + [\cos(x\sqrt{-1})]^2 = 1.$$

122. Si dans la formule (12'), savoir,

$$x = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\left(\frac{1+\sqrt{-1}.\tan x}{1-\sqrt{-1}.\tan x}\right),$$

on fait $x = \frac{\pi}{2}$, π désignant toujours la demi-circonférence, on aura $\tan x = \infty$, et

$$\pi\sqrt{-1} = l\left(\frac{\sqrt{-1}}{-\sqrt{-1}}\right), \quad \text{d'où} \quad \pi = -\sqrt{-1}\, l(-1),$$

résultat singulier qui nous conduit naturellement à parler des logarithmes des nombres négatifs qui donnèrent lieu à une contestation entre *Leibnitz* et *Bernoulli*; mais sans rappeler ici cette discussion, nous démontrerons, d'après *Euler*, 1° *qu'un nombre quelconque positif a une infinité de logarithmes dont un seul est réel, et tous les autres imaginaires*; 2° *que les logarithmes des nombres négatifs, sont imaginaires.*

De la formule (15), on déduit, en prenant de part et

d'autre les logarithmes népériens,

$$x\sqrt{-1} = l(\cos x + \sin x.\sqrt{-1}):$$

à $x = 0$ correspond

$$0 = l.1,$$

ce qu'on sait déjà. Désignant par π la demi-circonférence, à $x = 2\pi$, $= 4\pi$, $= 6\pi$, etc. répondront

$$2\pi\sqrt{-1} = l.1,$$
$$4\pi\sqrt{-1} = l.1,$$
$$6\pi\sqrt{-1} = l.1,$$

et généralement,

$$2k\pi\sqrt{-1} = l.1,$$

k étant un nombre entier. Mais on a

$$l.\mathrm{A} = l.\mathrm{A} + l.1;$$

donc

$$l.\mathrm{A} = l.\mathrm{A} + 2k\pi\sqrt{-1},$$

d'où l'on conclut 1° *qu'un nombre quelconque* A *admet une infinité de logarithmes dont un seul est réel.*

Si dans la même formule

$$x\sqrt{-1} = l(\cos x + \sin x.\sqrt{-1}),$$

on suppose $x = \pi$, on aura

$$\cos x = -1 \quad \text{et} \quad \sin x = 0;$$

donc

$$l(-1) = \pi\sqrt{-1},$$

ce qui vérifie la propriété

$$\pi = -\sqrt{-1}\, l(-1),$$

trouvée plus haut.

Soient $x = 3\pi$, $= 5\pi$, $= 7\pi$...... $(2k+1)\pi$, k étant un nombre entier, on aura

$$3\pi\sqrt{-1} = l(-1),$$
$$5\pi\sqrt{-1} = l(-1),$$
$$7\pi\sqrt{-1} = l(-1),$$
etc.,

et généralement,

$$(2k+1)\pi\sqrt{-1} = l(-1).$$

Or, $-A = A \times -1$; donc $l.(-A) = l.A + l.(-1)$, et conséquemment,

$$l.(-A) = l.A + (2k+1)\pi\sqrt{-1},$$

d'où l'on conclut 2° que *les logarithmes des nombres négatifs sont imaginaires.*

Il est clair que ces conclusions s'étendent aux logarithmes tabulaires (Ire sect., chap. XVI).

123. Supposons que dans un triangle rectiligne dont deux côtés a et b sont connus avec l'angle compris C, on veuille la valeur en série de l'un des angles inconnus, de B, par exemple : on a la relation

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(B+C)}{\sin B},$$

et en développant $\sin(B+C)$,

$$a \sin B = b(\sin B \cos C + \sin C \cos B),$$

et par conséquent,

$$\frac{\sin B}{\cos B} = \frac{b \sin C}{a - b\cos C};$$

mais en vertu des propriétés

$$\sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}};$$

$$\cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}:$$

l'équation précédente deviendra

$$\frac{e^{B\sqrt{-1}} - e^{-B\sqrt{-1}}}{e^{B\sqrt{-1}} + e^{-B\sqrt{-1}}} = \frac{b(e^{C\sqrt{-1}} - e^{-C\sqrt{-1}})}{2a - b(e^{C\sqrt{-1}} + e^{-C\sqrt{-1}})}:$$

après la division des deux termes par $e^{-B\sqrt{-1}}$, le premier membre devient $\frac{e^{2B\sqrt{-1}}-1}{e^{2B\sqrt{-1}}+1}$, et conséquemment,

$$\frac{e^{2B\sqrt{-1}}-1}{e^{2B\sqrt{-1}}+1}=\frac{be^{C\sqrt{-1}}-be^{-C\sqrt{-1}}}{2a-be^{C\sqrt{-1}}-be^{-C\sqrt{-1}}}:$$

égalité qui se réduit à

$$e^{2B\sqrt{-1}}=\frac{a-be^{-C\sqrt{-1}}}{a-be^{+C\sqrt{-1}}}=\frac{N}{D},$$

d'où l'on déduit, en prenant les logarithmes népériens de part et d'autre,

$$2B\sqrt{-1}=l.N-l.D.$$

Développant le second membre d'après la formule connue, on aura

$$2B\sqrt{-1}=\frac{b}{a}e^{C\sqrt{-1}}+\frac{b^2}{2a^2}e^{2C\sqrt{-1}}+\frac{b^3}{3a^3}e^{3C\sqrt{-1}}+\text{etc.}$$
$$-\frac{b}{a}e^{-C\sqrt{-1}}-\frac{b^2}{2a^2}e^{-2C\sqrt{-1}}-\frac{b^3}{3a^3}e^{-3C\sqrt{-1}}-\text{etc.}$$

donc en divisant tout par $2\sqrt{-1}$, et réduisant au moyen de la formule

$$\frac{e^{mx\sqrt{-1}}-e^{-mx\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}=\sin mx,$$

la valeur de l'angle B en parties du rayon, sera donnée par

$$B=\frac{b}{a}\sin C+\frac{b^2}{2a^2}\sin 2C+\frac{b^3}{3a^3}\sin 3C+\text{etc.}$$

Cette série élégante à laquelle M. *Delambre* est parvenu le premier, est évidemment d'autant plus convergente, que b est plus petit par rapport à a.

CHAPITRE XX.

Extension du théorème démontré (chap. Ier) aux fonctions logarithmiques, exponentielles et circulaires.

124. On a prouvé (chap. Ier) que toute fonction algébrique de la quantité imaginaire $a \pm b\sqrt{-1}$ était réductible à la même forme $P \pm Q\sqrt{-1}$, P et Q étant des quantités réelles. Les fonctions logarithmiques, exponentielles et circulaires sont aussi réductibles à la même forme, lorsqu'elles renferment des quantités imaginaires.

Soit, en premier lieu, $l.(a + b\sqrt{-1})$: en faisant (chap. XII)

$$\sqrt{a^2 \pm b^2} = k, \quad \cos z = \frac{a}{k}, \quad \sin z = \frac{b}{k},$$

on a

$$a \pm b\sqrt{-1} = k(\cos z \pm \sin z . \sqrt{-1}),$$

et

$$l.(a \pm b - 1) = l.k + l.(\cos z \pm \sin z . \sqrt{-1});$$

mais la propriété

$$e^{\pm z\sqrt{-1}} = \cos z \pm \sin z . \sqrt{-1},$$

donne

$$\pm z\sqrt{-1} = l.(\cos z \pm \sin z . \sqrt{-1});$$

donc

$$l.(a \pm b\sqrt{-1}) = l.k \pm z . \sqrt{-1}.$$

Les données étant seulement z, $\cos z$ et $\sin z$, on pourra

prendre, au lieu de l'arc z, les arcs $2\pi + z$, $4\pi + z$, et $2n\pi + z$, n étant un nombre entier; ensorte qu'on aura pour $l(a \pm b\sqrt{-1})$, une infinité de valeurs comprises dans la même formule

$$l.k \pm (2n\pi + z)\sqrt{-1};$$

donc

$$P = l.k, \quad Q = (2n\pi + z).$$

Considérons, en second lieu, l'exponentielle $e^{a \pm b\sqrt{-1}}$: on a

$$e^{a \pm b\sqrt{-1}} = e^a \times e^{\pm b\sqrt{-1}} = e^a(\cos b \pm \sin b.\sqrt{-1});$$

donc

$$P = e^a \cos b, \quad Q = \pm e^a \sin b.$$

Soit, en troisième lieu, $(a \pm b\sqrt{-1})^{m \pm n\sqrt{-1}}$: on sait que

$$l.(a \pm b\sqrt{-1})^{m \pm n\sqrt{-1}} = (m \pm n\sqrt{-1})\, l.(a \pm b\sqrt{-1})$$
$$= l.e^{(m \pm n\sqrt{-1})\, l.(a \pm b\sqrt{-1})},$$

e désignant la base des logarithmes népériens; en passant des logarithmes aux nombres, il vient

$$(a \pm b\sqrt{-1})^{m \pm n\sqrt{-1}} = e^{(m \pm n\sqrt{-1})\, l.(a \pm b\sqrt{-1})}.$$

Si on substitue pour $l.(a \pm b\sqrt{-1})$ sa valeur $l.k \pm z\sqrt{-1}$ trouvée plus haut, il en résultera

$$(a \pm b\sqrt{-1})^{m \pm n\sqrt{-1}} = e^{(m \pm n\sqrt{-1})(l.k \pm z\sqrt{-1})}$$
$$= e^{ml.k - nz \pm (mz + nl.k)\sqrt{-1}} = e^{ml.k - nz} \times e^{\pm(mz + nl.k)\sqrt{-1}}$$
$$= e^{ml.k - nz}[\cos(mz + nl.k) \pm \sin(mz + nl.k)\sqrt{-1}],$$

résultat de la forme

$$P \pm Q\sqrt{-1}.$$

Soit enfin la fonction circulaire $\sin(a \pm b\sqrt{-1})$: on aura

$$\sin(a \pm b\sqrt{-1}) = \sin a \cos(b\sqrt{-1}) \pm \cos a \sin(b\sqrt{-1}).$$

Pour obtenir $\sin(b\sqrt{-1})$ et $\cos(b\sqrt{-1})$, on écrira $b\sqrt{-1}$

au lieu de x, dans les formules

$$\sin x = \frac{e^{+x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}, \quad \cos x = \frac{e^{+x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2},$$

et il résultera de ces substitutions,

$$\sin(b\sqrt{-1}) = \frac{e^{-b} - e^{b}}{2\sqrt{-1}}, \quad \cos(b\sqrt{-1}) = \frac{e^{-b} + e^{b}}{2};$$

d'après ces valeurs, on aura

$$\sin(a \pm b\sqrt{-1}) = \left(\frac{e^{b}+e^{-b}}{2}\right)\sin a \mp \left(\frac{e^{-b}-e^{b}}{2}\right)\cos a.\sqrt{-1}.$$

On trouverait aussi

$$\cos(a \pm b\sqrt{-1}) = \left(\frac{e^{b}+e^{-b}}{2}\right)\cos a \pm \left(\frac{e^{-b}-e^{b}}{2}\right)\sin a.\sqrt{-1}.$$

Les autres fonctions circulaires, telles que la tangente, la sécante, etc., s'expriment algébriquement au moyen du sinus et du cosinus : elles seront donc aussi réductibles à la même forme $P \pm Q\sqrt{-}$. On peut revoir ce qui a été dit [chap. Ier (4)].

CHAPITRE XXI.

Formules diverses.

125. **Supposons** $b < a$, et posons

$$\operatorname{tang} x = \sqrt{\frac{b}{a}}, \quad \sin z = \sqrt{\frac{b}{a}}, \quad \operatorname{séc} y = \frac{a}{b},$$

$$\operatorname{tang} u = \frac{b}{a}, \quad \sin t = \frac{b}{a},$$

b et a étant des nombres donnés ; on trouvera par les tables, les angles x, z, y, u et t, et on aura

$$(1^\circ)\ldots\log(a+b) = \log a\left(1+\frac{b}{a}\right) = \log a + \log\left(1+\frac{b}{a}\right)$$

$$= \log a + \log(1+\operatorname{tang}^2 x) = \log a + \log \operatorname{séc}^2 x$$

$$= \log a + 2\log \operatorname{séc} x;$$

$$(2^\circ)\ldots\log(a+b) = \log\left[2a\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\frac{b}{a}\right)\right] = \log[2a(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos y)]$$

$$= \log[2a\cos^2\tfrac{1}{2}y] = \log a + \log 2 + 2\log\cos\tfrac{1}{2}y,$$

en observant que, pour le rayon $=1$, on a [Trig. (*)]

$$\cos\tfrac{1}{2}y = \sqrt{[\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos y]}.$$

$$(3^\circ)\ldots\log(a+b) = \log.b\left(\frac{1+\frac{b}{a}}{\frac{b}{a}}\right) = \log.b\left(\frac{1+\cos y}{\cos y}\right)$$

$$= \log.b\left(\frac{\operatorname{tang} y}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}y}\right) = \log b + \log\operatorname{tang} y - \log\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}y,$$

(*) La Trigonométrie que je cite ici, est celle de mon Traité de Géométrie, qui se trouve chez Mme Ve Courcier.

en observant qu'on a (Trig.)

$$\text{tang}\ \tfrac{1}{2}\ y = \frac{\sin y}{1 + \cos y}.$$

Il sera très-facile, d'après ce que nous venons de dire, de parvenir aux formules suivantes,

$$(4^\circ.)\ldots \log (a-b) = \log a + 2 \log \cos z,$$
$$(5^\circ.)\ldots \log (a-b) = \log a + \log 2 + 2 \log \sin \tfrac{1}{2} y,$$
$$(6^\circ.)\ldots \log (a-b) = \log b + \log \text{tang}\ y + \log \text{tang}\ \tfrac{1}{2} y.$$

On aura

$$(7^\circ)\ldots \log [(a+b)(a-b)] = \log (a^2-b^2) = \log . a^2 \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right)$$
$$= \log . a^2 [1 - \cos^2 y) = 2 \log a + 2 \log \sin y;$$

$$(8^\circ)\ldots \log [(a+b)(a-b)] = \log (a^2-b^2) = \log . b^2 \left(\frac{a^2}{b^2} - 1\right)$$
$$= \log . b^2 (\text{séc}^2 y - 1) = 2 \log b + \log \text{tang}^2 y$$
$$= 2 \log b + 2 \log \text{tang}\ y;$$

$$(9^\circ.)\ldots \log \left(\frac{a-b}{a+b}\right) = \log \left(\frac{\frac{a}{b} - 1}{\frac{a}{b} + 1}\right) = \log \left(\frac{\frac{1}{\text{tang}\ u} - 1}{\frac{1}{\text{tang}\ u} + 1}\right)$$
$$= \log \left(\frac{1 - \text{tang}\ u}{1 + \text{tang}\ u}\right) = \log \text{tang} \left(\frac{\pi}{4} - u\right),$$

π désignant toujours la demi-circonférence (Trig.).

$$(10^\circ.)\ldots \log \left(\frac{a-b}{a+b}\right) = \log \left(\frac{1 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}}\right) = \log \left(\frac{1 - \frac{1}{\text{séc}\ y}}{1 + \frac{1}{\text{séc}\ y}}\right)$$
$$= \log \left(\frac{1 - \cos y}{1 + \cos y}\right) = \log \text{tang}^2 \tfrac{1}{2} y = 2 \log \text{tang} \tfrac{1}{2} y,$$

en observant qu'on a (Trig.)

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}y=\frac{\sin y}{1+\cos y},\qquad \cot\tfrac{1}{2}y=\frac{\sin y}{1-\cos y};$$

$$(11^\circ.)\ldots\log\sqrt{a^2-b^2}=\log.a\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\log.a\sqrt{1-\frac{1}{\operatorname{séc}^2 y}}$$
$$=\log.a\sqrt{1-\cos^2 y}=\log a+\log\sin y;$$

$$(12^\circ.)\ldots\log\sqrt{a^2-b^2}=\log.b\sqrt{\frac{a^2}{b^2}-1}=\log.b\sqrt{\operatorname{séc}^2 y-1}$$
$$=\log b+\log\operatorname{tang} y.$$

On découvrira facilement ces deux transformations :

$$(13^\circ.)\ldots\ \log\sqrt{a^2+b^2}=\log a+\log\operatorname{séc} u;$$
$$(14^\circ.)\ldots\ \log\sqrt{a^2+b^2}=\log b+\log\operatorname{coséc} u.$$

On aura

$$(15^\circ.)\ldots\ \log\sqrt{a+b}=\log.\sqrt{a}\times\sqrt{1+\frac{b}{a}}$$
$$=\log.\sqrt{a}\times\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 x}=\tfrac{1}{2}\log a+\log\operatorname{séc} x;$$

$$(16^\circ.)\ldots\ \log\sqrt{a+b}=\log.\sqrt{a}\times\sqrt{1+\frac{b}{a}}$$
$$=\log.\sqrt{a}\times\sqrt{1+\frac{1}{\operatorname{séc} y}}=\log.\sqrt{a}\times\sqrt{2}\sqrt{\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\cos y}$$
$$=\log.\sqrt{2a}\times\cos\tfrac{1}{2}y=\tfrac{1}{2}\log a+\tfrac{1}{2}\log 2+\log\cos\tfrac{1}{2}y.$$

On trouvera d'une manière analogue,

$$(17^\circ.)\ldots\ \log\sqrt{a-b}=\tfrac{1}{2}\log a+\log\cos z;$$
$$(18^\circ.)\ldots\ \log\sqrt{a-b}=\tfrac{1}{2}\log a+\tfrac{1}{2}\log 2+\log\sin\tfrac{1}{2}y.$$

On aura

$$(19^\circ.)\ldots\log(a+b)^{\frac{m}{n}}=\log.a^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{b}{a}\right)^{\frac{m}{n}}=\log.a^{\frac{m}{n}}(1+\sin t)^{\frac{m}{n}}$$

$$=\log.a^{\frac{m}{n}}(\cos t)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{1+\sin t}{(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos t)-(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos t)}\right)^{\frac{m}{n}}$$

$$=\log.a^{\frac{m}{n}}(\cos t)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{1+2\cos\frac{1}{2}t\sin\frac{1}{2}t}{\cos^2\frac{1}{2}t-\sin^2\frac{1}{2}t}\right)^{\frac{m}{n}}$$

$$=\log.a^{\frac{m}{n}}(\cos t)^{\frac{m}{n}}\left[\frac{(\cos\frac{1}{2}t+\sin\frac{1}{2}t)^2}{(\cos\frac{1}{2}t+\sin\frac{1}{2}t)(\cos\frac{1}{2}t-\sin\frac{1}{2}t)}\right]^{\frac{m}{n}}$$

$$=\log.a^{\frac{m}{n}}(\cos t)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{\cos\frac{1}{2}t+\sin\frac{1}{2}t}{\cos\frac{1}{2}t-\sin\frac{1}{2}t}\right)^{\frac{m}{n}}$$

$$=\log.a^{\frac{m}{n}}(\cos t)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{1+\frac{\sin\frac{1}{2}t}{\cos\frac{1}{2}t}}{1-\frac{\sin\frac{1}{2}t}{\cos\frac{1}{2}t}}\right)^{\frac{m}{n}}$$

$$=\log.a^{\frac{m}{n}}(\cos t)^{\frac{m}{n}}\left(\frac{1+\operatorname{tang}\frac{1}{2}t}{1-\operatorname{tang}\frac{1}{2}t}\right)^{\frac{m}{n}}$$

$$=\log.a^{\frac{m}{n}}(\cos t)^{\frac{m}{n}}\left[\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}t\right)\right]^{\frac{m}{n}}$$

$$=\frac{m}{n}\left[\log a+\log\cos t+\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}t\right)\right].$$

On découvre de la même manière la formule

$$(20^\circ.)\ldots\log(a-b)=\frac{m}{n}\left[\log a+\log\cos t+\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}t\right)\right].$$

Qu'on pose maintenant

$$\operatorname{tang}^{\frac{m}{n}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}t\right)=\operatorname{tang}v,$$

d'où

$$\frac{m}{n}\log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}-\tfrac{1}{2}t\right)=\log\operatorname{tang}v,$$

et on aura

$$=\log[(a+b)^{\frac{m}{n}}+(a-b)^{\frac{m}{n}}]=\log.(a-b)^{\frac{m}{n}}\left[1+\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{m}{n}}\right]$$

$$=\log.(a-b)^{\frac{m}{n}}\left[1+\left(\frac{1+\frac{b}{a}}{1-\frac{b}{a}}\right)^{\frac{m}{n}}\right]$$

$$=\frac{m}{n}(\log a+\log\cos t)+\log\operatorname{tang}v+\log\left[1+\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right)^{\frac{m}{n}}\right]$$

$$=\frac{m}{n}(\log a+\log\cos t)+\log\operatorname{tang}v+\log\left(\ +\frac{1}{\operatorname{tang}^2 v}\right),$$

en observant que

$$\frac{1+\sin t}{1-\sin t}=\frac{1}{\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}t\right)}\ (*),$$

(*) Si dans la formule $\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$, on fait $a=\frac{\pi}{4}$, on aura

$$\sin\left(\frac{\pi}{4}+b\right)=\sin\frac{\pi}{4}\cos b+\sin b\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\cos b+\sin b}{\sqrt{2}};$$

en élevant au carré, on trouve

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+b\right)=1+2\sin b\cos b=1+\sin 2b;$$

on a de même

$$2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-b\right)=1-\sin 2b=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+b\right);$$

donc

$$\frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+b\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+b\right)}=\frac{1+\sin 2b}{1-\sin 2b}=\operatorname{tang}^2\left(\frac{\pi}{4}+b\right)=\cot^2\left(\frac{\pi}{4}-b\right).$$

d'où résulte

$$\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right)^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{\tang^{\frac{2m}{n}}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}t\right)} = \frac{1}{\tang^2 v};$$

mais

$$\log\left(1+\frac{1}{\tang^2 v}\right) = \log\left(\frac{\text{séc}^2 v}{\tang^2 v}\right) = -\log\tang v + \log\left(\frac{\text{séc}^2 v}{\tang v}\right)$$

$$= -\log\tang v + \log.2\left(\frac{1}{2\cos v \sin v}\right)$$

$$= -\log\tang v + \log(2\,\text{cosséc}\,2v);$$

donc enfin,

$$(21°.)\ldots\ \log\left[(a+b)^{\frac{m}{n}} + (a-b)^{\frac{m}{n}}\right]$$

$$= \frac{m}{n}(\log a + \log\cos t) + \log 2 + \log\text{cosséc}\,v.$$

On trouvera de la même manière,

$$(22°.)\ldots\ \log\left[(a+b)^{\frac{m}{n}} - (a-b)^{\frac{m}{n}}\right]$$

$$= \frac{m}{n}(\log a + \log\cos t) + \log 2 + \log\cot 2v.$$

Ce chapitre a le double avantage d'exercer au calcul trigonométrique, et d'offrir, sous forme finie, les logarithmes de binomes élevés à des puissances fractionnaires, ce qui, dans plusieurs cas, favorise des réductions et donne lieu à des transformées précieuses en ce qu'elles se prêtent à des évaluations numériques qui deviendraient laborieuses sans leur secours.

CHAPITRE XXII.

Développemens des sinus, cosinus et tangentes des multiples d'un arc, et d'une puissance du sinus et du cosinus. Décomposition des séries du sinus et du cosinus d'un arc en facteurs binomes, d'où l'on déduit l'expression de la demi-circonférence donnée par Wallis. Formules trigonométriques nouvelles ou peu connues.

126. Si dans la première de ces deux formules

$$2\cos mx\cos x = \cos(m+1)x + \cos(m-1)x,$$
$$2\sin mx\cos x = \sin(m+1)x + \sin(m-1)x,$$

on suppose $m=0$, $=1$, $=2$, etc., et qu'on remplace, pour plus de simplicité, $\cos x$ par p, on aura

$$\left.\begin{array}{l} \cos 1x = p \\ \cos 2x = 2p^2 - 1 \\ \cos 3x = 4p^3 - 3p \\ \cos 4x = 8p^4 - 8p^2 + 1 \\ \cos 5x = 16p^5 - 20p^3 + 5p \end{array}\right\} \ldots\ldots(A),$$

et, en général,

$$2\cos mx = (2p)^m - m(2p)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2}(2p)^{m-4} - \frac{m(m-4)(m-5)}{1.2.3}(2p)^{m-6} + \text{etc.}$$

La seconde formule, sous les hypothèses $m=1$, $=2$, $=3$, etc., et en faisant toujours $\cos x = p$ et $\sin x = q$, donne

$$\left.\begin{aligned} \sin 1x &= q \\ \sin 2x &= 2pq \\ \sin 3x &= (4p^2 - 1)\, q \\ \sin 4x &= (8p^3 - 4p)\, q \\ \sin 5x &= (16p^4 - 12p^2 + 1)\, q \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\}\ldots(B),$$

et, en général,

$$\sin mx = q\left[(2p)^{m-1} - (m-2)(2p)^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{2}(2p)^{m-5} - \text{etc.}\right].$$

Ces séries procèdent suivant les puissances descendantes de p: on peut en avoir qui marchent suivant les puissances ascendantes de p et de q; mais alors il faut distinguer les cas de m nombre impair ou pair.

Soit, 1°. m impair; on aura, d'après (A),

$$\left.\begin{aligned} \cos 1x &= p \\ \cos 3x &= -(3p - 4p^3) \\ \cos 5x &= 5p - 20p^3 + 16p^5 \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\}\ldots(C),$$

et, en général,

$$\cos mx = \pm\left[mp - \frac{m(m^2-1)}{2.3}p^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4.5}p^5 - \text{etc}\right],$$

le signe supérieur ayant lieu dans le cas où m est de la forme $4n+1$, et l'inférieur dans celui où m est de la forme $4n+3$.

On aura de même, d'après (B), lorsque m est impair,

$$\left.\begin{aligned} \sin 1x &= q \\ \sin 3x &= -q(1 - 4p^2) \\ \sin 5x &= q(1 - 12p^2 + 16p^4) \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\}\ldots(D),$$

et, en général,

$$\sin mx = \pm q\left[1 - \frac{m^2-1}{2}p^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4}p^4 - \frac{(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{1.2.3.4.5.6}p^6 + \text{etc.}\right],$$

et l'on observera, à l'égard du double signe, la même règle que ci-dessus.

Soit, 2°. m pair; on aura, d'après (A),

$$\left.\begin{array}{l}\cos 2x = -(1-2p^2)\\ \cos 4x = 1 - 8p^2 + 8p^4\\ \cos 6x = -(1-18p^2+48p^4-32p^6)\\ \quad\text{etc.}\end{array}\right\}\ldots\text{(E)},$$

et, en général,

$$\cos mx = \pm\left[1 - \frac{m^2}{2}p^2 + \frac{m^2(m^2-4)}{2.3.4}p^4 - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{1.2.3.4.5.6}p^6 + \text{etc.}\right].$$

Ensuite, d'après (B),

$$\left.\begin{array}{l}\sin 2x = 2pq\\ \sin 4x = -q(4p-8p^3)\\ \sin 6x = q(6p-32p^3+32p^5)\\ \quad\text{etc.}\end{array}\right\}\ldots\text{(F)},$$

et, en général,

$$\sin mx = \mp q\left[mp - \frac{m(m^2-4)}{1.2.3}p^3 + \frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{1.2.3.4.5}p^5 - \text{etc.}\right].$$

A l'égard du double signe, il faut prendre les signes supérieurs, lorsque m est de la forme $4n$, et les inférieurs, lorsque m est de la forme $4n+2$.

En remplaçant p^2 par $1-q^2$, on déduira des égalités (C),

les suivantes,

$$\left.\begin{array}{l}\cos 1x = p\\ \cos 3x = p\,(1 - 4q^2)\\ \cos 5x = p\,(1 - 12q^2 + 16q^4)\\ \text{etc.}\end{array}\right\}\ldots\text{(G)},$$

et, en général,

$$\cos mx = p\left[1 - \frac{m^2-1}{2}q^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4}q^4 - \frac{(m^2-1)(m^2-9)(m^2-25)}{1.2.3.4.5.6}q^6 + \text{etc.}\right].$$

En remplaçant p^2 par $1 - q^2$ dans les formules (D), on trouve celles-ci,

$$\left.\begin{array}{l}\sin 1x = q\\ \sin 3x = 3q - 4q^3\\ \sin 5x = 5q - 20q^3 + 16q^5\\ \text{etc.}\end{array}\right\}\ldots\text{(H)},$$

et, en général,

$$\sin mx = mq - \frac{m(m^2-1)}{1.2.3}q^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{1.2.3.4.5}q^5 - \text{etc.}$$

Les formules (E) donnent, en remplaçant p^2 par $1 - q^2$,

$$\left.\begin{array}{l}\cos 2x = 1 - 2q^2\\ \cos 4x = 1 - 8q^2 + 8q^4\\ \cos 6x = 1 - 18q^2 + 48q^4 - 32q^6\\ \text{etc.}\end{array}\right\}\ldots\text{(I)},$$

et, en général,

$$\cos mx = 1 - \frac{m^2}{2}q^2 + \frac{m^2(m^2-4)}{1.2.3.4}q^4 - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{1.2.3.4.5.6}q^6 + \text{etc.}$$

Enfin, les formules (F) donnent, par la même substitution,

$$\left.\begin{array}{l} \sin 2x = 2pq \\ \sin 4x = p\,(4q - 8q^3) \\ \sin 6x = p\,(6q - 32q^3 + 32q^5) \\ \quad\text{etc.} \end{array}\right\}\ldots\text{(K)},$$

et, en général,

$$\sin mx = p\left[mq - \frac{m(m^2-4)}{1.2.3}q^3 + \frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{1.2.3.4.5}q^5 - \text{etc.}\right].$$

Ces formules sont extraites des leçons dixième et onzième du *Calcul des Fonctions*, par *Lagrange*.

Lagrange ajoute : Les formules (A) et (B), ou plutôt les formules générales qui les comprennent, ne s'arrêtent pas même lorsque m est un nombre entier positif ; car en faisant $m = 1$, la première donne

$$\cos x = p - \frac{1}{4p} - \frac{1}{16p^3} - \frac{2}{64p^5} - \text{etc.},$$

et la seconde donne

$$\sin x = q + \frac{q}{4p^2} + \frac{3q}{16p^4} + \text{etc.},$$

valeurs qui sont évidemment fausses. Il en sera de même en donnant à m d'autres valeurs quelconques entières et positives, et tenant compte de tous les termes qui ne sont pas nuls. Ceci tient à ce que par la nature des tables (A) et (B) dont ces formules ne sont que le terme général, on ne doit y employer que les termes qui contiennent des puissances positives de p. Mais, observe ce géomètre, comme les termes qui suivent ne sont pas nuls, on ne voit pas, *à priori*, pourquoi on doit les rejeter, et on voit moins encore ce qu'exprimerait la formule, en ne les rejetant pas. *Lagrange* donne le dénouement de ces difficultés, au moyen de la théorie des fonctions dérivées. Nous relaterons même les formules auxquelles ce grand géomètre parvient, en employant cette voie : elles sont,

$$(1^\circ.) \ldots 2\cos mx = (2p)^m - m(2p)^{m-2} + \frac{m(m-3)}{2}(2p)^{m-4}$$
$$- \frac{m(m-4)(m-5)}{2.3}(2p)^{m-6} + \text{etc.}$$
$$+ (2p)^{-m} + m(2p)^{-m-2} + \frac{m(m+3)}{2}(2p)^{-m-4}$$
$$+ \frac{m(m+4)(m+5)}{2.3}(2p)^{-m-6} + \text{etc.}$$

tel est le développement complet de $2\cos mx$ en puissances de $\cos x$, pour une valeur quelconque de m.

Si maintenant on fait ici $m = 1$, on aura

$$\cos x = p - \frac{1}{4p} - \frac{1}{16p^3} - \frac{2}{64p^5} - \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{4p} + \frac{1}{16p^3} + \frac{2}{64p^5} + \text{etc.},$$

où l'on voit que les deux séries se réduisent au premier terme p.

En donnant à m d'autres valeurs entières et positives quelconques, on trouvera toujours que la seconde série qui contient les puissances négatives de p, servira à détruire dans la première série tous les termes qui contiendront ces mêmes puissances; de sorte que leur résultat se réduira aux seuls termes de la première série, qui contiennent des puissances positives de p; ce qui revient à ne conserver dans cette série que les termes où p est élevé à une puissance positive ou nulle, comme on l'a trouvé plus haut.

Ainsi, pour $m = 2$, on trouve

$$\cos 2x = 2p^2 - 1 - \frac{1}{2(2p)^2} - \frac{1}{(2p)^4} - \text{etc.}$$
$$+ \frac{1}{2(2p)^2} + \frac{1}{(2p)^4} + \text{etc.},$$

série qui se réduit à $2p^2 - 1$. Mais lorsqu'on donne à m une

valeur fractionnaire quelconque, les deux séries ne se détruisent plus, et leur réunion est nécessaire pour représenter complettement $2 \cos mx$.

$$(2°.) \ldots \sin mx = \Big[(2p)^{m-1} - (m-2)(2p)^{m-3} + \frac{(m-3)(m-4)}{2}(2p)^{m-5} - \text{etc.} \Big] q - \Big[(2p)^{-m-1} + (m+2)(2p)^{-m-3} + \frac{(m+3)(m+4)}{2}(2p)^{-m-5} + \text{etc.} \Big] q.$$

Cette expression se réduit aussi à une forme finie, lorsque m est un nombre entier, par la destruction mutuelle des termes qui contiendraient des puissances négatives de p ; de sorte que m étant un nombre positif entier, il suffira de prendre dans la première série, les termes qui contiendront des puissances positives de p, ce qui s'accorde avec la formule de la table (B). Lorsque m est un nombre fractionnaire, les deux séries vont à l'infini, et jointes ensemble, elles donnent la vraie valeur de $\sin mx$, développée suivant les puissances descendantes de $\cos x$, comme cela a lieu pour la valeur de $\cos mx$.

J'ai cru, dit *Lagrange*, devoir entrer dans ces détails pour l'instruction des jeunes analystes, et surtout pour montrer que si l'analyse paraît quelquefois en défaut, c'est toujours faute de l'envisager d'une manière assez étendue, et de la traiter avec toute la généralité dont elle est susceptible.

Le même géomètre démontre encore ces deux formules dans l'hypothèse de l'angle droit pris pour l'unité des angles :

$$(3°.) \ldots \cos mx = \Big[1 - \frac{m^2}{2}p^2 + \frac{m^2(m^2-4)}{2.3.4}p^4 - \frac{m^2(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5.6}p^6 + \text{etc.} \Big] \cos m + \Big[mp - \frac{m(m^2-1)}{2.3}p^3 + \frac{m(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4.5}p^5 - \text{etc.} \Big] \cos(m-1)$$

pour le développement complet de cos mx en série ascendante de p ou cos x : on voit que lorsque m est un nombre entier, il y a toujours une des deux séries partielles qui se termine, tandis que l'autre, qui irait à l'infini, disparaît, parce qu'elle se trouve toute multipliée par un coefficient cos m ou cos $(m-1)$ qui devient nul. Mais lorsque m est une fraction quelconque, les deux séries vont à l'infini, et leur réunion est nécessaire pour avoir la valeur complète de cos mx, ce que personne, dit *Lagrange*, n'avait encore observé.

$$(4^{\circ}.)\ldots \sin mx = -\left[mp - \frac{m(m^2-4)}{2.3}p^3 + \frac{m(m^2-4)(m^2-16)}{2.3.4.5}p^5 - \text{etc.}\right] q \cos m$$
$$+\left[1 - \frac{m^2-1}{2}p^2 + \frac{(m^2-1)(m^2-9)}{2.3.4}p^4 - \text{etc.}\right] q \cos(m-1),$$

pour le développement complet de sin mx, quel que soit m.

127. Passons au développement de tang mx en série suivant les puissances de tang x : la formule

$$\text{tang}\, x = \frac{1}{\sqrt{-1}} \times \frac{e^{2x\sqrt{-1}}-1}{e^{2x\sqrt{-1}}+1},$$

trouvée (111), devient, en écrivant mx pour x,

$$\text{tang}\, mx = \frac{1}{\sqrt{-1}} \times \frac{e^{2mx\sqrt{-1}}-1}{e^{2mx\sqrt{-1}}+1}:$$

mais on a aussi (111)

$$e^{2x\sqrt{-1}} = \frac{1+\text{tang}\, x\sqrt{-1}}{1-\text{tang}\, x\sqrt{-1}},$$

et conséquemment,

$$e^{2mx\sqrt{-1}} = \frac{(1+\text{tang}\, x\sqrt{-1})^m}{(1-\text{tang}\, x\sqrt{-1})^m}.$$

Substituant cette valeur dans tang mx, et faisant tang $x = t$,

on aura

$$\tang mx = \frac{(1+t\sqrt{-1})^m-(1-t\sqrt{-1})^m}{(1+t\sqrt{-1})^m+(1-t\sqrt{-1})^m}\times\frac{1}{\sqrt{-1}};$$

faisant les opérations et ordonnant, on trouvera le développement de $\tang^m x$ que nous ne rapporterons pas ici.

128. Nous démontrerons deux formules qui donnent la puissance m du cosinus et du sinus d'un arc en cosinus et sinus des multiples de cet arc.

Soient, à cet effet,

$$\cos x + \sin x\sqrt{-1} = u,\quad \cos x - \sin x\sqrt{-1} = v,$$

d'où

$$\cos x = \tfrac{1}{2}(u+v) \qquad \text{et} \qquad 2^m \cos^m x = (u+v)^m.$$

Je développe $(u+v)^m$ de deux manières ; la première en ordonnant par rapport aux puissances u^m, u^{m-1}, u^{m-2}, etc., et la seconde en ordonnant par rapport aux puissances v^m, v^{m-1}, v^{m-2}, etc. ; j'additionne les deux expressions, et j'ai ce résultat,

$$u^m + v^m + \frac{m}{1}(u^{m-1}v + v^{m-1}u) + \frac{m(m-1)}{1.2}(u^{m-2}v^2 + v^{m-2}u^2)$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(u^{m-3}v^3 + v^{m-3}u^3) + \text{etc.}$$

qui peut se changer en

$$u^m + v^m + \frac{m}{1}(u^{m-2}+v^{m-2})uv + \frac{m(m-1)}{1.2}(u^{m-4}+v^{m-4})u^2v^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}(u^{m-6}+v^{m-6})u^3v^3 + \text{etc.}$$

Cette expression donnant deux fois la valeur $(u+v)^m$, ou de $2^m\cos^m x$, si on en prend la moitié, et qu'on observe que

$$uv = (\cos x + \sin x\sqrt{-1})(\cos x - \sin x\sqrt{-1}) = 1,$$

il viendra

$$2^m \cos^m . x = \tfrac{1}{2}(u^m + v^m) + \tfrac{1}{2}.\frac{m}{1}(u^{m-2} + v^{m-2})$$
$$+ \frac{1}{2}.\frac{m(m-1)}{1.2}(u^{m-4} + v^{m-4}) + \text{etc.}:$$

mais on sait que

$$u^m = \cos mx + \sin mx.\sqrt{-1},$$
$$u^{m-2} = \cos(m-2)x + \sin(m-2)x.\sqrt{-1},$$
etc.

$$v^m = \cos mx + \sin mx.\sqrt{-1},$$
$$v^{m-2} = \cos(m-2)x - \sin(m-2)x.\sqrt{-1},$$
etc.;

donc

$u^m + v^m = 2\cos mx$, $u^{m-2} + v^{m-2} = 2\cos(m-2)x$, etc.;

ce qui change la formule précédente en celle-ci,

$$2^m \cos^m x = \cos mx + \frac{m}{1}\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{1.2}\cos(m-4)x$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\cos(m-6)x + \text{etc.}$$

Cette série est toujours terminée lorsque m est un nombre entier positif, et il faut observer, 1°. que lorsqu'on est parvenu aux angles négatifs, on trouve la réplique des cosinus des angles positifs de même valeur; 2°. que tous les termes de la série, à l'exception de celui du milieu, sont répétés deux fois: 3°. que ce terme du milieu existe lorsque m est pair; et comme le cosinus qui l'affecte, appartient à l'angle $(m-m)x$ dont le cosinus est l'unité, la valeur de $2^m \cos^m x$ contiendra, dans ce cas, un terme non affecté de cosinus.

Si dans la formule précédente on fait

$$x = \tfrac{1}{2}\pi - y,$$

il en résultera la valeur de $2^m \sin^m y$ qu'on calculera avec la même facilité, en ayant égard au changement de signes que comporte cette substitution. Ces formules et l'analyse qui les a fournies, ont été données par M. *Prony* (troisième cahier du *Journal de l'École Polytechnique*). *Lagrange*, dans le *Calcul des Fonctions*, les obtient par le moyen des fonctions dérivées.

On peut trouver deux formules en quelque sorte réciproques des deux dernières. A cet effet, on partira de ces identités

$$\cos mx + \sin mx.\sqrt{-1} = (\cos x + \sin x.\sqrt{-1})^m,$$
$$\cos mx - \sin mx.\sqrt{-1} = (\cos x - \sin x.\sqrt{-1})^m,$$

lesquelles combinées par addition et soustraction, donnent

$$\cos mx = \frac{(\cos x+\sin x.\sqrt{-1})^m + (\cos x - \sin x.\sqrt{-1})^m}{2},$$

$$\sin mx = \frac{(\cos x+\sin x.\sqrt{-1})^m - (\cos x - \sin x.\sqrt{-1})^m}{2\sqrt{-1}}.$$

Développant les puissances $m^{ièmes}$ dans les seconds membres, les imaginaires disparaissent, et l'on a ces expressions en séries,

$$\cos mx = \cos^m x - \frac{m(m-1)}{2}\cos^{m-2}x \sin^2 x$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4}\cos^{m-4}x \sin^4 x \text{ etc.}$$

$$\sin mx = m\cos^{m-1}x \sin x$$
$$- \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\cos^{m-3}x.\sin^3 x, \text{ etc.}$$

129. Reprenons les deux développemens connus

$$\sin x = x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \text{etc.},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.}:$$

les valeurs de x qui rendent nuls $\sin x$ et $\cos x$, seront

les racines des seconds membres qui auront pour facteurs x moins chacune de ces valeurs. Or, pour la première série, ces valeurs sont

$$x = \pm k\pi,$$

π étant toujours la demi-circonférence dont le rayon est 1, et k un nombre entier positif quelconque; et pour la seconde, ces valeurs sont

$$x = \pm \frac{2k-1}{2}\pi.$$

En effet,

$$\sin(\pm k\pi) = 0,$$

et

$$\cos\left(\pm \frac{2k-1}{2}\pi\right) = \cos\left(k\pi - \frac{1}{2}\pi\right) = 0.$$

On est donc certain que les facteurs binomes de

$$x - \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^5}{2.3.4.5} - \text{etc.},$$

sont de la forme $1 \pm \frac{x}{k\pi}$, en donnant à k toutes les valeurs entières et positives, et que les facteurs de

$$1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{etc.},$$

sont ceux que l'on peut former en donnant à k les mêmes valeurs dans la formule

$$1 \mp \frac{2x}{(2k-1)\pi}\ (*).$$

(*) On observera que le développement de $\sin x$, étant

$$x\left[1 - \frac{x^2}{2.3} + \frac{x^4}{2.3.4.5} - \ldots\ldots\ldots \pm \frac{x^\infty}{2.3.\ldots.\infty}\right],$$

et que le facteur x ne devenant pas nul par $x = \pm k\pi$, ces racines seront celles du second facteur égalé à zéro : or si l'on compare l'équation

$$\frac{x^\infty}{2.3.\ldots.\infty}\ldots\ldots + \frac{x^4}{2.3.4.5} - \frac{x^2}{2.3} + 1 = 0,$$

Aucun de ces facteurs binomes ne peut se trouver affecté d'un exposant négatif, puisque l'égalité à zéro de ce facteur, donnerait $\sin x$ ou $\cos x$ infini, lorsqu'il doit être nul. On ne peut supposer que cet exposant soit une fraction positive ; car à cause de la multiplicité des racines, on conclurait qu'à un même arc, doivent répondre plusieurs sinus ou plusieurs cosinus. Enfin, aucun des facteurs de l'une ou de l'autre série, ne peut être sous un exposant entier et positif différent de l'unité. On peut remarquer, en effet, que le second membre de la seconde série, est, au signe près, la fonction dérivée du second membre de la première. Si donc un des facteurs binomes de la première série, se trouvait élevé à une puissance entière et positive p, plus grande que l'unité, on en conclurait, d'après la théorie des racines égales (I[re] sect., chap. XX), que ce même facteur devrait se trouver dans l'autre à la

---

avec celle-ci

$$Ax^m + Bx^{m-1} + \ldots\ldots + V = 0,$$

pour laquelle on a trouvé (I[re] sect., chap. XXIII) cette décomposition

$$V\left(\frac{x}{p}-1\right)\left(\frac{x}{q}-1\right)\left(\frac{x}{r}-1\right), \text{ etc.} = 0,$$

p, q, r, etc. étant les racines de la proposée, on aura $V = 0$, , $p = \pi$, $q = -\pi$, $r = 2\pi$, $s = -2\pi$, etc., et conséquemment,

$$\frac{x^\infty}{2.3\ldots.\infty}\ldots\ldots - \frac{x^2}{2.3} + 1 = \left(\frac{x}{\pi}-1\right)\left(-\frac{x}{\pi}-1\right)\left(\frac{x}{2\pi}-1\right)$$
$$\left(-\frac{x}{2\pi}-1\right), \text{ etc.}$$
$$= \left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)$$
$$\left(1+\frac{x}{2\pi}\right), \text{ etc.};$$

donc

$$\sin x = x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right), \text{ etc.};$$

de même,

$$\cos x = \left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\left(1-\frac{2x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{3\pi}\right), \text{ etc.}$$

puissance $p - 1$; d'où résulterait cette conséquence absurde, qu'une même valeur de x rendrait nuls à la fois $\sin x$ et $\cos x$, conséquence détruite par cette propriété connue

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

D'après ces considérations qui résultent encore de ce qui a été dit dans la note, on aura

$$\sin x = x\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{16\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

$$\cos x = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4\pi^2}{25\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{49\pi^2}\right)\ldots\ldots$$

Si dans ces deux formules on fait $x = \frac{m\pi}{2n}$, elles deviendront

$$\sin\frac{m}{2n}\pi = \frac{m\pi}{2n}\left(1 - \frac{m^2}{4n^2}\right)\left(1 - \frac{m^2}{16n^2}\right)\left(1 - \frac{m^2}{36n^2}\right)\left(1 - \frac{m^2}{64n^2}\right), \text{ etc.}$$

$$\cos\frac{m}{2n}\pi = \left(1 - \frac{m^2}{n^2}\right)\left(1 - \frac{m^2}{9n^2}\right)\left(1 - \frac{m^2}{25n^2}\right)\left(1 - \frac{m^2}{49n^2}\right), \text{ etc.}$$

en y faisant, au contraire, $x = \frac{(n - m)\pi}{2n}$, et remarquant

1°. que

$$\sin\frac{(n - m)\pi}{2n} = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{m}{2n}\pi\right) = \cos\frac{m\pi}{2n};$$

2°. que

$$\cos\frac{(n - m)\pi}{2n} = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - \frac{m}{2n}\pi\right) = \sin\frac{m\pi}{2n}:$$

il viendra, en transposant les formules,

$$\sin\frac{m}{2n}\pi = \left(1 - \frac{(n-m)^2}{n^2}\right)\left(1 - \frac{(n-m)^2}{9n^2}\right)\left(1 - \frac{(n-m)^2}{25n^2}\right), \text{ etc.};$$

$$\cos\frac{m}{2n}\pi = \frac{(n-m)\pi}{2n}\left(1 - \frac{(n-m)^2}{4n^2}\right)\left(1 - \frac{(n-m)^2}{16n^2}\right)$$

$$\left(1 - \frac{(n-m)^2}{36n^2}\right), \text{ etc.}$$

Décomposant dans les deux premières formules, les facteurs

du second degré en facteurs du premier, et réduisant de plus, dans chaque facteur, l'entier et la fraction en une seule fraction, il viendra

$$\sin\frac{m}{2n}\pi=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{m}{n}\cdot\frac{2n-m}{2n}\cdot\frac{2n+m}{2n}\cdot\frac{4n-m}{4n}\cdot\frac{4n+m}{4n}\cdot\frac{6n-m}{6n}\cdot\frac{6n+m}{6n}\cdot\text{etc.},$$

$$\cos\frac{m}{2n}\pi=\frac{n-m}{n}\cdot\frac{n+m}{n}\cdot\frac{3n-m}{3n}\cdot\frac{3n+m}{3n}\cdot\frac{5n-m}{5n}\cdot\frac{5n+m}{5n}\cdot\frac{7n-m}{7n}\cdot\frac{7n+m}{7n}\cdot\text{etc.},$$

séries dont les facteurs tendent vers l'unité, et sont alternativement plus grands et plus petits que cette limite commune.

En faisant subir les mêmes transformations aux deux derniers développemens, ils deviendront

$$\sin\frac{m}{2n}\pi=\frac{m}{n}\cdot\frac{2n-m}{n}\cdot\frac{2n+m}{3n}\cdot\frac{4n-m}{3n}\cdot\frac{4n+m}{5n}\cdot\frac{6n-m}{5n}\cdot\frac{6n+m}{7n}\cdot\text{etc.}$$

$$\cos\frac{m}{2n}\pi=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{n-m}{n}\cdot\frac{n+m}{2n}\cdot\frac{3n-m}{2n}\cdot\frac{3n+m}{4n}\cdot\frac{5n-m}{4n}\cdot\frac{5n+m}{6n}\cdot\text{etc.}$$

Divisant alors l'une par l'autre les deux expressions, soit de $\sin\frac{m}{2n}\pi$, soit de $\cos\frac{m}{2n}$, il viendra également

$$\pi=2.\frac{2}{1}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{10}{9}\cdot\frac{10}{11}\cdot\text{etc.},$$

expression de la demi-circonférence donnée pour la première fois par *Wallis*, dans son *Arithmetica infinitorum*.

Voyez sur les conséquences à tirer de ces formules, les

chapitres IX, X et XI du premier volume de l'*Introduction à l'Analyse infinitésimale* d'*Euler*, ouvrage dont on ne saurait trop recommander la lecture à ceux qui veulent connaître toute la fécondité de l'analyse.

130. Les formules trigonométriques que nous allons démontrer, sont nouvelles ou peu connues.

Soit $\varphi(n)$ une fonction quelconque d'un nombre n essentiellement entier et positif : notons par $\mathrm{P}[\varphi(g\ldots\ldots h)]$, le produit de toutes les valeurs que reçoit la fonction $\varphi(n)$, lorsqu'on y met successivement pour n les nombres naturels consécutifs g, $g+1$, $g+2\ldots\ldots h$. : ainsi

$$\mathrm{P}[\varphi(g\ldots h)]=\varphi(g)\times\varphi(g+1)\times\varphi(g+2)\ldots\times\varphi(h).$$

Cette notation admise, le théorème de *Côtes* (chap. XI) donne

$$x^{4m}-2a^{2m}x^{2m}\cos\varphi+a^{4m}$$
$$=\mathrm{P}\left[x^2\pm 2ax\cos\frac{2(0\ldots m-1)\pi+\varphi}{2m}+a^2\right](*)\,;$$

(*) Si l'on remonte à la décomposition démontrée (chap. XI), du trinome

$$x^{2m}-2x^m\cos\varphi+1,$$

en facteurs du second degré, dans le cas particulier de $m=6$, on trouvera

$$x^{12}-2x^6\cos\varphi+1=$$
$$\left(x^2-2x\cos\frac{\varphi}{6}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{\varphi+2\pi}{6}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{\varphi+4\pi}{6}+1\right)$$
$$\left(x^2-2x\cos\frac{\varphi+6\pi}{6}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{\varphi+8\pi}{6}-1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{\varphi+10\pi}{6}+1\right),$$

et l'on remarquera que les facteurs trinomes inférieurs, répètent les supérieurs, sauf le signe du terme du milieu, ensorte qu'on a

$$x^2-2x\cos\frac{\varphi+6\pi}{6}+1=x^2+2x\cos\frac{\varphi}{6}+1,$$
$$x^2-2x\cos\frac{\varphi+8\pi}{6}+1=x^2+2x\cos\frac{\varphi+2\pi}{6}+1,$$
$$x^2-2x\cos\frac{\varphi+10\pi}{6}+1=x^2+2x\cos\frac{\varphi+4\pi}{6}+1,$$

remarque facile à généraliser et sur laquelle repose la décomposition énoncée.

P désignant le produit continuel du facteur entre parenthèses, en prenant les multiples de π depuis zéro jusqu'à $2(m-1)$, ce qui est indiqué par $2(0\ldots m-1)$. Si l'on suppose $a=x$, cette formule devient

$$2x^{4m}(1-\cos\varphi)=\mathrm{P}\left\{2x^2\left[1\pm\cos\frac{2(0\ldots.m-1)\pi+\varphi}{2m}\right]\right\}.$$

Si l'on fait sortir de dessous le signe P, le facteur $2x^2$ qui deviendra, en dehors, $2^{2m}x^{4m}$, en observant que le nombre des facteurs du second degré, est $2m$, et si l'on observe que $1-\cos\varphi=2\sin^2\frac{1}{2}\varphi$, on aura, après la division par $4x^{4m}$,

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi=2^{2m-2}.\mathrm{P}\left[1\pm\cos\frac{2(0\ldots.m-1)\pi+\varphi}{2m}\right],$$

c'est-à-dire,

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi=2^{2m-2}.\mathrm{P}\left[1+\cos\frac{2(0\ldots.m-1)\pi+\varphi}{2m}\right]$$
$$\times\mathrm{P}\left[1-\cos\frac{(0\ldots..m-1)\pi+\varphi}{2m}\right],$$

ou

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\varphi=2^{2m-2}.\mathrm{P}\left[1-\cos^2\frac{2,(0\ldots m-1)\pi+\varphi}{2m}\right]$$
$$=2^{2m-2}.\mathrm{P}\left[\sin^2\frac{2.(0\ldots.m-1)\pi+\varphi}{2m}\right],$$

et, en extrayant la racine carrée,

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi=2^{m-1}.\mathrm{P}\left[\sin\frac{2(0\ldots.m-1)\pi+\varphi}{2m}\right].$$

Posant $\varphi=2\varphi'$, il viendra

$$\sin\varphi'=2^{m-1}.\mathrm{P}\left[\sin\frac{(0\ldots.m-1)\pi+\varphi'}{m}\right]:$$

si l'on développe le second membre de cette équation, et qu'on supprime l'accent de φ', on trouvera

$$\sin\varphi = 2^{m-1}.\sin\frac{\varphi}{m}.\sin\frac{\pi+\varphi}{m}.\sin\frac{2\pi+\varphi}{m}\ldots\sin\frac{(m-2)\pi+\varphi}{m}$$
$$.\sin\frac{(m-1)\pi+\varphi}{m}\ldots\ldots\ldots\ldots(1).$$

Mais comme, en général,

$$\sin\frac{(m-n)\pi+\varphi}{m} = \sin\frac{n\pi-\varphi}{m},$$

on pourra encore donner au développement précédent la forme suivante,

$$\sin\varphi = 2^{m-1}.\sin\frac{\varphi}{m}.\sin\frac{\pi+\varphi}{m}.\sin\frac{2\pi+\varphi}{m}\ldots\ldots\sin\frac{2\pi-\varphi}{m}$$
$$.\sin\frac{\pi-\varphi}{m}\ldots.(2).$$

Si dans le développement (1), on fait $\varphi=\frac{1}{2}\pi$, et dans le développement (2), $\varphi=\frac{1}{4}\pi$, on aura

$$1 = 2^{m-1}.\sin\frac{1}{m}.\frac{\pi}{2}.\sin\frac{3}{m}.\frac{\pi}{2}\ldots\ldots\sin\frac{2m-3}{m}.\frac{\pi}{2}$$
$$.\sin\frac{2m-1}{m}.\frac{\pi}{2}\ldots\ldots(3),$$

$$\sqrt{2} = 2^{m}.\sin\frac{1}{2m}.\frac{\pi}{2}.\sin\frac{3}{2m}.\frac{\pi}{2}\ldots.\sin\frac{2m-3}{2m}.\frac{\pi}{2}$$
$$.\sin\frac{2m-1}{2m}.\frac{\pi}{2}\ldots\ldots(4).$$

Si, pour plus de brièveté, on concentre les développemens (3) et (4), en multipliant par 2 les deux membres de l'identité (3), on aura

$$2 = 2^{m}.\mathrm{P}\left[\sin\frac{2(1,\ldots m)-1}{2m}.\pi\right]\ldots\ldots.(5),$$

$$\sqrt{2} = 2^{m}.\mathrm{P}\left[\sin\frac{2(1\ldots.m)-1}{2m}.\frac{\pi}{2}\right]\ldots\ldots.(6),$$

et du rapprochement de ces deux formules, on conclut qu'on obtient la racine carrée de 2, en changeant dans la première, π en $\frac{\pi}{2}$;

Si l'on carre la formule (6), et qu'on égale le résultat à (5), on trouvera, après les réductions,

$$2^m . \mathrm{P}\left[\sin^2\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}.\frac{\pi}{2}\right]=\mathrm{P}\left[\sin\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}.\frac{\pi}{2}\right],$$

ou, en se rappelant que $\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi$,

$$2^m . \mathrm{P}\left[\sin^2\frac{2(1\ldots\ldots m)-1}{2m}.\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\mathrm{P}\left[2\sin\frac{2(1\ldots\ldots m)-1}{2m}.\frac{\pi}{2}\cos\frac{2(1\ldots\ldots m)-1}{2m}.\frac{\pi}{2}\right];$$

mais en observant que 2 est m fois facteur sous le signe P dans le second membre, on pourra diviser par 2^m, ce qui donnera

$$\mathrm{P}\left[\sin^2\frac{2(1\ldots\ldots m)-1}{2m}.\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\mathrm{P}\left[\sin\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}.\frac{\pi}{2}\right)\times\mathrm{P}\left[\cos\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}.\frac{\pi}{2}\right],$$

ou encore,

$$\mathrm{P}\left[\sin\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}.\frac{\pi}{2}\right]\times\mathrm{P}\left[\sin\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}.\frac{\pi}{2}\right]$$

$$=\mathrm{P}\left[\sin\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}.\frac{\pi}{2}\right]\times\mathrm{P}\left[\cos\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}.\frac{\pi}{2}\right],$$

et après la division par $\mathrm{P}\left[\sin\frac{2(1\ldots\ldots m)-1}{2m}.\frac{\pi}{2}\right]$; il vient

$$\mathrm{P}\left[\sin\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}.\frac{\pi}{2}\right]=\mathrm{P}\left[\cos\frac{2(1\ldots m)-1}{2m}.\frac{\pi}{2}\right]\ldots\ldots(7);$$

d'où il suit que

$$\mathrm{P}\left[\mathrm{tang}\frac{2(1\ldots\ldots m)-1}{2m}.\frac{\pi}{2}\right]=1.$$

Posant

$$\frac{\pi}{4m}=\omega,\quad \text{d'où}\quad m=\frac{\pi}{4\omega},\quad 2m-1=\frac{\pi-2\omega}{2\omega};$$

substituant dans (7) et développant, on aura

$$\sin\omega.\sin 3\omega.\sin 5\omega\ldots.\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi-\omega\right)$$

$$=\cos\omega.\cos 3\omega.\cos 5\omega\ldots.\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi-\omega\right)\ldots\ldots(8).$$

Si l'on divise le premier membre de (8) par le second, et *vice versâ*, on aura

$$\tang \omega . \tang 3\omega \ldots . \tang (\tfrac{1}{2}\pi - \omega)$$
$$= \cot \omega . \cot 3\omega . \cot 5\omega \ldots . \cot (\tfrac{1}{2}\pi - \omega) = 1.$$

L'équation (4) revient à la suivante,

$$1 = 2^{\frac{2m-1}{2}} \sin \frac{\pi}{4m} . \sin \frac{3\pi}{4m} . \sin \frac{5\pi}{4m} \ldots . \sin \frac{(2m-1)\pi}{4m}:$$

si l'on remplace m par $\frac{\pi}{4\omega}$, et qu'on ait égard à l'équation (8), la précédente deviendra

$$\frac{1}{2^{\frac{\pi-2\omega}{4\omega}}} = \sin \omega . \sin 3\omega \ldots \sin (\tfrac{1}{2}\pi - \omega) = \cos \omega . \cos 3\omega \ldots \cos (\tfrac{1}{2}\pi - \omega).$$

L'équation (1) divisée par $\sin \frac{\varphi}{m}$, donne

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \frac{\varphi}{m}} = 2^{m-1} \sin \frac{\pi + \varphi}{m} . \sin \frac{2\pi + \varphi}{m} \ldots . \sin \frac{(m-1)\pi + \varphi}{m}.$$

Faisant dans cette équation $\varphi = 0$, et remarquant qu'alors on doit avoir $\frac{\sin \varphi}{\sin \frac{\varphi}{m}} = m$, d'après les développemens en séries de $\sin \varphi$ et $\sin \frac{\varphi}{m}$, on aura, après la division par 2^{m-1},

$$\frac{m}{2^{m-1}} = \sin \frac{\pi}{m} . \sin \frac{2\pi}{m} . \sin \frac{3\pi}{m} \ldots . \sin \frac{(m-1)\pi}{m}.$$

Posant $\frac{\pi}{m} = \omega$, d'où $m = \frac{\pi}{\omega}$, il viendra

$$\frac{\pi}{\omega . 2^{\frac{\pi}{\omega} - 1}} = \sin \omega . \sin 2\omega . \sin 3\omega \ldots . \sin (\pi - \omega) \ldots \ldots (9).$$

Or m étant un nombre entier, $\frac{\pi}{\omega}$ doit être un tel nombre;

c'est-à-dire que ω doit être un soumultiple de π : si de plus, m est un soumultiple de $\frac{\pi}{2}$, m sera un nombre pair de fois dans π, et conséquemment $\frac{\pi}{\omega}$ sera un nombre pair, et $\frac{\pi}{\omega}-1$ un nombre impair : mais $\frac{\pi}{\omega}-1$ est le nombre des facteurs de la série (9), ce que montre clairement la série précédente d'où on a tiré celle-ci : et le facteur moyen ou équidistant des facteurs extrêmes $\sin\omega$ et $\sin\left(\frac{\pi}{\omega}-1\right)\omega$, est $\sin\frac{\pi}{2}=1$: de plus, les $\frac{\pi}{2\omega}-1$ facteurs situés à la droite de celui-là, sont respectivement égaux aux $\frac{\pi}{2\omega}-1$ facteurs situés à sa gauche, puisque la somme des arcs également distans des extrêmes, est égale à π. Donc en extrayant la racine carrée des deux membres de (9), il viendra

$$\sqrt{\frac{\pi}{\omega . 2^{\frac{\pi}{\omega}-1}}} \begin{cases} = \sin\omega . \sin 2\omega . \sin 3\omega \ldots\ldots \sin\left(\frac{1}{2}\pi-\omega\right) \\ = \cos\omega . \cos 2\omega . \cos 3\omega \ldots\ldots \cos\left(\frac{1}{2}\pi-\omega\right); \end{cases}$$

d'où l'on tire encore

$$1 \begin{cases} = \operatorname{tang}\omega . \operatorname{tang} 2\omega . \operatorname{tang} 3\omega \ldots\ldots \operatorname{tang}\left(\frac{1}{2}\pi-\omega\right) \\ = \cot\omega . \cot 2\omega . \cot 3\omega \ldots\ldots \cot\left(\frac{1}{2}\pi-\omega\right). \end{cases}$$

Lorsque m est impair, d'où il résulte que $m-1$ est pair, ainsi que le nombre des facteurs de la série (9), alors $\frac{\pi}{\omega}$ est aussi un nombre impair, et ω n'est pas un soumultiple de $\frac{1}{2}\pi$: dans ce cas, le second membre de l'équation (9) aura un nombre pair de facteurs, et sa première moitié dont le dernier facteur sera $\sin\frac{1}{2}(\pi-\omega)$, sera égale à la seconde dont le premier facteur sera $\sin\frac{1}{2}(\pi+\omega)$; extrayant donc la racine carrée des deux membres, il viendra

$$\sqrt{\frac{\pi}{\omega . 2^{\frac{\pi}{\omega}-1}}} = \sin\omega . \sin 2\omega . \sin 3\omega \ldots\ldots \sin\tfrac{1}{2}(\pi-\omega).$$

Ces recherches sont dues à M. *Dubourguet* qui les a consignées dans le 1[er] numéro du III[e] volume des *Annales*.

131. Nous donnerons, en dernier lieu, la démonstration de cette série curieuse qui est encore due à *Euler* :

$$\tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{1}\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \tfrac{1}{4}\sin 4x + \text{etc.}$$

On sait que

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{etc.},$$

$$l\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{3x^3} - \text{etc.},$$

l désignant un logarithme népérien : conséquemment,

$$l(1+x) - l\left(1+\frac{1}{x}\right) = l\left(\frac{1+x}{1+\frac{1}{x}}\right) = l\left[\frac{x(1+x)}{1+x}\right] = lx$$

$$= \left(x - \frac{1}{x}\right) - \tfrac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) + \tfrac{1}{3}\left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right), \text{ etc.}$$

$$= (x - x^{-1}) - \tfrac{1}{2}(x^2 - x^{-2}) + \tfrac{1}{3}(x^3 - x^{-3}), \text{ etc.}$$

Soit $x = e^{z\sqrt{-1}}$, d'où $lx = z\sqrt{-1}$, on a

$$z\sqrt{-1} = (e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}) - \tfrac{1}{2}(e^{2z\sqrt{-1}} - e^{-2z\sqrt{-1}})$$
$$+ \tfrac{1}{3}(e^{3z\sqrt{-1}} - e^{-3z\sqrt{-1}}) - \text{etc.} :$$

divisant par $2\sqrt{-1}$, on trouve

$$\tfrac{1}{2}z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{e^{2z\sqrt{-1}} - e^{-2z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right) + \text{etc.} :$$

mais on sait que

$$\frac{e^{nz\sqrt{-1}} - e^{-nz\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin nz ;$$

donc, en changeant z en x,

$$\tfrac{1}{2}x = \tfrac{1}{1}\sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \tfrac{1}{4}\sin 4x + \text{etc.}$$

CHAPITRE XXIII.

Sommation des puissances des termes d'une progression par équidifférences, des nombres figurés; de leurs inverses, et des produits de la forme 1.2.3...p, 1.2.3...(p + 1), *etc. Des sommes des produits différens qu'on peut former avec tous les termes d'une progression par équidifférences, pris* 2 *à* 2, 3 *à* 3, 4 *à* 4, *etc., et résolution des équations dont les racines forment une telle suite.*

132. SOIT la progression arithmétique a, b, c, d....k, u; ensorte qu'il s'agisse de trouver la somme

$$a^m + b^m + c^m + d^m + \text{etc.}, \; k^m + u^m,$$

m étant un nombre entier et positif : par la nature de la progression, on a

$$\begin{aligned} b &= a + \delta \\ c &= b + \delta \\ d &= c + \delta \\ &\cdots\cdots\cdots \\ u &= k + \delta \end{aligned}$$

δ étant la différence constante ; d'où on déduit les égalités suivantes :

$$b^m = a^m + ma^{m-1}\delta + \frac{m(m-1)}{2}a^{m-2}\delta^2 + \text{etc.},$$

$$c^m = b^m + mb^{m-1}\delta + \frac{m(m-1)}{2}b^{m-2}\delta^2 + \text{etc.},$$

$$d^m = c^m + mc^{m-1}\delta + \frac{m(m-1)}{2}c^{m-2}\delta^2 + \text{etc.},$$

....

....

$$u^m = k^m + mk^{m-1}\delta + \frac{m(m-1)}{2}k^{m-2}\delta^2 + \text{etc.}$$

Ajoutant ces égalités membre à membre, et effaçant les termes communs, on aura, en transposant a^m dans le premier membre,

$$u^m - a^m = m\delta\,(a^{m-1} + b^{m-1} + c^{m-1} + \text{etc.}\ldots + k^{m-1})$$
$$+ \frac{m(m-1)}{2}\delta^2(a^{m-2} + b^{m-2} + c^{m-2} + \text{etc.}\ldots + k^{m-2})$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\delta^3(a^{m-3} + b^{m-3} + c^{m-3} + \text{etc.}\ldots + k^{m-3})$$
$$+ \text{etc.}$$

Supposons maintenant, pour plus de simplicité, que les sommes des puissances successives de chacun des termes de la progression ci-dessus, soient représentées par $S_1, S_2, S_3 \ldots S_{m-1}, S_m$; l'équation précédente deviendra, au moyen de ces abréviations,

$$u^m - a^m = m\delta\,(S_{m-1} - u^{m-1}) + \frac{m(m-1)}{2}\delta^2(S_{m-2} - u^{m-2})$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\delta^3(S_{m-3} - u^{m-3}) + \text{etc.}\ldots (1).$$

Cette équation nous fait connaître la relation entre les sommes des différentes puissances des termes d'une progression arithmétique, et par conséquent elle donnera S_{m-1}, lorsque les sommes $S_1, S_2, S_3 \ldots S_{m-2}$ seront connues.

Nous observerons, à l'égard de cette méthode, qu'on est obligé pour calculer chaque somme, de connaître les sommes précédentes. La méthode suivante, due à *Thomas Simpson*, est exempte de cet inconvénient.

On a pu observer sur la formule (1), que S_{m-1} dépend de u^m et des puissances u^{m-1}, $u^{m-2}\ldots\ldots u^0$; et qu'ainsi, après avoir remplacé u par sa valeur $a+(n-1)\delta$, la somme des puissances $m-1$ des termes de la progression ordonnée par rapport aux puissances de n, sera de la forme

$$A'n^m + B'n^{m-1} + \ldots\ldots + P'n,$$

les coefficiens indéterminés A′, B′.....P′ étant indépendans de n : on poûrra donc supposer, par analogie,

$$\begin{aligned} S_m &= a^m + (a+\delta)^m + (a+2\delta)^m + \ldots\ldots + [a+(n-1)\delta]^m \\ &= An^{m+1} + Bn^m + Cn^{m-1} + \ldots\ldots + Pn\ldots\ldots(2), \end{aligned}$$

A, B, C.....P étant pareillement des coefficiens indépendans de n, qu'il s'agit de déterminer. Si l'on suppose la progression augmentée du terme $a+n\delta$, le nombre n deviendra $n+1$, et l'identité (2) se changera dans celle-ci,

$$\begin{aligned} &a^m + (a+\delta)^m + (a+2\delta)^m + \ldots + [a+(n-1)\delta]^m + (a+n\delta)^m \\ &= A(n+1)^{m+1} + B(n+1)^m + C(n+1)^{m-1}\ldots + P(n+1)\ldots(3): \end{aligned}$$

retranchant (2) de (3), on trouvera

$$\begin{aligned} (a+n\delta)^m = {} & A[(n+1)^{m+1} - n^{m+1}] + B[(n+1)^m - n^m] \\ & + C[(n+1)^{m-1} - n^{m-1}]\ldots\ldots + P. \end{aligned}$$

Si l'on fait les développemens indiqués, qu'on ordonne de part et d'autre suivant n, et qu'on égale les coefficiens des mêmes puissances de n, on parviendra aux égalités

$$\frac{m+1}{1}A = \delta^m,$$

$$\frac{(m+1)m}{1.2}A + \frac{m}{1}B = \frac{m}{1}a\delta^{m-1},$$

$$\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3}A + \frac{m(m-1)}{1.2}B + \frac{m-1}{1}C = \frac{m(m-1)}{1.2}a^2\delta^{m-2},$$

$$\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1.2.3.4}\mathrm{A}+\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\mathrm{B}+\frac{(m-1)(m-2)}{1.2}\mathrm{C}$$

$$+\frac{m-2}{1}\mathrm{D}=\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}a^3\delta^{m-3},$$

etc.,

desquelles on déduit

$$\mathrm{A}=\frac{\delta^m}{m+1},$$

$$\mathrm{B}=a\delta^{m-1}-\frac{m+1}{2}\mathrm{A},$$

$$\mathrm{C}=\frac{m}{2}a^2\delta^{m-2}-\frac{m}{2}\mathrm{B}-\frac{(m+1)m}{1.2.3}\mathrm{A},$$

$$\mathrm{D}=\frac{m(m-1)}{1.2.3}a^3\delta^{m-3}-\frac{m-1}{2}\mathrm{C}-\frac{m(m-1)}{1.2.3}\mathrm{B}-\frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3.4}\mathrm{A},$$

etc.

Si dans ces formules on fait successivement $m=0$, $=1$, $=2$, $=3$, etc., et qu'on substitue les valeurs correspondantes de A, B, C, etc. dans (2), on trouvera

$$\mathrm{S}_0=n,$$

$$\mathrm{S}_1=\frac{\delta}{2}n^2+\frac{2a-\delta}{2}n,$$

$$\mathrm{S}_2=\frac{\delta^2}{3}n^3+\delta\frac{2a-\delta}{2}n^2+\frac{6a^2-6a\delta+\delta^2}{6}n,$$

$$\mathrm{S}_3=\frac{\delta^3}{4}n^4+\delta^2\frac{2a-\delta}{2}n^3+\delta\frac{6a^2-6a\delta+\delta^2}{4}n^2$$
$$+\frac{2a^3-3a^2\delta+a\delta^2}{2}n,$$

$$\mathrm{S}_4=\frac{\delta^4}{5}n^5+\delta^3\frac{2a-\delta}{2}n^4+\delta^2\frac{6a^2-6a\delta+\delta^2}{3}n^3$$
$$+\delta\frac{2a^3-3a^2\delta+a\delta^2}{1}n^2+\frac{30a^4-60a^3\delta+30a^2\delta^2-\delta^3}{30}n,$$

$\mathrm{S}_5=$ etc.

S'il s'agissait de la suite des nombres naturels 1, 2, 3, 4.......n, on aurait $a = \delta = 1$, et les sommes ci-dessus deviendraient

$$\left.\begin{aligned}
S_0 &= n \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{n}{1} \\
S_1 &= \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{2}n \ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{n(n+1)}{1.2} \\
S_2 &= \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}n^2 + \tfrac{1}{6}n \ldots\ldots = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3} \\
S_3 &= \tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}n^2 \ldots\ldots = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \\
S_4 &= \tfrac{1}{5}n^5 + \tfrac{1}{2}n^4 + \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{30}n = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{2.3.4.5} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\} (4).$$

Ces formules, en y faisant $n = 12$, donnent 650 pour la somme des douze premiers carrés, 6084 pour celle des douze premiers cubes, et 60710 pour celle des quatrièmes puissances des douze premiers nombres 1, 2.....12, etc.

Dans l'hypothèse de $a = 1$,

$$S_1 = \frac{n}{2}\left[2 + (n-1)\delta\right] = n + \frac{n}{2}(n-1)\delta:$$

maintenant on aura

$$\begin{aligned}
\text{pour } \delta &= 1 \ldots S_1 = \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots (1^\circ), \\
\delta &= 2 \ldots S_1 = n^2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2^\circ), \\
\delta &= 3 \ldots S_1 = n + \tfrac{3}{2}(n^2 - n) = \frac{3n^2 - n}{2} \ldots (3^\circ), \\
\delta &= 4 \ldots S_1 = n + 2(n^2 - n) = 2n^2 - n \ldots (4^\circ), \\
\delta &= 5 \ldots S_1 = n + \tfrac{5}{2}(n^2 - n) = \frac{5n^2 - 3n}{2} \ldots (5^\circ), \\
&\text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Si dans (1°.) on fait successivement $n = 1, = 2, = 3, = 4$, etc.,

on aura cette suite de sommes,

$$1, \quad 3, \quad 6, \quad 10, \quad 15, \quad \text{etc.}$$

Ces nombres ont été nommés *triangulaires* ou *trigonaux*, parce qu'il est possible de disposer en triangle équilatéral, un nombre de points, égal à celui des unités que chacun d'eux renferme.

La formule (2°.) donne, par les mêmes substitutions, la suite

$$1, \quad 4, \quad 9, \quad 16, \quad 25, \quad \text{etc.}$$

Ces nombres ont été nommés *quadrangulaires*, parce qu'il est possible de disposer en carré un nombre de points, égal à celui des unités qu'ils renferment. Chaque terme de cette dernière suite résulte de l'addition d'un certain nombre de termes de la suite des nombres impairs, à partir de l'unité inclusivement.

La formule (3°.) donne la suite des nombres

$$1, \quad 5, \quad 12, \quad 22, \quad 35, \quad \text{etc.},$$

qu'on nomme *pentagones*, à cause d'une propriété analogue.

Les nombres

$$1, \quad 6, \quad 15, \quad 28, \quad 45, \quad 66, \quad \text{etc.},$$

donnés par (4°), sont nommés *hexagones*.

La formule (2) obtenue ci-dessus, sert à trouver la somme d'un nombre quelconque de termes d'une suite dont le terme général est exprimé par des puissances entières et positives du nombre des termes. Supposons, en effet, que le terme général d'une suite soit an^p, p étant un nombre entier et positif, a un coefficient connu, n le nombre des termes, qui devient en même temps le terme général d'une progression arithmétique : la suite sera

$$a1^p + a2^p + a3^p + a4^p + \ldots\ldots + an^p,$$

puisque chaque terme doit se déduire du terme général, en y faisant successivement $n = 1$, $= 2$, $= 4$, etc. : on aura donc pour somme

$$a[1^p + 2^p + 3^p + 4^p + \ldots + n^p] = aS_p;$$

mais on peut, au moyen de la formule citée ou des formules (4), évaluer S_p : on aura donc résolu la question.

Si le terme général était $an^p + bn^q$, chaque terme de la suite à laquelle il appartiendrait, se composerait de la somme des termes de même rang que les deux suites qui auraient chacune pour terme général an^p et bn^q : or la somme des termes de la première suite est aS_p, et celle des termes de la seconde est bS_q; donc la somme des termes de la série proposée est $aS_p + bS_q$.

On voit, en général, que si le terme général d'une série, est

$$an^p + bn^q + cn^r + \text{etc.},$$

la somme des termes de cette série, sera

$$aS_p + bS_q + CS_r + \text{etc.}$$

Soit pour exemple, la suite des nombres naturels

$$1, 2, 3, 4, 5 \ldots\ldots n:$$

le terme général étant $= n$, la somme de tous les termes sera $= S_1$; mais ici $a = \delta = 1$, et la formule (1°) donne

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Soit la suite

$$1, 3, 6, 10 \ldots\ldots \frac{n(n+1)}{2};$$

puisqu'on a pour expression du terme général,

$$\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2},$$

la somme sera

$$\frac{S_2}{2}+\frac{S_1}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{2n^3+6n^2+4n}{1.2.3}\right)=\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}.$$

Soit, pour dernier exemple, la suite des nombres pyramidaux

$$1, 4, 10, 20 \ldots\ldots \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3},$$

dont le terme général est

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}=\frac{1}{6}n^3+\frac{3}{6}n^2+\frac{2}{6}n,$$

on trouvera pour la somme d'un nombre n de ces termes,

$$\frac{S_3}{6}+\frac{3S_2}{2}+\frac{2S_1}{6}=\frac{n^4+6n^3+11n^2+6n}{1.2.3.4}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4};$$

On voit donc que la somme d'un nombre n de termes de chacune de ces suites, est le terme général de celle qui suit; ensorte que les termes de celle-ci sont les sommes successives d'autant de termes de la série précédente, qu'il y a d'unités dans l'indice du *terme sommatoire*. Les nombres ainsi formés se nomment *nombres figurés*.

Les nombres naturels sont appelés *nombres figurés du premier ordre* : les nombres triangulaires, ou les sommes des nombres naturels, sont dits, *nombres figurés du second ordre* : les sommes des nombres triangulaires, c'est-à-dire, les nombres pyramidaux, sont *les nombres figurés du troisième ordre* : les sommes des nombres pyramidaux forment les *nombres figurés du quatrième ordre*, et ainsi de suite.

133. Si on renverse les expressions des nombres figurés, on aura les inverses de ces nombres. Ainsi l'expression générale des inverses des nombres triangulaires, sera $\frac{2}{n(n+1)}$; celle

des inverses des nombres pyramidaux, sera $\frac{1.2.3}{n(n+1)(n+2)}$.

Cherchons les sommes des inverses des nombres figurés.

Désignons par S'' la somme des inverses des n premiers nombres triangulaires : on a

$$\frac{1}{1.2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{2.3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{3.4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4},$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}:$$

ces égalités ont pour somme $1 - \frac{1}{n+1}$, et conséquemment

$$S'' = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right),$$

somme qui tend vers 2 à mesure que n augmente.

Soit S''' la somme des inverses des n premiers nombres pyramidaux ou des nombres figurés du quatrième ordre, qui sont

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{10}, \frac{1}{20} \ldots\ldots:$$

on a

$$\frac{1}{1.2.3} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}\right],$$

$$\frac{1}{2.3.4} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4}\right],$$

$$\frac{1}{3.4.5}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}\right],$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{(n-1)\,n\,(n+1)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(n-1)\,n}-\frac{1}{n\,(n+1)}\right],$$

$$\frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)}=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n\,(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right];$$

donc

$$S''=3\left[\frac{1}{1.2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right],$$

somme qui tend vers $\frac{3}{1.2}$, à mesure que n augmente.

On trouve de même que la somme S^{IV} des inverses des n premiers nombres figurés du quatrième ordre, est

$$S^{\text{IV}}=\frac{1.2.3.4}{3}\left[\frac{1}{1.2.3}-\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right]:$$

la somme $S^{(m)}$ des n premiers nombres figurés du $m^{ième}$ ordre, est

$$\frac{1.2.3\ldots m}{(m-1)}\left[\frac{1}{1.2.3\ldots(m-1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1)}\right],$$

somme qui a pour limite $\frac{m}{m-1}$.

Voyez sur ce point de théorie, un mémoire de M. *Gergonne*, dans le n° IV du tome IV des *Annales de Mathématiques*.

134. Les formules suivantes nous seront utiles dans le dernier chapitre de cet ouvrage. Soient

$$\left.\begin{aligned}
S_1&=1+2+3+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+m\\
S_2&=1.2+2.3+3.4+\ldots\ldots\ldots\ldots+m\,(m+1)\\
S_3&=1.2.3+2.3.4+3.4.5+\ldots+m(m+1)(m+2)\\
&\;\vdots\\
S_p&=1.2.3\ldots p+2.3.4\ldots(p+1)+3.4.5\ldots(p+2)+\ldots\\
&\quad\ldots+m(m+1)(m+2)\ldots\ldots(p+m-1)
\end{aligned}\right\}\ldots(1):$$

il s'agit de prouver qu'on doit avoir

$$\left.\begin{array}{l} S_1 = \frac{1}{2} m\,(m+1) \\ S_2 = \frac{1}{3} m\,(m+1)\,(m+2) \\ S_3 = \frac{1}{4} m\,(m+1)\,(m+2)\,(m+3) \\ \vdots \\ S_p = \frac{1}{p+1} m(m+1)(m+2)(m+3)\ldots(m+p-1)(m+p) \end{array}\right\}\ldots(2).$$

A cet effet, supposons que cette loi ait été vérifiée pour les $m-1$ premiers termes de la dernière suite, de manière qu'on ait

$$1.2.3\ldots.p + 2.3.4\ldots.(p+1) + 3.4.5\ldots.(p+2) + \ldots$$
$$\ldots. + (m-1)\,m\,(m+1)\ldots\ldots(m+p-2)$$
$$= \frac{1}{p+1}(m-1)m(m+1)(m+2)\ldots.(m+p-2)(m+p-1)\,;$$

on aura alors

$$S_p = \frac{1}{p+1}(m-1)\,m\,(m+1)\,(m+2)\ldots..(m+p-1)$$
$$+ m\,(m+1)\,(m+2)\ldots\ldots.(m+p-1)\,;$$

c'est-à-dire,

$$S_p = \frac{1}{p+1} m\,(m+1)\,(m+2)\ldots.(m+p-1)\,[(m-1)+(p+1)]$$
$$= \frac{1}{p+1} m\,(m+1)\,(m+2)\ldots.(m+p-1)\,(m+p).$$

Il est donc prouvé que la formule serait vraie pour les m premiers termes de la suite, si elle l'était pour les $m-1$ premiers ; or, il est aisé de se convaincre qu'elle est vraie pour les deux premiers ; car on a

$$1.2.3\ldots.p + 2.3.4\ldots.(p+1) = 2.3.4\ldots.p\,(1+p+1)$$
$$= \frac{1}{p+1}.2.3.4\ldots.p\,(p+1)\,(p+2)\,,$$

ce qui répond à $m = 2$. Ainsi l'expression de S_p est exacte, et il en est de même de celles de S_1, S_2, S_3.... qui n'en sont que des cas particuliers.

En égalant entr'eux les seconds membres des identités (1) et (2), on trouve

$$m + (m-1) + (m-2) + \ldots .. 3 + 2 + 1 = \frac{m}{1}\frac{(m+1)}{2}$$

$$\frac{m+1}{1}\cdot\frac{m}{2} + \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2} + \frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\ldots .. + 6 + 3 + 1$$
$$= \frac{m+2}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m}{3},$$

$$\frac{m+2}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m}{3} + \frac{m+1}{1}\cdot\frac{m}{2}\cdot\frac{m-1}{3}\ldots\ldots + 10 + 4 + 1$$
$$= \frac{m+3}{1}\cdot\frac{m+2}{2}\cdot\frac{m+1}{3}\cdot\frac{m}{4},$$

etc.

135. Cherchons actuellement les sommes des produits différens qu'on peut former avec tous les termes d'une série par équidifférences, pris deux à deux, trois à trois, quatre à quatre, etc.

Soit la suite de termes

$$a+h,\ a+2h,\ a+3h,\ a+4h\ldots .. a+(m-1)h:$$

si on forme une équation dont les racines soient

$$-(a+h),\ -(a+2h),\ -(a+3h),\ \text{etc}\ldots\ -[a+(m-1)h],$$

et qu'on en désigne les coefficiens successifs par A', A'', A'''.... $A^{(m-1)}$, on aura l'identité

$$x^{m-1} + A'x^{m-2} + A''x^{m-3} + \ldots + A^{(m-1)}$$
$$= (x+a+h)(x+a+2h)(x+a+3h)\ldots[x+a+(m-1)h]\ldots(1),$$

dans laquelle A', A''.... $A^{(m-1)}$ seront les produits qu'il s'agit

d'évaluer. L'identité précédente, en y écrivant $x+h$ pour x, deviendra

$$(x+h)^{m-1}+A'(x+h)^{m-2}+A''(x+h)^{m-3}+\ldots.$$
$$=(x+a+2h)(x+a+3h)\ldots..(x+a+mh)\ldots.(2):$$

qu'on multiplie (1) par $x+a+mh$, et (2) par $x+a+h$, et on aura ces produits identiques

$$(x+a+mh)[x^{m-1}+A'x^{m-2}+A''x^{m-3}+\ldots.+A^{(m-1)}]$$
$$=(x+a+h)[(x+h)^{m-1}+A'(x+h)^{m-2}$$
$$+A''(x+h)^{m-3}\ldots.+A^{(m-1)}],$$

qu'on peut écrire sous la forme

$$\left.\begin{array}{l} x^m+A' \\ \quad +a \\ \quad +mh \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} x^{m-1}+A'' \\ \quad +A'a \\ \quad +A'mh \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} x^{m-2}+A''' \\ \quad +A''a \\ \quad +A''mh \end{array}\right| x^{m-3} \quad +\ldots\ldots.$$

$$\left.\begin{array}{l} \ldots.+A^{(m-1)} \\ \quad +A^{(m-2)}a \\ \quad +A^{(m-2)}mh \end{array}\right| x+A^{(m-1)}(a+mh)$$

$$=\left.\begin{array}{l} x^m+mh \\ \quad +A' \\ \quad +a \end{array}\right| \left.\begin{array}{l} x^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}h^2 \\ \quad +[(m-1)(A'+a)]h \\ \quad +A''+A'a \end{array}\right| x^{m-2}$$

$$\left.\begin{array}{l} +\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}h^3 \\ +\frac{(m-1)(m-2)}{2}(A'+a)h^2 \\ +(m-2)(A''+A'a)h \\ +A'''+A''a \end{array}\right| \begin{array}{l} x^{m-3}\ldots+h^m \\ \quad +(A'+a)h^{m-1} \\ \quad +(A''+aA')h^{m-2} \\ \quad +(A'''+aA'')h^{m-3} \\ \quad +\text{etc.}: \end{array}$$

comparant les coefficiens des mêmes puissances de x, on

obtient les équations

$$A' + a + mh = A' + a + mh,$$

$$A'' + A'a + A'mh = \frac{m(m-1)}{1.2} h^2 + (m-1) A'h + (m-1) ah + A'' + A'a,$$

$$A''' + A''a + A''mh = \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} h^3 + (A' + a) \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} h^2 + (A'' + A'a)(m-2) h + A''' + A''a,$$

etc.,

dont la première ne fait rien connaître : on déduit des suivantes,

$$A' = (m-1)\ a + \frac{m(m-1)}{1.2} h,$$

$$2A'' = (m-2) A'a + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} (A' + a) h + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} h^2,$$

$$3A''' = (m-3) A''a + \frac{(m-2)(m-3)}{1.2} (A'' + A'a) h + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3} (A' + a) h^2 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} h^3,$$

etc.

Si on fait $a = 0$ et $h = 1$, les équations précédentes donneront les produits un à un, deux à deux, trois à trois, etc. des nombres naturels, depuis 1 jusqu'à $m - 1$, et on trouvera

$$A' = \frac{m(m-1)}{1.2},$$

$$2A'' = \frac{(m-1)(m-2)}{1.2}A' + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3},$$

$$3A''' = \frac{(m-2)(m-3)}{1.2}A'' + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3}A' + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4},$$

$$4A^{\text{IV}} = \frac{(m-3)(m-4)}{1.2}A''' + \frac{(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3}A'' + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4}A' + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5},$$

etc.,

résultats dont la loi est facile à saisir.

Si dans la progression arithmétique dont on est parti, on suppose

$$a + h = a', \quad \text{d'où} \quad a = a' - h,$$

et si, de plus, on change $m-1$ en m', on aura pour nouvelle progression,

$$a', \; a'+h, \; a'+2h, \; a'+3h \ldots\ldots a'+(m'-1)h,$$

ensorte que faisant les substitutions ci-dessus dans la première valeur de A″, on trouvera, après avoir remplacé A′ par $m'(a'-h) + \frac{(m'+1)}{1.2}h$, et effectué les réductions qui ne présentent pas de difficultés,

$$A'' = \frac{m'(m'-1)}{2}\left[a'^2 + (m'-1)a'h + (m'-2)(3m'-1)\frac{h^2}{12}\right].$$

Qu'on suppose maintenant une équation

$$x^m + A'x^{m-1} + A''x^{m-2} + A'''x^{m-3} + \text{etc.} = 0,$$

dont les m racines forment la progression arithmétique

$$a, \quad a+h, \quad a+2h \ldots\ldots a+(m-1)h,$$

la même que ci-dessus, en supprimant les accents de a'; les coefficiens A', A'' seront des fonctions des racines, telles que

$$A' = -\frac{m}{2}[2a+(m-1)h],$$

$$A'' = \frac{m(m-1)}{2}\left[a^2+(m-1)ah+(m-2)(3m-1)\frac{h^2}{12}\right]:$$

de ces équations, on déduira

$$h = \frac{2}{m}\sqrt{\left[\frac{3(m-1)A'^2-2mA''}{m^2-1}\right]},$$

$$a = -\frac{1}{m}\left\{A'+(m-1)\sqrt{\left[\frac{3[(m-1)A'^2-2mA'']}{m^2-1}\right]}\right\}:$$

Connaissant ainsi le premier terme et la différence constante h, on pourra former tous les termes de la progression, c'est-à-dire, toutes les racines de la proposée. Posant, pour abréger,

$$\sqrt{\left[\frac{3[(m-1)A'^2-2mA'']}{m^2-1}\right]} = k,$$

on aura pour les m racines, dans le cas de m nombre pair,

$$x = -\frac{1}{m}[A' + (m-1)k],$$
$$x = -\frac{1}{m}[A' + (m-3)k],$$
$$\vdots$$
$$x = -\frac{1}{m}(A' + k),$$
$$x = -\frac{1}{m}(A' - k),$$
$$\vdots$$
$$x = -\frac{1}{m}[A' - (m-3)k],$$
$$x = -\frac{1}{m}[A' - (m-1)k].$$

Dans le cas de m nombre impair, les $\frac{m-3}{2}$ premières et les $\frac{m-3}{2}$ dernières valeurs de x étant les mêmes que ci-dessus, nous n'écrirons que les trois valeurs moyennes qui sont

$$x = -\frac{1}{m}(A' + 2k),$$
$$x = -\frac{A'}{m},$$
$$x = -\frac{1}{m}(A' - 2k).$$

Faisons quelques applications de la théorie précédente, et prenons d'abord l'équation

$$x^4 - 10x^3 + 15x^2 - 50x - 56 = 0,$$

pour laquelle on a

$$m = 4, \quad A' = 10, \quad A'' = 15,$$

d'où résultent

$$h = 3, \quad a = -7,$$

ensorte que les racines sont -7, -4, -1, $+2$, progression par équidifférences.

L'équation

$$x^6 - 6x^5 + 85x^4 - 300x^3 + 1471x^2 - 2358x + 2907 = 0,$$

donne

$$m = 6, \quad A' = -6, \quad A'' = 85,$$

d'où résultent

$$h = 2\sqrt{-2}, \quad a = 1 - 5\sqrt{2};$$

les racines forment donc la progression arithmétique

$$1 - 5\sqrt{-2}, \quad 1 - 3\sqrt{-2}, \quad 1 - \sqrt{-2},$$
$$1 + \sqrt{-2}, \quad 1 + 3\sqrt{-2}, \quad 1 + 5\sqrt{-2},$$

On trouvera de plus amples détails sur cette matière, dans les *Elémens d'Algèbre* de M. *Dubourguet*.

CHAPITRE XXIV.

Décomposition des fractions rationnelles.

136. Ce chapitre est une introduction au suivant qui traite des suites récurrentes par rapport auxquelles la recherche du terme général ne présente plus de difficultés, lorsque la fraction rationnelle génératrice est décomposée en fractions simples : d'ailleurs cette décomposition est d'un usage très-fréquent dans le calcul intégral. Nous allons donc exposer les méthodes algébriques les plus simples pour l'effectuer.

137. Pour opérer cette décomposition d'une fraction $\frac{N}{D}$, il faut,

1°. Que le numérateur N soit d'une dimension moindre, au moins, d'une unité que le dénominateur D, ce qu'on peut toujours obtenir par la division ;

2°. Qu'on ait, par les méthodes exposées dans les deux sections de l'algèbre, trouvé les facteurs simples du dénominateur, ou les racines de ce dénominateur égalé à zéro.

Soit donc la fraction rationnelle

$$\frac{N}{D}=\frac{a+a'x+a''x^2+\ldots\ldots+a^{(n-1)}x^{n-1}}{(x-\alpha)(x-\alpha')\ldots\ldots\ldots[x-\alpha^{(n-1)}]},$$

$\alpha, \alpha' \ldots\ldots \alpha^{(n-1)}$ étant des racines réelles ou imaginaires, mais inégales : on pourra supposer

$$\frac{N}{D}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{A'}{x-\alpha'}+\ldots\ldots+\frac{A^{(n-1)}}{x-\alpha^{(n-1)}};$$

A, A'.....$A^{(n-1)}$ étant des coefficiens constans et indéterminés, fonctions de a, a'....$a^{(n-1)}$, α, α'....$\alpha^{(n-1)}$. En effet, si on réduit toutes ces fractions au même dénominateur, qu'on en fasse la somme, ce qui fournit le moyen de faire disparaître le dénominateur D, et que l'on compare les coefficiens des mêmes puissances de x, on aura un nombre n d'équations entre les n indéterminées A, A'......$A^{(n-1)}$, d'où résulte la possibilité de les évaluer toutes, et la légitimité de l'hypothèse précédente.

Soit, pour exemple, la fraction

$$\frac{1+x^2}{x-x^3},$$

dont les facteurs simples du dénominateur sont x, $1-x$, $1+x$. On posera donc

$$\frac{1+x^2}{x-x^3}=\frac{A}{x}+\frac{A'}{1-x}+\frac{A''}{1+x},$$

d'où on déduit l'identité

$$1+x^2=A+(A'+A'')\,x+(-A+A'-A'')\,x^2;$$

et en comparant les coefficiens des mêmes puissances de x, on trouve

$$A=1,\quad A'=1,\quad A''=-1;$$

donc

$$\frac{1+x^2}{x-x^3}=\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}.$$

138. Lorsque les facteurs du dénominateur seront inégaux entr'eux, on pourra toujours, par la méthode précédente, déterminer les numérateurs des fractions simples ; mais le calcul qu'elle exige devient d'autant plus long, que le degré du dénominateur est plus élevé. Nous nous proposons, dans ce qui va suivre, de déduire immédiatement de N et de D, l'un quelconque des numérateurs A, A'....$A^{(n-1)}$, sans faire dépendre

sa valeur de celles des dénominateurs précédens, comme il arrive dans la méthode que nous venons d'exposer.

Soit $x-\alpha$ un des facteurs de D, ensorte que

$$D=(x-\alpha)S,$$

S étant le produit des autres dénominateurs $x-\alpha'$........ $x-\alpha^{(n-1)}$: si l'on représente par $\frac{P}{S}$ la somme des fractions partielles, moins la fraction $\frac{A}{x-\alpha}$, on aura l'identité

$$\frac{N}{D}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{P}{S}=\frac{AS+P(x-\alpha)}{S(x-\alpha)}=\frac{AS+P(x-\alpha)}{D};$$

donc

$$N-AS=P(x-\alpha).$$

Le numérateur A doit donc être tel que N — AS soit exactement divisible par $x-\alpha$, puisque P est une fonction entière de x ; ce qui exige que la fonction N — AS s'évanouisse pour $x=\alpha$. Cette condition sera satisfaite en prenant

$$A=\frac{(N)}{(S)},$$

(N) et (S) étant ce que deviennent N et S par l'hypothèse $x=\alpha$; d'où nous conclurons cette règle : *Pour déterminer un des numérateurs, il faudra dans* N *et* S, *écrire pour* x *la racine du facteur simple qui sert de dénominateur à la fraction partielle sur laquelle on opère.*

On a donc

$$A=\frac{a+a'\alpha+a''\alpha^2+a'''\alpha^3+\text{etc.}}{(\alpha-\alpha')(\alpha-\alpha'')(\alpha-\alpha''')\text{ etc.}},$$

$$A'=\frac{a+a'\alpha'+a''\alpha'^2+a'''\alpha'^3+\text{etc.}}{(\alpha'-\alpha)(\alpha'-\alpha'')(\alpha'-\alpha''')\text{ etc.}},$$

$$A''=\frac{a+a'\alpha''+a''\alpha''^2+a'''\alpha''^3+\text{etc.}}{(\alpha''-\alpha)(\alpha''-\alpha')(\alpha''-\alpha''')\text{ etc.}},$$

etc.

Si dans l'exemple précédent $\frac{1+x^2}{x-x^3}$, où $N=1+x^2$, et $D=x-x^3$, on prend x pour le facteur simple correspondant à A, on aura

$$S = 1 - x^2,$$

et le numérateur A de la fraction simple $\frac{A}{x}$, sera ce que devient $\frac{1+x^2}{1-x^2}$ pour $x=0$; ce qui donne

$$A = 1.$$

Prenant ensuite le facteur simple $1-x$, pour lequel $S=x+x^2$, on aura

$$A' = \frac{1+x^2}{x+x^2},$$

ce qui donne, pour $x=1$,

$$A' = 1.$$

Enfin, pour le troisième facteur simple $1+x$, à cause de $S=x-x^2$, on fera $x=-1$ dans $\frac{1+x^2}{x-x^2}$, ce qui donne

$$A'' = -1.$$

Ainsi les trois fractions partielles dans lesquelles se décompose la proposée, sont, comme on les a trouvées plus haut,

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x}.$$

139. Si parmi les facteurs simples du dénominateur, plusieurs étaient égaux entr'eux, la décomposition de la fraction ne pourrait plus avoir lieu dans la forme précédente : en effet, en revenant aux formules données ci-dessus pour l'évaluation des indéterminées A, A'... $A^{(n-1)}$, on trouve que, dans l'hypothèse présente, plusieurs de ces dénominateurs deviennent infinis,

et qu'ils le deviendraient tous, si tous les facteurs simples du dénominateur étaient égaux entr'eux.

Supposons donc que le dénominateur de la fraction $\frac{N}{D}$, renferme, outre les facteurs inégaux pour lesquels on connaît le mode de décomposition, un nombre n de facteurs du premier degré, réels et égaux : on pourra toujours supposer

$$\frac{N}{D} = \frac{P}{S} + \frac{K}{Q} \ldots\ldots (1),$$

S étant le produit de tous les facteurs inégaux, et Q celui des facteurs égaux, ensorte que D soit le produit des polynomes connus Q et S, et les plus hauts exposans de x dans P et dans K, étant moindres au moins d'une unité que les plus hauts exposans de x dans S et dans Q. En effet, l'équation (1) donne

$$\frac{N}{D} = \frac{PQ + KS}{QS}, \quad \text{d'où} \quad N = PQ + KS,$$

puisque, par supposition, $D = QS$. Soit D un polynome du degré q, et S du degré m, m étant $< q$; N sera, au plus, du degré $q-1$, et Q, au plus, du degré $q-m$; P devra être, au plus, du degré $m-1$, et K, au plus, du degré $q-m-1$; P aura donc m termes et m coefficiens indéterminés, et K en aura $q-m$: le produit PQ sera donc du degré $q-1$, ainsi que le produit KS, c'est-à-dire, que $PQ + KS$ sera du degré $q-1$, ou de même degré que N : ainsi $PQ + KS$ contiendra q coefficiens indéterminés ; donc N ayant q termes, on pourra former entre les coefficiens de $PQ + KS$ et ceux de N, des équations linéaires en nombre q, lesquelles serviront à déterminer les q coefficiens de P et de K. La décomposition annoncée est donc toujours possible, ensorte que, dans l'hypothèse

$$D = (x-\alpha)(x-\alpha')(x-\alpha'')\ldots\ldots(x-\zeta)^n,$$

on pourra poser

$$\frac{N}{D}=\frac{A}{x-\alpha}+\frac{A'}{x-\alpha'}+\frac{A''}{x-\alpha''}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{Rx^{n-1}+R'x^{n-2}+\ldots+R^{(n-1)}}{(x-\zeta)^n},$$

en observant qu'ici

$$S=(x-\alpha)(x-\alpha')(x-\alpha'')\ldots,\qquad Q=(x-\zeta)^n.$$

Il s'agit donc de trouver le mode de décomposition qui convient à la fraction

$$\frac{Rx^{n-1}+R'x^{n-2}+\ldots+R^{(n-1)}}{(x-\zeta)^n};$$

or, sous l'hypothèse $x-\zeta=z$, d'où $x=z+\zeta$, elle prend la forme

$$\frac{B}{z^n}+\frac{B'}{z^{n-1}}+\frac{B''}{z^{n-2}}+\ldots+\frac{B^{(n-1)}}{z},$$

les numérateurs B, $B'\ldots B^{(n-1)}$ étant indépendans de z, ainsi que le démontre le calcul : on pourra donc supposer

$$\frac{N}{D}=\frac{P}{S}+\frac{B}{(x-\zeta)^n}+\frac{B'}{(x-\zeta)^{n-1}}+\ldots+\frac{B^{(n-1)}}{x-\zeta}.$$

$\frac{P}{S}$ représentant la somme des fractions partielles dues aux facteurs inégaux contenus dans D. Si on réduit au même dénominateur, on trouvera

$$N=S\,[B+B'(x-\zeta)+B''(x-\zeta)^2+\ldots+B^{(n-1)}(x-\zeta)^{n-1}]$$
$$+P\,(x-\zeta)^n,$$

d'où l'on déduit

$$P=\frac{N-S\,[B+B'(x-\zeta)+B''(x-\zeta)^2+\ldots+B^{(n-1)}(x-\zeta)^{n-1}]}{(x-\zeta)^n};$$

Or P devant être une fonction entière, il faudra que le numérateur de son expression, soit divisible exactement n fois de suite par le dénominateur $x - \zeta$; ce qui exige que d'abord la partie N — BS du numérateur, devienne séparement nulle lorsque $x = \zeta$; donc

$$B = \frac{(N)}{(S)},$$

(N) et (S) désignant ce que deviennent N et S lorsqu'on y fait $x = \zeta$; conséquemment,

$$N - BS = N - \frac{(N)}{(S)} S,$$

quantité divisible par $x - \zeta$, et que nous représenterons par $N'(x - \zeta)$, ensorte que

$$P = \frac{N' - S[B' + B''(x-\zeta) + \ldots\ldots + B^{(n-1)}(x-\zeta)^{n-2}]}{(x-\zeta)^{n-1}},$$

en effaçant le facteur commun $x - \zeta$. Faisant le même raisonnement, et supposant encore $x = \zeta$, on aura

$$B' = \frac{(N')}{(S)},$$

où N′ et S, entre parenthèses, rappellent la substitution $x = \zeta$; donc

$$N' - SB' = N' - \frac{(N')}{(S)} S,$$

quantité divisible par $x - \zeta$, et que nous représenterons par $N''(x - \zeta)$, ce qui donnera, après la division par $x - \zeta$,

$$P = \frac{N'' - S[B'' + B'''(x-\zeta) + \ldots\ldots + B^{(n-1)}(x-\zeta)^{n-3}]}{(x-\zeta)^{n-2}}.$$

On trouverait de la même manière, dans l'hypothèse $x = \zeta$,

$$B'' = \frac{(N'')}{(S)},$$

faisant donc, comme ci-dessus,

$$N'' - \frac{(N'')}{(S)} S = N''' (x - \beta),$$

on aura

$$P = \frac{N''' - S\,[B''' + B^{\text{iv}}(x-\beta) + \ldots\ldots + B^{(n-1)}(x-\beta)^{n-4}]}{(x-\beta)^{n-3}},$$

d'où on déduit pour $x = \beta$,

$$B''' = \frac{(N''')}{(S)};$$

et ainsi des autres numérateurs.

Prenons pour premier exemple la fraction

$$\frac{x^3}{(1-x)^2(1+x^4)},$$

pour laquelle les fractions partielles qui résultent du facteur carré $(1-x)^2$ du dénominateur, sont

$$\frac{B}{(1-x)^2} + \frac{B'}{1-x}.$$

On a ici

$$N = x^3, \quad S = 1 + x^4,$$

d'où

$$\frac{N}{S} = \frac{x^3}{1+x^4},$$

ce qui donne

$$B = \frac{(N)}{(S)} = \frac{1}{2}$$

pour $x = 1$; donc

$$N - \frac{(N)}{(S)} S = -\tfrac{1}{2} + x^3 - \tfrac{1}{2} x^4,$$

et divisant par $1 - x$, conformément à la règle, il vient pour quotient

$$N' = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2} x - \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{2} x^3,$$

et conséquemment,

$$\frac{N'}{S} = \frac{-1 - x - x^2 + x^3}{2(1+x^4)};$$

donc

$$B' = \frac{(N')}{(S)} = -\frac{1}{2}$$

pour $x = 1$. Les fractions dues au facteur $(1-x)^2$, sont donc

$$\frac{1}{2(1-x)^2} - \frac{1}{2(1-x)}.$$

Soit encore la fraction

$$\frac{x^2}{(1-x)^3(1+x^2)},$$

pour laquelle les fractions partielles dues au facteur $(1-x)^3$, sont

$$\frac{B}{(1-x)^3} + \frac{B'}{(1-x)^2} + \frac{B''}{1-x}:$$

dans ce cas,

$$N = x^2, \quad S = 1 + x^2;$$

on aura donc

$$\frac{N}{S} = \frac{x^2}{1+x^2} \quad \text{et} \quad B = \tfrac{1}{2}$$

pour $x = 1$. On trouve ensuite

$$N' = \frac{\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}}{1-x} = -\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}x,$$

ce qui donne

$$\frac{N'}{S} = \frac{-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{1+x^2}, \quad \text{donc} \quad B' = -\tfrac{1}{2}:$$

on a

$$N'' = \frac{-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2}{1-x} = -\tfrac{1}{2}x;$$

donc

$$\frac{N''}{S} = -\frac{x}{2(1+x^2)} \quad \text{et} \quad B'' = -\tfrac{1}{4}.$$

Ainsi les fractions partielles qui naissent du facteur cubique $(1-x)^3$ du dénominateur, sont

$$\frac{1}{2(1-x)^3}-\frac{1}{2(1-x)^2}-\frac{1}{4(1-x)}.$$

140. Passons au cas où le dénominateur D contient des facteurs imaginaires et inégaux : en multipliant entr'eux les facteurs imaginaires conjugués, on aura des produits de la forme $x^2-2\alpha x+\alpha^2+\mathcal{C}^2$, et on posera

$$\frac{N}{D}=\frac{A+Bx}{x^2-2\alpha x+\alpha^2+\mathcal{C}^2}+\frac{P}{S},$$

en observant que

$$D=(x^2-2\alpha x+\alpha^2+\mathcal{C}^2)\,S;$$

on tire de là

$$N=S\,(A+Bx)+P\,(x^2-2\alpha x+\alpha^2+\mathcal{C}^2):$$

or les racines de

$$x^2-2\alpha x+\alpha^2+\mathcal{C}^2=0$$

étant

$$x=\alpha+\mathcal{C}\sqrt{-1},\quad x=\alpha-\mathcal{C}\sqrt{-1},$$

si l'on substitue pour x l'une de ces racines dans l'équation ci-dessus, N, S et P donneront des résultats de la forme $m+n\sqrt{-1}$ (Chap. I et XX), ensorte qu'on aura

$$m+n\sqrt{-1}=(m'+n'\sqrt{-1})\,[A+B(\alpha+\mathcal{C}\sqrt{-1})]$$

équation qui se partagera en deux autres, dont l'une aura lieu entre les quantités réelles, l'autre entre les quantités imaginaires, et au moyen de ces équations, on déterminera A et B. On opérerait de la même manière pour les autres couples de facteurs imaginaires.

Il nous reste à considérer cette forme du dénominateur

$$D=(x^2-2\alpha x+\alpha^2+\mathcal{C}^2)^p\,S=X^p.S.$$

A l'effet de déterminer les fractions partielles qui corres-

pondent au facteur X^p, on posera

$$\frac{N}{D}=\frac{A'+B'x}{X^p}+\frac{A''+B''x}{X^{p-1}}+\frac{A'''+B'''x}{X^{p-2}}+\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots+\frac{A^{(p)}+B^{(p)}x}{X}+\frac{P}{S};$$

réduisant tous les termes du second membre au dénominateur D, puis multipliant par D, on aura

$$N=S(A'+B'x)+SX(A''+B''x)+SX^2(A'''+B'''x)+\ldots$$
$$\ldots+SX^{p-1}(A^{(p)}+B^{(p)}x)+PX^p:$$

mais les racines de l'équation $X=0$, étant $\alpha\pm\beta\sqrt{-1}$, si l'on suppose $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, le polynome X se réduira à zéro, N deviendra $m+n\sqrt{-1}$, S deviendra $m'+n'\sqrt{-1}$, de sorte que l'équation ci-dessus se changera dans la suivante,

$$m+n\sqrt{-1}=(m'+n'\sqrt{-1})\,[A'+B'(\alpha+\beta\sqrt{-1})]:$$

les parties réelles devant être égales ainsi que les parties imaginaires, on formera deux équations qui serviront à déterminer A' et B' : désignant ces valeurs par a' et b', l'équation ci-dessus donnera

$$N-S(a'+b'x)=SX(A''+B''x)+SX^2(A'''+B'''x)+\ldots\ldots$$
$$+SX^{p-1}(A^{(p)}+B^{(p)}x)+PX^p:$$

or le premier membre étant divisible par X ou par $x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2$, si l'on désigne par N' le quotient de cette division, on aura

$$N'=S(A''+B''x)+SX(A'''+B'''x)+\ldots.$$
$$\ldots\ldots+SX^{p-2}(A^{(p)}+B^{(p)}x)+X^{p-1},$$

équation qui servira à évaluer A'' et B'', sous l'hypothèse $x=\alpha+\beta\sqrt{-1}$, et ainsi de suite.

Nous n'entrons pas ici dans de plus grands détails, parce que le calcul différentiel offre des méthodes beaucoup plus brièves pour résoudre la question, comme on peut le voir dans notre Traité cité plus haut.

CHAPITRE XXV.

Des suites récurrentes.

141. On a vu (Ire sect., chap. XX) qu'une fraction rationnelle de la forme

$$\frac{a+bx+cx^2+dx^3+\ldots\ldots+px^{m-1}}{a'+b'x+c'x^2+d'x^3+\ldots\ldots+q'x^m},$$

engendrait une suite dans laquelle le coefficient d'un terme quelconque, à partir du $m^{\text{ième}}$, dépendait de ceux des m termes précédens, suivant une loi constante déterminée par le dénominateur de la fraction développée. Cette relation qui existe toujours entre un même nombre de termes consécutifs, a fait appeler ces suites *récurrentes*, et les quantités

$$-\frac{q'}{a'},\ldots.-\frac{d'}{a'},-\frac{c'}{a'},-\frac{b'}{a'},$$

par lesquelles il faut multiplier les coefficiens des termes qui précèdent celui que l'on cherche, portent ensemble le nom d'*échelle de relation*.

142. On a déjà traité [Ire sect., (XX)] le problème suivant: *Étant donnée la fraction rationnelle, trouver la suite qui provient de son développement.* Il reste encore, pour terminer ce que nous avons à dire sur cette matière, à résoudre les questions suivantes :

1°. *Étant données la suite récurrente et l'échelle de rela-*

tion, trouver la fraction rationnelle génératrice, et la somme d'un nombre quelconque de termes d'une telle suite;

2°. *Une fraction rationnelle étant donnée, on propose de trouver le terme général de la série récurrente à laquelle elle donne lieu;*

3°. *Étant donnée une série, découvrir si elle est récurrente, et assigner la fonction génératrice;*

4°. *Le terme général d'une série récurrente étant donné, trouver la fraction génératrice.*

1°. L'échelle de relation étant donnée, le dénominateur de la fraction génératrice est connu; il n'y a plus, pour résoudre la première question, que le numérateur à déterminer.

Soit donc donnée la série récurrente

$$\mathrm{A} + \mathrm{B}x + \mathrm{C}x^2 + \mathrm{D}x^3 + \mathrm{E}x^4 + \text{etc.},$$

ayant pour échelle de relation

$$a', \quad -b', \quad +c', \quad -d':$$

le dénominateur de la fraction génératrice sera

$$1 - a'x + b'x^2 - c'x^3 + d'x^4.$$

Posons $a + bx + cx^2 + dx^3$ pour le numérateur : les coefficiens a, b, c, d doivent être tels que la proposée résulte du développement de la fraction

$$\frac{a + bx + cx^2 + dx^3}{1 - a'x + b'x^2 - c'x^3 + d'x^4}:$$

il faudra donc que l'identité

$$a + bx + cx^2 + dx^3$$
$$= (\mathrm{A}+\mathrm{B}x+\mathrm{C}x^2+\mathrm{D}x^3+\text{etc.})\,(1-a'x+b'x^2-c'x^3+d'x^4)$$

ait lieu quel que soit x; ce qui donne, en développant et

comparant les coefficiens des mêmes puissances de x,

$$\begin{aligned} a &= \mathrm{A}, \\ b &= \mathrm{B} - a'\mathrm{A}, \\ c &= \mathrm{C} - a'\mathrm{B} + b'\mathrm{A}, \\ d &= \mathrm{D} - a'\mathrm{C} + b'\mathrm{B} - c'\mathrm{A}, \\ &\text{etc.} \end{aligned}$$

Donc la fraction génératrice demandée sera

$$\frac{\mathrm{A}+(\mathrm{B}-a'\mathrm{A})x+(\mathrm{C}-a'\mathrm{B}+b'\mathrm{A})x^2+(\mathrm{D}-a'\mathrm{C}+b'\mathrm{B}-c'\mathrm{A})x^3}{1-a'x+b'x^2-c'x^3+d'x^4}.$$

Il est facile de comprendre maintenant comment on trouve la somme d'une suite récurrente continuée jusqu'à un terme donné. En effet, supposons qu'il soit question de trouver la somme de la série proposée jusqu'au terme $\mathrm{P}x^n$ inclusivement, et faisons

$$\mathrm{S} = \mathrm{A} + \mathrm{B}x + \mathrm{C}x^2 + \text{etc.}\ldots\ldots + \mathrm{P}x^n:$$

comme la somme de cette série prolongée à l'infini est connue, cherchons celle des termes qui suivent le dernier $\mathrm{P}x^n$ à l'infini, et soit

$$\mathrm{S}' = \mathrm{Q}x^{n+1} + \mathrm{R}x^{n+2} + \mathrm{T}x^{n+3} + \mathrm{U}x^{n+4} + \text{etc.};$$

cette série, divisée par x^{n+1}, donne une série récurrente parfaitement conforme à la première, dont la somme sera

$$\mathrm{S}' = \frac{\mathrm{Q}x^{n+1}+(\mathrm{R}-a'\mathrm{Q})x^{n+2}+(\mathrm{T}-a'\mathrm{R}+b'\mathrm{Q})x^{n+3}+(\mathrm{U}-a'\mathrm{T}+b'\mathrm{R}-c'\mathrm{Q})x^{n+4}}{1-a'x+b'x^2-c'x^3+d'x^4};$$

donc la somme cherchée

$$\mathrm{S} = \frac{\mathrm{A}+(\mathrm{B}-a'\mathrm{A})x+(\mathrm{C}-a'\mathrm{B}+b'\mathrm{A})x^2+(\mathrm{D}-a'\mathrm{C}-b'\mathrm{B}-c'\mathrm{A})x^3}{1-a'x+b'x^2-c'x^3+d'x^4}$$

$$-\frac{\mathrm{Q}x^{n+1}+(\mathrm{R}-a'\mathrm{Q})x^{n+2}+(\mathrm{T}-a'\mathrm{R}+b'\mathrm{Q})x^{n+3}+(\mathrm{U}-a'\mathrm{T}+b'\mathrm{R}-c'\mathrm{Q})^{n+4}}{1-a'x+b'x^2-c'x^3+d'x^4}.$$

On opérerait de la même manière pour trouver la fraction génératrice, dans le cas où l'échelle de relation serait composée d'un plus grand nombre de termes.

Soit, pour exemple, la série

$$1 + 8x + 27x^2 + 64x^3 + 125x^4 + \text{etc.},$$

dont l'échelle de relation est

$$4,\ -6,\ +4,\ -1,$$

ensorte que

$$a' = 4,\quad b' = 6,\quad c' = 4,\quad d' = 1,$$
$$A = 1,\quad B = 8,\quad C = 27,\quad D = 64,$$
$$1 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4 = (1-x)^4;$$

on trouvera

$$a = 1,$$
$$b = 8 - 4 = 4,$$
$$c = 27 - 32 + 6 = 1,$$
$$d = 64 - 108 + 48 - 4 = 0,$$

et par conséquent, $1 + 4x + x^2$ pour le numérateur. La fraction rationnelle génératrice sera donc

$$\frac{1+4x+x^2}{1-4x+6x^2-4x^3+x^4} = \frac{1+4x+x^2}{(1-x)^4}.$$

Soit, pour second exemple, la série

$$1 - 6x + 12x^2 - 48x^3 + 120x^4 - \text{etc.}$$

dont l'échelle de relation est $-1 + 6$; le dénominateur de la fraction sera $1 + x - 6x^2$; on trouvera ensuite

$$a = 1,\quad b = -5,\quad c = 0;$$

donc

$$\frac{1-5x}{1+x-6x^2}$$

représentera la fraction dont la série proposée est le développement, et

$$\frac{1-5x+408x^5-720x^6}{1+x-6x^2}$$

sera la somme des cinq premiers termes de cette série.

2°. Occupons-nous maintenant de la recherche du terme général, et considérons d'abord la fraction rationnelle la plus simple

$$\frac{A}{1-rx}:$$

la série résultante de son développement, est

$$A(1+rx+r^2x^2+r^3x^3+\ldots\ldots+r^nx^n),$$

dont le terme général est Ar^nx^n. On appelle ainsi cette expression, parce qu'en y mettant successivement tous les nombres entiers et positifs au lieu de n, on obtient tous les termes de la série.

Si la fraction rationnelle génératrice avait pour dénominateur un polynome d'un degré plus élevé que le premier, on la décomposerait, d'après ce qui a été enseigné dans le chapitre précédent, en une suite de fractions simples de la forme

$$\frac{A}{1-rx},\quad \frac{A'}{1-r'x},\quad \frac{A''}{1-r''x},\quad \text{etc.},$$

et alors il serait facile d'obtenir le terme général de la série résultante du développement de la fraction proposée, parce que ce terme général serait la somme des termes généraux des séries données par les fractions simples.

En effet, soient

$$\begin{array}{l} A\,(1 + rx + r^2x^2 + r^3x^3 + \ldots\ldots + r^nx^n + \text{etc.}),\\ A'\,(1 + r'x + r'^2x^2 + r'^3x^3 + \ldots\ldots + r'^nx^n + \text{etc.}),\\ A''\,(1 + r''x + r''^2x^2 + r''^3x^3 + \ldots\ldots + r''^nx^n + \text{etc.}),\\ A'''\,(1 + r'''x + r'''^2x^2 + r'''^3x^3 + \ldots\ldots + r'''^nx^n + \text{etc.}),\\ \quad \text{etc.} \end{array}$$

les séries récurrentes qui naissent de chacune des fractions simples, et

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots\ldots\ldots + Rx^n + \text{etc.}$$

le développement de la fraction proposée : comme on aurait, par hypothèse, l'équation identique

$$\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots + px^{m-1}}{1 - a'x - b'x^2 \ldots\ldots - q'x^m} = \frac{A}{1 - rx} + \frac{A'}{1 - r'x} + \frac{A''}{1 - r''x} + \text{etc.},$$

la suivante

$$\left.\begin{array}{l} A + Ar \\ A' + A'r' \\ A'' + A''r'' \\ \text{etc.} \quad \text{etc.} \end{array}\right| x + \ldots\ldots\ldots \left.\begin{array}{r} + Ar^n \\ + A'r'^n \\ + A''r''^n \\ \text{etc.} \end{array}\right| x^n + \text{etc.}$$
$$= A + Bx + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + Rx^n + \text{etc.},$$

aurait lieu aussi ; ce qui donne

$$R = Ar^n + A'r'^n + A''r''^n + \text{etc.}$$

Ainsi cette question ramène à la décomposition de la fraction rationnelle

$$\frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots\ldots + px^{m-1}}{1 - a'x - b'x^2 - c'x^3 - \ldots\ldots - q'x^m},$$

en une suite de fractions de la forme

$$\frac{A}{1 - rx} + \frac{A'}{1 - r'x} + \frac{A''}{1 - r''x} + \text{etc.}$$

ce qu'on sait faire généralement par le Chapitre précédent.

Soient les fractions

$$\frac{1-x}{1-x-2x^2} \quad \text{et} \quad \frac{1-x}{1-5x+6x^2}:$$

on trouvera que la première se décompose dans les deux suivantes,

$$\frac{\frac{2}{3}}{1+x}+\frac{\frac{1}{3}}{1-2x},$$

et la seconde dans celles-ci,

$$\frac{-1}{1-2x}+\frac{2}{1-3x}.$$

Il est facile maintenant de trouver les termes généraux des séries que donnent les fractions précédentes. Pour la première, on fera la somme des termes généraux des séries données par les fractions

$$\frac{\frac{2}{3}}{1+x} \quad \text{et} \quad \frac{\frac{1}{3}}{1-2x},$$

et on trouvera

$$[\tfrac{2}{3}(-1)^n+\tfrac{1}{3}.2^n]\,x^n=\left(\frac{2^n\pm 2}{3}\right)x^n,$$

les signes $+$ et $-$ ayant respectivement lieu pour n pair et impair. Faisant successivement

$$n=0\,,\ =1\,,\ =2\,,\ =3\,,\ \text{etc.},$$

on aura la série

$$1+0x+2x^2+2x^3+6x^4+10x^5+22x^6+42x^7+\text{etc.}$$

Le terme général de la seconde fraction, sera

$$2.3^n.x^n-2^n.x^n=(2.3^n-2^n)\,x^n;$$

et posant successivement $n=0\,,=1\,,=2$, etc., on aura la série

$$1+4x+14x^2+46x^3+146x^4+\text{etc.}$$

Prenons encore pour exemple la fraction

$$\frac{1+2x}{1-x-x^2};$$

les facteurs du dénominateur étant

$$1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x \quad \text{et} \quad 1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x,$$

on aura les fractions partielles

$$\frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)x}+\frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{1-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)x},$$

lesquelles donnent, pour le terme général de la série proposée,

$$\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]x^n,$$

d'où l'on déduirait le développement en série de la proposée.

3°. Soit la série donnée

$$S = A + Bx + Cx^2 + \text{etc.},$$

dans laquelle A, B, C, etc. sont donnés en nombres : il s'agit de reconnaître si les nombres A, B, C, etc. forment une série récurrente.

Nous observerons d'abord que si l'échelle de relation n'est composée que du seul terme a', on a

$$B = Aa', \quad C = Ba', \quad D = Ca', \quad \text{etc.};$$

d'où l'on déduit

$$a' = \frac{B}{A} = \frac{C}{B} = \frac{D}{C}, \text{ etc.}$$

Ainsi, lorsque dans toute l'étendue de la série, chaque coefficient divisé par celui du terme précédent, donne le même quotient, la série est récurrente.

La série

$$2 - 4x + 8x^2 - 16x^3 + \text{etc.}$$

satisfait à cette condition, et donne pour quotient constant -2, ensorte qu'elle résulte de la fraction $\frac{2}{1+2x}$.

Lorsque les quotiens ne sont pas égaux, l'échelle de relation contient au moins deux termes, a' et b', et ces inconnues doivent satisfaire aux relations

$$C = Ba' + Ab',\quad D = Ca' + Bb',\quad E = Da' + Cb',\quad \text{etc.};$$

les deux premières équations déterminent les valeurs des inconnues a' et b'; et lorsqu'elles satisfont à toutes les autres équations, la série est récurrente, et elle résulte de la fraction $\frac{A + (B - Aa')x}{1 - a'x - b'x^2}$. En observant qu'alors

$$\frac{a + bx}{1 - a'x - b'x^2} = A + Bx + Cx^2 + \text{etc.}$$

La série

$$1 + x + 5x^2 + 13x^3 + 41x^4 + 121x^5 + 365x^6 + \text{etc.},$$

donne

$$5 = a' + b',\qquad 13 = 5a' + b',$$
$$41 = 13a' + 5b',\qquad 121 = 41a' + 13b'.$$
$$\text{etc.}\qquad\qquad \text{etc.}$$

Les deux premières équations donnent

$$a' = 2,\quad b' = 3;$$

valeurs qui satisfont aux suivantes; d'où on conclut que la série est récurrente.

Mais la méthode suivante est préférable, parce qu'elle conduit au but d'une manière directe.

Soient les termes donnés et connus A, B, C, D, etc. : on en formera la série

$$A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + \text{etc.}$$

qu'on supposera $= S$, et il s'agira de chercher si elle peut résulter du développement d'une fonction rationnelle quelconque, où la plus haute puissance de x dans le numérateur, soit moindre que dans le dénominateur.

Supposons d'abord que la série proposée soit le développement de $\frac{a}{a' + b'x}$, ou qu'on ait

$$S = \frac{a}{a' + b'x}; \quad \text{donc} \quad \frac{1}{S} = \frac{a' + bx}{a} = p + qx,$$

d'où il suit que si l'on divise l'unité par le polynome S, en ordonnant, dans l'opération, les termes suivant les puissances de x, on trouvera nécessairement, dans l'hypothèse actuelle, un quotient exact composé de deux termes $p + qx$.

La série

$$2 - 4x + 8x^2 - 16x^3 + 32x^4 - \text{etc.}$$

est de cette espèce; car en divisant l'unité par cette série, on a pour quotient $\frac{1}{2} + x$; donc

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{2} + x, \quad \text{d'où} \quad S = \frac{2}{1 + 2x}.$$

Lorsque la division de l'unité par S, ne se fait pas sans reste, la série proposée n'est pas le développement de $\frac{a}{a' + b'x}$, et il faut rechercher si l'on n'a pas

$$S = \frac{a + bx}{a' + b'x + c'x^2}, \quad \text{d'où} \quad \frac{1}{S} = \frac{a' + b'x + c'x^2}{a + bx}:$$

après deux divisions partielles, on obtiendra un quotient $p + qx$

avec un reste de la forme αx^2 ; donc

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{\alpha x^2}{a+bx},$$

d'où l'on conclura que si l'on divise l'unité par le polynome S, et qu'on pousse la division jusqu'à ce qu'on ait dans le quotient, deux termes tels que $p + qx$, on aura un reste qui sera nécessairement divisible par x^2, et qu'on pourra représenter par $S'x^2$, S' étant une nouvelle série de la forme

$$T + T'x + T''x^2 + T'''x^3 + \text{etc.};$$

donc

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{S'x^2}{S} = p + qx + \frac{\alpha x^2}{a+bx},$$

conséquemment,

$$\frac{S'}{S} = \frac{\alpha}{a+bx}, \quad \text{d'où} \quad \frac{S}{S'} = \frac{a+bx}{\alpha} = p' + q'x.$$

Donc si l'on divise le polynome S par le polynome S', on aura dans l'hypothèse actuelle, un quotient fini de deux termes tels que $p' + q'x$. On est donc conduit à ces deux équations,

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{S'x^2}{S}, \quad \frac{S}{S'} = p' + q'x:$$

de la première on déduit

$$S = \frac{1}{p + qx + \frac{S'x^2}{S}},$$

et en remplaçant $\frac{S'}{S}$ par sa valeur tirée de la seconde, on trouvera

$$S = \frac{1}{p + qx + \frac{x^2}{p' + q'x}} = \frac{p' + q'x}{(p+qx)(p'+q'x) + x^2},$$

fraction génératrice. On peut appliquer cette analyse à la série

$$1 - 2x + 3x^2 - 3x^3 + 9x^5 - 27x^6 + \text{etc.}$$

et rechercher sa fraction génératrice.

Supposons encore que la condition

$$\frac{S}{S'} = p' + q'x$$

ne soit pas satisfaite ; on recherchera si la série proposée a pour somme

$$S = \frac{a+bx+cx^2}{a'+b'x+c'x^2+d'x^3}; \text{ donc } \frac{1}{S} = \frac{a'+b'x+c'x^2+d'x^3}{a+bx+cx^2}:$$

qu'on divise le numérateur de cette fraction par son dénominateur, on aura, après deux divisions partielles, un quotient de la forme $p+qx$, et un reste tel que $\alpha'x^2+\mathrm{6}'x^3$; donc

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{\alpha'x^2+\mathrm{6}'x^3}{a+bx+cx^2}.$$

Il suit de là que si l'on divise l'unité par le polynome S, et que l'on continue la division jusqu'à ce qu'on ait trouvé deux termes tels que $p+qx$, le reste sera en total divisible par x^2, et pourra être représenté par $S'x^2$, S' étant encore une série de la forme

$$V + V'x + V''x^2 + V'''x^3 + V^{\text{iv}}x^4 + \text{etc.};$$

on aura donc

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{S'x^2}{S} = p + qx + \frac{\alpha'x^2+\mathrm{6}'x^3}{a+bx+cx^2};$$

donc

$$\frac{S'}{S} = \frac{\alpha'+\mathrm{6}'x}{a+bx+cx^2}, \quad \text{et de là} \quad \frac{S}{S'} = \frac{a+bx+cx^2}{\alpha'+\mathrm{6}'x}.$$

Or en divisant le numérateur de cette fraction par le dénominateur, il est clair qu'après deux divisions partielles, on

aura

$$\frac{S}{S'} = p' + q'x + \frac{\alpha'' x^2}{\alpha' + \mathcal{C}' x};$$

donc si l'on divise le polynome S par le polynome S', et qu'on pousse la division jusqu'à ce qu'on ait au quotient deux termes tels que $p' + q'x$, le reste sera nécessairement divisible par x^2, et pourra être représenté par $S''x^2$, S'' étant une nouvelle série de la forme

$$X + X'x + X''x^2 + X'''x^3 + \text{etc.}:$$

donc

$$\frac{S}{S'} = p' + q'x + \frac{S''x^2}{S'} = p' + q'x + \frac{\alpha'' x^2}{\alpha' + \mathcal{C}' x},$$

d'où

$$\frac{S''}{S'} = \frac{\alpha''}{\alpha' + \mathcal{C}' x}, \quad \text{et de là} \quad \frac{S'}{S''} = \frac{\alpha' + \mathcal{C}' x}{\alpha''} = p'' + q''x.$$

Ainsi, dans l'hypothèse présente, en divisant le polynome S' par le polynome S'', on aura un quotient fini tel que $p'' + q''x$. Au moyen des équations

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{S'x^2}{S}, \quad \frac{S}{S'} = p' + q'x + \frac{S''x^2}{S'},$$
$$\frac{S'}{S''} = p'' + q''x,$$

on trouve

$$S = \frac{(p'+q'x)(p''+q''x) + x^2}{(p+qx)(p'+q'x)(p''+q''x) + [(p+qx) + (p''+q''x)]x^2},$$

fraction génératrice de la série proposée.

On conclura donc, en général, que *pour reconnaître si la série proposée S est récurrente, il n'y a qu'à diviser*

l'unité par S, *jusqu'à ce qu'on ait au quotient deux termes tels que* $p + qx$, *et dénotant le reste par* $S'x^2$, *on divisera* S *par* S' *jusqu'à ce que l'on ait aussi au quotient deux termes tels que* $p' + q'x$; *dénotant de même le reste par* $S''x^2$, *on divisera encore* S' *par* S'', *jusqu'à ce qu'on ait au quotient deux termes* $p'' + q''x$, *et ainsi de suite. Si la série est véritablement récurrente, l'opération se terminera nécessairement à la* $n^{ième}$ *division, ensorte que le reste* $S^{(n)}x^2$ *sera nul. Autrement l'opération ira à l'infini.*

On demande si la suite des nombres

1, 2, 3, 3, 7, 5, 15, 9, 31, 17, 63, 33, 127, 65, etc.

dont on ignore la loi, est une suite récurrente.

Ayant formé la série

$$S = 1+2x+3x^2+3x^3+7x^4+5x^5+15x^6+9x^7+31x^8+17x^9 +63x^{10}+33x^{11}+127x^{12}+65x^{13}+\text{etc.},$$

on divisera l'unité par S, ce qui donnera le quotient

$$p + qx = 1 - 2x,$$

et le reste $x^2 + 3x^3 - x^4 +$ etc. entièrement divisible par x^2. Cette division faite, on trouvera

$$S' = 1 + 3x - x^2 + 9x^3 - 5x^4 + 21x^5 - 13x^6 + 45x^7 - 29x^8 + 93x^9 - 61x^{10} + 18x^{11}, \text{ etc.},$$

et divisant S par S', il viendra pour quotient

$$p' + q'x = 1 - x,$$

et pour reste,

$$7x^2 - 7x^3 + 21x^4 + \text{etc.},$$

lequel étant divisé par x^2, donnera la série

$$S'' = 7 - 7x + 21x^2 - 21x^3 + 49x^4 - 49x^5 + 105x^6 - 105x^7 + 217x^8 - 217x^9, \text{ etc. :}$$

divisant S' par S'', on aura le quotient

$$p'' + q''x = \frac{1}{7} + \frac{4x}{7}$$

avec un reste nul ; ce qui démontre que la suite proposée est effectivement récurrente. Les valeurs numériques de p, q, p', q', p'', q'' substituées dans la formule générale S, correspondante au cas de trois divisions, donnent pour fraction génératrice

$$S = \frac{1 + 3x + 3x^2}{1 + x - 2x^2 - 2x^3},$$

dont l'échelle de relation est -1, $+2$, $+2$; ensorte que si t, t', t'', t''' sont quatre termes consécutifs quelconques de la série proposée, on aura

$$t''' = -t'' + 2t' + 2t.$$

Pour trouver l'expression du terme général, on prendra les facteurs du dénominateur, qui sont

$$1 + x, \quad 1 + x\sqrt{2}, \quad 1 - x\sqrt{2},$$

et on aura, d'après le chapitre précédent,

$$S = -\frac{1}{1+x} + \frac{1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}}{1 + x\sqrt{2}} + \frac{1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}}{1 - x\sqrt{2}},$$

d'où l'on déduira le terme général

$$\left[-1(-1)^m + \left(1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)(-\sqrt{2})^m + \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)(\sqrt{2})^m\right]x^m$$

On trouverait exactement de la même manière, que la série des nombres

1, 1, 1, 2, 4, 6, 7, 7, 7, 8, 10, 12, 13, 13, 13, 14, 16, etc.

est une série récurrente ayant pour fraction génératrice

$$S = \frac{1 - 2x + 2x^2}{1 - 3x + 4x^2 - 3x^3 + x^4},$$

d'où résulte l'échelle de relation 3, -4, 3, -1. Le dénominateur se résout dans les facteurs $(1-x)^2$, $1-x+x^2$, dont le dernier se décompose dans les deux suivans,

$$1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{-3}}{2}\right)x, \quad 1 - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{-3}}{2}\right)x,$$

qui reviennent à

$$1 - \left(\cos\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}.\sqrt{-1}\right)x,$$
$$1 - \left(\cos\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}.\sqrt{-1}\right)x,$$

π représentant la demi-circonférence ; à ces facteurs, on peut substituer les suivans (chap. XIX),

$$1 - xe^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}, \quad 1 - xe^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}},$$

ensorte que, (chap. XXIV), la fraction génératrice pourra être décomposée dans les quatre suivantes :

$$\frac{A}{1 - xe^{\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}} + \frac{A'}{1 - xe^{-\frac{\pi}{3}\sqrt{-1}}} + \frac{B}{(1-x)^2} + \frac{B'}{1-x};$$

et l'on trouvera d'abord

$$B = 1, \quad B = -1;$$

puis, en posant $\frac{\pi}{2} = \pi'$, on obtiendra, après quelques réductions

$$A = \frac{e^{\frac{\pi'}{3}\sqrt{-1}}}{2\cos\frac{\pi'}{3}} \quad A' = \frac{e^{-\frac{\pi'}{3}\sqrt{-1}}}{2\cos\frac{\pi'}{3}},$$

On aura donc pour terme général,

$$\left[B' + (m+1)B + Ae^{\frac{m\pi}{3}\sqrt{-1}} + A'e^{-\frac{m\pi}{3}\sqrt{-1}}\right]x^m;$$

qui, par la substitution des valeurs de A, A', B, B', devient

$$\left[m + \frac{\cos\left(\frac{\pi'}{3} + \frac{m\pi}{3}\right)}{\cos\frac{\pi'}{3}}\right]x^m.$$

Des équations trouvées précédemment,

$$\frac{1}{S} = p + qx + \frac{S'x^2}{S},$$

$$\frac{S}{S'} = p' + q'x + \frac{S''x^2}{S'},$$

$$\frac{S'}{S''} = p'' + q''x + \frac{S'''x^3}{S''},$$

$$\frac{S''}{S'''} = p''' + q'''x + \frac{S^{\text{IV}}x^2}{S'''},$$

$$\vdots$$

$$\frac{S^{(n-2)}}{S^{(n-1)}} = p^{(n-1)} + q^{(n-1)}x,$$

on déduit

$$S = \cfrac{1}{p + qx + \cfrac{S'}{S} x^2},$$

$$\frac{S'}{S} = \cfrac{1}{p' + q'x + \cfrac{S''}{S'} x^2},$$

$$\frac{S''}{S'} = \cfrac{1}{p'' + q''x + \cfrac{S'''}{S''} x^2},$$

$$\vdots$$

$$\frac{S^{(n-1)}}{S^{(n-2)}} = \frac{1}{p^{(n-1)} + q^{(n-1)}x};$$

donc

$$S = \cfrac{1}{p+qx + \cfrac{x^2}{p'+q'x + \cfrac{x^2}{p''+q''x + \cfrac{x^2}{p'''+q'''x} + \ldots\ldots}}}$$

$$\ldots\ldots + \frac{x^2}{p^{(n-1)} + q^{(n-1)}x}.$$

Ainsi pour repasser à la fraction génératrice, il n'y aurait plus qu'à réduire cette fraction continue en fraction ordinaire. Voyez, pour de plus amples détails, un mémoire de *Lagrange* intitulé : *Recherches sur la manière de former des tables des planètes, d'après les seules observations.* (Vol. 1772 de l'Académie des Sciences de Paris, Ire partie.)

4°. Les développemens en séries des fractions

$$\frac{1}{(1-rx)^2}, \quad \frac{1}{(1-rx)^3}, \quad \frac{1}{(1-rx)^4}, \quad \text{etc.},$$

donnent pour termes généraux

$$(n+1)r^n x^n,\quad \frac{(n+1)(n+2)}{2}r^n x^n,$$
$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3}r^n x^n,\ \text{etc.},$$

donc la somme de la suite qui aura pour terme général

$$\Big\{K+(n+1)K_1+\frac{(n+1)(n+2)K_2}{2}+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)K_3}{1.2.3}$$
$$+\ldots+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots(n+\mu-1)K_{\mu-1}}{1.2.3\ldots\ldots(\mu-1)}\Big\}r^n x^n$$

sera égale à

$$\frac{K}{1-rx}+\frac{K_1}{(1-rx)^2}+\frac{K_2}{(1-rx)^3}+\ldots\ldots+\frac{K_{\mu-1}}{(1-rx)^\mu};$$

c'est-à-dire, à la fraction simple

$$\frac{K(1-rx)^{\mu-1}+K_1(1-rx)^{\mu-2}+K_2(1-rx)^{\mu-3}+\ldots+K_{-1\mu}}{(1-rx)^\mu}.$$

D'où il suit que si l'on a une série dont le terme général soit représenté par la formule

$$(K+K'n+K''n^2+K'''n^3+\ldots\ldots+K^{(\mu-1)}n^{\mu-1})r^n x^n,$$

il n'y aura qu'à déterminer les coefficiens K_1, K_2, K_3....$K_{\mu-1}$, de manière qu'on ait l'équation identique

$$K+K'n+K''n^2+K'''n^3+\ldots\ldots+K^{(\mu-1)}n^{\mu-1)}$$
$$=K+(n+1)K_1+\frac{(n+1)(n+2)}{1.2}K_2+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2.3}K_3$$
$$+\ldots+\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots\ldots\ldots(n+\mu-1)K_{\mu-1}}{1.2.3\ldots\ldots(\mu-1)};$$

Qu'on suppose, à cet effet,

$$K+K'n+K''n^2+K'''n^3+\ldots\ldots+K^{(\mu-1)}n^{\mu-1}=S,$$

et qu'on dénote par S', S'', S''', etc. les valeurs de S, correspondantes à $n=-1$, $=-2$, $=-3$, etc, on aura, d'après l'identité précédente,

$$\left.\begin{array}{l} S'=K \\ S''=K-K_1 \\ S'''=K-2K_1+K_2 \\ S^{IV}=K-3K_1+3K_2-K_3 \end{array}\right\} \text{d'où} \left\{\begin{array}{l} K=S' \\ K_1=S'-S'' \\ K_2=S'-2S''+S''' \\ K_3=S'-3S''+3S'''-S^{IV} \end{array}\right.$$

etc. etc.:

substituant ces valeurs dans la fraction ci-dessus, on aura la fraction génératrice cherchée dont l'échelle de relation sera

$$\mu r,\quad -\frac{\mu(\mu-1)}{2}r^2,\quad \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3}r^3,\ \text{etc.}\ldots\ldots\pm r^\mu.$$

Enfin, il est clair que si la suite proposée est composée de plusieurs suites de la forme précédente, il n'y aura qu'à ajouter ensemble les fractions qui expriment la somme de chacune de ces suites, et l'on aura une fraction unique égale à la serie proposée, et dont le dénominateur sera de la forme $(1-rx)^\mu(1-px)^\nu\ldots\ldots$ De sorte que cette série aura pour échelle les coefficiens, pris négativement, des puissances x, x^2, x^3, etc. du polynome qui résultera du développement de la formule $(1-rx)^\mu(1-px)^\nu\ldots\ldots$

La solution de cette question peut être énonçée dans ces termes.

Soit n le nombre des termes qui précèdent le terme général donné T_{n+1}; ce terme sera une fonction connue de n que nous désignerons par $\varphi(n)$: la fraction génératrice inconnue $\frac{N}{D}$ contiendra au numérateur les indéterminées A, B, C, etc.

avec x, et son terme général T_{n+1} sera une fonction connue de n, A, B, C, etc. que nous désignerons par $f(n, A, B, C, \text{etc.})$. Posant donc l'équation identique

$$\varphi(n) = f(n, A, B, C, \text{etc.}),$$

on en déduira les valeurs de A, B, C, etc. qu'il faudra reporter dans la fonction génératrice $\frac{N}{D}$.

Eclaircissons ce qui précède par un exemple. Le terme général d'une série étant

$$\varphi(n) = (a + bn + cn^2 + \ldots\ldots + ln^{\mu-1})\, x^n,$$

la série est récurrente, et la fonction génératrice est de la forme

$$\frac{A + Bx + Cx^2 \ldots\ldots + Kx^{\mu-1}}{(1-x)^\mu};$$

car on a observé précédemment que les termes généraux qui répondent aux fractions

$$\frac{A}{1-x}, \quad \frac{A + Bx}{(1-x)^2}, \quad \frac{A + Bx + Cx^2}{(1-x)^3}, \quad \text{etc.},$$

sont de la forme

$$ax^n, \quad (a + bn)\,x^n, \quad (a + bn + cn^2)\,x^n, \quad \text{etc.}$$

Ainsi, par exemple, le terme général étant

$$(1 + n + 3n^2)\,x^n,$$

la fraction génératrice sera $\frac{A + Bx + Cx^2}{(1-x)^3}$, et elle aura pour terme général (4°),

$$\left[\frac{A\,(n+1)(n+2)}{2} + B\,\frac{n(n+1)}{2} + C\,\frac{(n-1)n}{2}\right]x^n$$

c'est-à-dire,

$$A + \tfrac{1}{2}[(3A + B - C)n + \tfrac{1}{2}(A + B + C)n^2]x^n;$$

égalant les coefficiens de x^n, et ensuite ceux des puissances de n, on a ces déterminations

$$A = 1, \quad B = 2, \quad C = 3:$$

la fraction cherchée est donc

$$\frac{1 + 2x + 3x^2}{(1 - x)^3}.$$

Nous observerons enfin qu'on peut augmenter à volonté le nombre des termes de l'échelle de relation d'une série récurrente, mais qu'on ne peut le diminuer, à moins que la fraction rationnelle génératrice ne soit pas réduite à sa plus simple expression.

En effet, soit la fraction génératrice

$$\frac{a + bx}{1 - a'x - b'x^2};$$

la série récurrente qui lui répond, aura $a' + b'$ pour échelle de relation, échelle double : qu'on multiplie le haut et le bas de la fraction par $1 + \alpha'x$, la fraction résultante sera

$$\frac{a + (b + a\alpha')x + b\alpha'x^2}{1 - (a' - \alpha')x - (b' + a'\alpha')x - b'\alpha'x^3},$$

fraction qui donnera lieu à une série récurrente à échelle triple : on pourrait passer à une échelle quadruple, quintuple, etc., et réciproquement; mais la réduction de l'échelle de relation n'est possible qu'autant qu'il existe entre les deux termes de la fraction génératrice, un commun diviseur fonction de la lettre x suivant laquelle la série récurrente est ordonnée.

La solution du problème suivant offrira l'application des principes exposés dans ce chapitre et dans le précédent.

Problème. *Deux vases* A *et* B *dont les capacités sont respectivement* a *et* b, *sont remplis l'un et l'autre d'un mélange d'eau et de vin dont la proportion est connue pour chaque vase : on a deux mesures égales dont la contenance est* c, *et qu'on remplit de la liqueur de chacun des vases, après quoi on verse dans chaque vase la liqueur tirée de l'autre : ayant réitéré la même opération* n *fois successivement, on demande quelle sera alors la proportion de l'eau et du vin dans chaque vase ?*

Soient X, X', X" les quantités d'eau qui restent dans le vase A, après n, $n+1$, $n+2$ opérations consécutives quelconques; et Y, Y', Y" les quantités d'eau correspondantes qui se trouvent dans le vase B. Dans l'opération qui fait passer la quantité d'eau dans le vase A de X à X', on extrait de A une quantité d'eau exprimée par $\frac{c}{a}\mathrm{X}$, et on la remplace par une quantité d'eau tirée du vase B et exprimée par $\frac{c}{b}\mathrm{Y}$; ensorte que la quantité d'eau dans le vase A, après cette opération, est

$$\mathrm{X}' = \mathrm{X} - \frac{c}{a}\mathrm{X} + \frac{c}{b}\mathrm{Y};$$

on trouverait pareillement

$$\mathrm{X}'' = \mathrm{X}' - \frac{c}{a}\mathrm{X}' + \frac{c}{b}\mathrm{Y}':$$

on a d'ailleurs

$$\mathrm{X} + \mathrm{Y} = \mathrm{X}' + \mathrm{Y}';$$

éliminant donc Y et Y' entre ces trois équations, il viendra

$$\mathrm{X}'' = \left(2 - \frac{c}{a} - \frac{c}{b}\right)\mathrm{X}' - \left(1 - \frac{c}{a} - \frac{c}{b}\right)\mathrm{X}:$$

partant, les quantités d'eau successives contenues dans le premier vase, forment une suite récurrente dont l'échelle de re-

lation est

$$+\left(2-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right), \quad -\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right).$$

Cette suite récurrente provient donc du développement d'une fraction dont le dénominateur est

$$1-\left(2-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)x+\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)x^2;$$

c'est-à-dire,

$$(1-x)\left[1-\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)x\right],$$

ou bien encore elle résulte du développement de la somme de deux fractions de la forme

$$\frac{M}{1-x}, \quad \frac{N}{1-\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)x},$$

M et N étant des constantes : or les termes généraux de ces fractions étant, d'après ce qu'on a vu précédemment,

$$Mx^n, \quad N\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^n x^n,$$

le terme général du développement de la fraction génératrice, sera

$$X = M + N\left(1-\frac{c}{a}-\frac{c}{b}\right)^n.$$

Il s'agit actuellement de déterminer M et N d'après l'état initial du mélange dans les deux vases. Soient, à cet effet, α et $\mathcal{C}$ les quantités d'eau qui se trouvaient respectivement dans les deux vases A et B avant la première opération : après cette première opération, il se trouvera dans le vase A

une quantité d'eau exprimée par

$$\alpha - \frac{c}{a}\alpha + \frac{c}{b}\beta,$$

relation qui doit être la même en effet que celle qui a lieu entre X', X et Y : ainsi il faut qu'en faisant successivement

$$\left.\begin{array}{l} n = 0 \\ n = 1 \end{array}\right\} \text{ on ait } \left\{\begin{array}{l} X = \alpha \\ X = \alpha - \frac{c}{a}\alpha + \frac{c}{b}\beta, \end{array}\right.$$

ce qui donne

$$\alpha = M + N,$$

$$\alpha - \frac{c}{a}\alpha + \frac{c}{b}\beta = M + N\left(1 - \frac{c}{a} - \frac{c}{b}\right);$$

d'où l'on tire

$$M = a.\frac{\alpha + \beta}{a + b}, \quad N = \frac{\alpha b - \beta a}{a + b},$$

et partant,

$$X = a.\frac{\alpha + \beta}{a + b} + \frac{\alpha b - \beta a}{a + b}\left(1 - \frac{c}{a} - \frac{c}{b}\right)^n.$$

On pourra donc déterminer le moment où les quantités d'eau contenues dans les deux vases, seront entr'elles dans un rapport donné, ou celui auquel la quantité d'eau contenue dans l'un des vases, sera égale à une quantité donnée. Si, dans l'état initial du mélange, les quantités d'eau contenues dans les deux vases, sont respectivement proportionnelles aux capacités de ces vases, c'est-à-dire, si

$$\alpha : \beta :: a : b, \quad \text{d'où} \quad \alpha b - \beta a = 0,$$

on aura

$$X = a.\frac{\alpha + \beta}{a + b} = \alpha,$$

à cause de $X = \alpha$ pour $n = 0$. Ainsi, dans ce cas particulier, quelque multipliées que soient les opérations, l'état des deux mélanges est invariable.

Soient α', β' les quantités de vin que renferment les deux vases avant la première opération, x et y les quantités de vin respectivement contenues dans les deux vases après la $n^{ième}$ opération : on aura ces quatre formules,

$$X = a.\frac{\alpha+\beta}{a+b} + \frac{\alpha b - \beta a}{a+b}\left(1 - \frac{c}{a} - \frac{c}{b}\right)^n,$$

$$x = a.\frac{\alpha'+\beta'}{a+b} + \frac{\alpha' b - \beta' a}{a+b}\left(1 - \frac{c}{a} - \frac{c}{b}\right)^n,$$

$$Y = b.\frac{\alpha+\beta}{a+b} - \frac{\alpha b - \beta a}{a+b}\left(1 - \frac{c}{a} - \frac{c}{b}\right)^n,$$

$$y = b.\frac{\alpha'+\beta'}{a+b} - \frac{\alpha' b + \beta' a}{a+b}\left(1 - \frac{c}{a} - \frac{c}{b}\right)^n,$$

en observant que

$$X + x = \alpha + \alpha' = a \quad\Big|\quad X + Y = \alpha + \beta$$
$$Y + y = \beta + \beta' = b \quad\Big|\quad x + y = \alpha' + \beta'.$$

Or $\frac{c}{a}$ et $\frac{c}{b}$ étant deux fractions positives, nécessairement la somme $\frac{c}{a} + \frac{c}{b}$ est toujours comprise entre 0 et 2, et par conséquent $1 - \frac{c}{a} - \frac{c}{b}$ est toujours fractionnaire et compris entre $+1$ et -1. Donc les valeurs de X, x, Y, y tendent constamment à se réduire à leurs premiers termes, à mesure que n devient plus grand, et elles y tendent de manière à ce que X et x restent toujours au-dessus, et qu'au contraire Y et y restent toujours au-dessous, si l'on a $\frac{c}{a} + \frac{c}{b} < 1$, ou $c < \frac{ab}{a+b}$; tandis qu'au contraire X et x, Y et y se trouvent alterna-

tivement au-dessus ou au-dessous de cette limite, pour $c > \frac{ab}{a+b}$.

Si l'on avait exactement

$$c = \frac{ab}{a+b}, \quad \text{d'où} \quad 1 - \frac{c}{a} - \frac{c}{b} = 0,$$

les valeurs de X, x, Y, y atteindraient leurs limites respectives à la première opération, de manière que les opérations subséquentes n'y changeraient rien, et qu'alors le mélange se trouverait homogène dans les deux vases, puisqu'on a

$$\frac{X}{x} = \frac{\alpha + \beta}{\alpha' + \beta'} = \frac{Y}{y}.$$

Ainsi en prenant la mesure $c = \frac{ab}{a+b}$, on sera assuré, sans même connaître l'état initial du mélange dans chacun des vases, que ce mélange est exactement le même dans l'un et dans l'autre après une seule opération, et de plus il est aisé de voir que la chose aurait également lieu, lors même que les liquides mêlés dans chaque vase, seraient au nombre de plus de deux.

CHAPITRE XXVI.

Transformation des fractions.

143. Nous avons cru qu'on ne serait pas fâché de trouver ici un extrait d'un mémoire sur cette question, du célèbre *Lagrange*, et consigné dans le cinquième cahier du *Journal de l'École Polytechnique.*

Soit une fraction $\frac{B}{A}$ qu'on suppose moindre que l'unité, et réduite à sa plus simple expression, ensorte que les nombres A et B soient premiers entr'eux. Si l'on demandait de transformer cette fraction en une autre dont le numérateur ou le dénominateur fût donné, il est clair que cela ne serait possible à la rigueur, qu'autant que le nouveau numérateur ou dénominateur serait un multiple dn numérateur ou du dénominateur donné; mais si l'on veut se contenter d'une approximation, le problème est toujours résoluble, et il s'agit de déterminer la nouvelle fraction, de manière qu'elle approche le plus qu'il est possible de la fraction donnée.

Ainsi en désignant par $\frac{m}{a}$ cette nonvelle fraction, dans laquelle nous supposerons que le dénominateur a soit donné, le problème consistera à déterminer m, ensorte que la différence entre les deux fractions $\frac{B}{A}$ et $\frac{m}{a}$, soit la plus petite possible : or cette différence est $\frac{Ba - Am}{Aa}$: il s'agira donc de déterminer m d'après la condition que le nombre $Ba - Am$

devienne le plus petit possible, puisqu'alors la différence sera la plus petite pour le même dénominateur a. Il est visible qu'il n'y aura qu'à prendre pour m le quotient en nombre entier, de Ba par A : alors désignant le reste de la division par R, on aura

$$Ba - Am = R \quad \text{et} \quad \frac{Ba - Am}{Aa} = \frac{R}{Aa},$$

où R est $< A$, ensorte que $\frac{R}{Aa}$ est une différence plus petite qu'elle ne le serait pour tout autre nombre m, à moins qu'on ait $m = \frac{Ba}{A}$, d'où on conclurait $\frac{m}{a} = \frac{B}{A}$, ce qui n'aurait lieu qu'autant que a serait un multiple de A, hypothèse qui n'est pas celle que nous faisons.

Mais on doit observer ici que le reste d'une division peut être positif ou négatif, suivant qu'on prendra pour quotient le nombre qui, multiplié par le diviseur, donnera un produit immédiatement moindre ou plus grand que le dividende. Dans l'arithmétique, on fait toujours la division de manière que les restes soient positifs; mais dans la théorie générale des nombres, on peut employer des restes positifs ou négatifs; et on peut même, par ce moyen, faire ensorte que le reste soit toujours moindre que la moitié du diviseur; car il est évident que si le reste est plus grand que cette moitié; en augmentant ce quotient d'une unité, il faudra retrancher le diviseur du reste, ce qui donnera un reste négatif et moindre que la moitié du diviseur.

Or on peut, pour plus de simplicité, appeler *division en dedans*, celle pour laquelle le reste est positif, et *division en dehors*, celle qui donne un reste négatif; parce qu'en effet, dans la première, le produit du quotient par le diviseur tombe en dedans du dividende, et que, dans la seconde, il tombe en dehors.

Soit donc

$$Ba - Am = \pm C \ldots (1°),$$

où $\pm C$ représente le reste de la division de Ba par A, et m le quotient; on aura

$$\frac{B}{A} = \frac{m}{a} \pm \frac{C}{Aa} \ldots\ldots (1);$$

on pourra donc traiter de la même manière la fraction $\frac{C}{A}$, dans laquelle C est toujours nécessairement moindre que A, et la réduire à une autre fraction connue $\frac{n}{b}$ dont le dénominateur b soit encore donné, et qui approche le plus qu'il est possible, de la même fraction. On fera ainsi

$$Cb - An = \pm D \ldots\ldots (2^\circ),$$

où $\pm D$ sera le reste de la division de Cb par A, et n le quotient. On aura de cette manière,

$$\frac{C}{A} = \frac{n}{b} \pm \frac{D}{Ab} \ldots\ldots (2).$$

On pourra, si l'on veut, continuer de même, en faisant

$$Dc - Ap = \pm E \ldots (3^\circ),$$

et l'on aura

$$\frac{D}{A} = \frac{p}{c} \pm \frac{E}{Ac} \ldots\ldots (3),$$

et ainsi de suite.

144. Nous remarquerons ici que le nombre B étant $< A$, par l'hypothèse, les nombres suivans C, D, etc. seront aussi moindres que A, puisqu'ils sont les restes des divisions de Ba, Cb, etc. par A : d'où il résulte que les numérateurs m, n, p, etc. ne pourront jamais être plus grands que leurs dénominateurs respectifs a, b, c, etc.

Car en considérant l'équation

$$Ba - Am = \pm C,$$

si Ba est $> Am$, on aura

$$Ba - Am = C; \quad \text{donc} \quad Am = Ba - C < Ba;$$

mais A étant $> B$, le nombre m sera nécessairement $< a$. Dans le cas contraire de $Ba < Am$, on aura

$$Ba - Am = - C;$$

donc

$$Am = Ba + C \quad \text{et} \quad A(m-1) = Ba + C - A;$$

mais de ce que $A > C$, il suit que $C - A < 0$; donc

$$A(m-1) < Ba;$$

et comme B est $< A$, $m - 1$ sera nécessairement $< a$; conséquemment,

$$m < a + 1.$$

On démontrera de la même manière par l'équation

$$Cb - An = \pm D,$$

que l'on aura, dans tous les cas,

$$n < b + 1,$$

et ainsi de suite.

Lorsqu'on détermine les numérateurs m, n, etc., de manière que les restes des divisions de Ba, Cb, etc. par A, soient positifs, alors on déduit de la démonstration précédente,

$$m < a, \quad n < b, \quad p < c, \quad \text{etc.}$$

Si l'on substitue successivement cette suite de valeurs $\frac{C}{A}$, $\frac{D}{A}$, etc. tirées des équations (2), (3), etc. dans (1), on aura cette suite de transformées

$$\frac{B}{A} = \frac{m}{a} \pm \frac{C}{Aa} = \frac{m}{a} \pm \frac{n}{ab} \pm \frac{D}{Aab} = \frac{m}{a} \pm \frac{n}{ab} \pm \frac{p}{abc} \pm \frac{E}{Aabc}.$$

etc.

145. Faisons une application à la fraction $\frac{887}{1103}$, et prenons tous les quotiens en dessous : on a , pour $a = 2$,

$$m = 1 \quad \text{et} \quad C = 671 ,$$

ensorte que d'après (1),

$$\frac{887}{1103} = \frac{1}{2} + \frac{671}{2.1103} ;$$

pour $b = 3$, on a

$$n = 1 , \quad D = 910,$$

et d'après (2),

$$\frac{671}{1103} = \frac{1}{3} + \frac{910}{3.1103} ;$$

donc

$$\frac{887}{1103} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{910}{2.3.1103} :$$

pour $c = 4$, on trouve

$$\frac{887}{1103} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{3}{2.3.4} + \frac{331}{2.3.4.1103} :$$

pour $d = 5$, on a

$$\frac{887}{1103} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{3}{2.3.4} + \frac{1}{2.3.4.5} + \frac{552}{2.3.4.5.1103} .$$

En prenant pour e, f, etc. la suite des nombres naturels 6 7, etc., on est conduit à

$$\frac{887}{1103} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2.3} + \frac{3}{2.3.4} + \frac{1}{2 \ldots 5} + \frac{3}{2 \ldots 6} + \frac{1}{2 \ldots 9} + \text{etc.}$$

Ensorte que les fractions approchées en moins, sous les dénominateurs 2, 2.3, 2.3.4, etc., sont

$$\frac{1}{2},\ \frac{4}{6},\ \frac{19}{2.3.4},\ \frac{96}{2.3.4.5},\ \frac{579}{2 \ldots\ldots 6},\ \frac{291817}{2 \ldots\ldots 9}, \ \text{etc.}$$

En prenant $a=2$ et faisant la division en dessus, on trouve

$$\frac{2.887}{1103}=2-\frac{432}{1103}, \quad \text{d'où} \quad \frac{887}{1103}=1-\frac{432}{2.1103};$$

Soit $b=3$: en faisant la division en dessous, on a

$$\frac{3.432}{1103}=1+\frac{193}{1103}, \quad \text{d'où} \quad \frac{432}{1103}=\frac{1}{3}+\frac{193}{3.1103};$$

et conséquemment,

$$\frac{887}{1103}=1-\frac{1}{2.3}-\frac{193}{2.3.1103}.$$

Pour $c=4$, nous ferons la division en dessus, ce qui donnera

$$\frac{4.193}{1103}=1-\frac{331}{1103}, \quad \text{d'où} \quad \frac{193}{1103}=\frac{1}{4}-\frac{331}{4.1103},$$

et conséquemment,

$$\frac{887}{1103}=1-\frac{1}{2.3}-\frac{1}{2.3.4}+\frac{331}{1.2.3.4.1103}.$$

Pour $d=5$, on obtient

$$\frac{887}{1103}=1-\frac{1}{2.3}-\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{2.3.4.5}-\frac{551}{2.3.4.5.1103}.$$

En continuant de cette manière, on est conduit au développement

$$\frac{887}{1103}=1-\frac{1}{2.3}-\frac{1}{2.3.4}+\frac{2}{2\ldots5}-\frac{3}{2\ldots6}+\frac{1}{2\ldots9}, \text{ etc.}$$

La somme des trois premières fractions, donne $\frac{19}{24}$, ainsi qu'on l'a trouvée précédemment; ajoutant la quatrième, on

$\frac{97}{2.3.4.5}$ au lieu de $\frac{96}{2.3.4.5}$; prenant encore la cinquième, on obtient $\frac{579}{2.3.4.5.6}$.

On remarquera donc, à l'égard des signes successifs des séries, que celui du second terme est le même que celui du premier reste; que celui du troisième doit être le produit de ceux des deux premiers restes; que celui du quatrième est le produit de ceux des trois premiers restes, et ainsi de suite.

146. Si les dénominateurs donnés sont tous égaux entr'eux, alors la série prend cette forme plus simple,

$$\frac{B}{A}=\frac{m}{a}\pm\frac{n}{a^2}\pm\frac{p}{a^3}\pm \text{etc.},$$

et il est facile de voir que si l'on fait $a=10$, et qu'on prenne tous les restes positifs, c'est-à-dire, qu'on fasse toutes les divisions en dedans, comme on le pratique dans l'arithmétique, on aura la réduction connue de la fraction $\frac{B}{A}$ en décimales, où les numérateurs m, n, p, etc. sont les caractères successifs de la fraction. En effet, m sera le quotient de la division de aB ou de 10B par A, et C le reste; n le quotient de la division de aC ou de 10C par A, et D le reste, et ainsi de suite, ce qui revient à l'opération connue de la division par décimales.

On remarquera maintenant que tous les dénominateurs étant égaux, les numérateurs m, n, p, etc. doivent nécessairement revenir les mêmes et former une série périodique; car les restes C, D, E, etc. étant tous moindres que le diviseur A, il devra arriver que, dans la suite des opérations, un des restes soit répété. Supposons, par exemple, que le reste E soit égal au reste C : comme n est le quotient, et D le reste de la divi-

sion de Cb par A ; que de même q est le quotient, et F le reste de la division de Ed par A, à cause de $a=b=c=$ etc., on aura $q=n$ et F $=$ D ; et par la même raison, $r=p$, G $=$ E, et ainsi de suite ; de sorte que les quotiens n, p, etc. reviendront toujours à l'infini, et formeront une suite périodique de deux termes. C'est ce qui a lieu, comme on sait, dans l'arithmétique ordinaire, lorsqu'on réduit une fraction quelconque en décimales.

De là on peut conclure réciproquement que si l'on a une série numérique quelconque de la forme

$$\frac{m}{a} \pm \frac{n}{a^2} \pm \frac{p}{a^3} \pm \text{etc.},$$

laquelle aille à l'infini, sans que les numérateurs m, n, p, etc. qui doivent tous être $< a+1$, forment une suite périodique, cette série ne pourra jamais représenter une fraction rationnelle.

147. Considérons maintenant plus particulièrement le cas où les numérateurs m, n, etc. sont donnés, et supposons que ces numérateurs soient tous égaux à l'unité, ce qui rend la forme de la série la plus simple et la plus convergente.

Dans ce cas, les équations (1°.), (2°.), (3°.), etc. deviendront

$$Ba - A = \pm C, \quad Cb - A = \pm D, \quad Dc - A = \pm E, \quad \text{etc.}$$

Ainsi l'on prendra pour a le quotient de la division de A par B, pour b le quotient de la division de A par le reste C ; pour c le quotient de la division de A par le reste D, et ainsi de suite. De sorte que, dans ces opérations, on comparera successivement tous les restes au même dividende A, ce qui rendra la suite des restes décroissante, et celle des quotiens a, b, c, croissante, jusqu'à ce qu'on parvienne à un reste

nul, ce qui terminera l'opération et la série. On aura alors, pour le développement de la fraction,

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{a} \pm \frac{1}{ab} \pm \frac{1}{abc} \pm \text{etc.}$$

Si l'on fait toutes les divisions en dedans, comme à l'ordinaire, les restes C, D, etc. auront le signe négatif, et par conséquent les signes de la série seront alternativement positifs et négatifs. En effet B, C, D, etc. étant $< A$, on a

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{a} - \frac{C}{aA},$$
$$\frac{C}{A} = \frac{1}{b} - \frac{D}{bA},$$
$$\frac{D}{A} = \frac{1}{c} - \frac{E}{cA},$$
etc.,

où chacun des restes C, D, E, etc. est négatif, et les substitutions successives donneront

$$\frac{B}{A} = \frac{1}{a} - \frac{1}{ab} + \frac{D}{abA},$$
$$\frac{B}{A} = \frac{1}{a} - \frac{1}{ab} + \frac{1}{abc} - \frac{E}{abcA}$$
etc.

On remarque que le signe du second terme est le même que celui du premier reste; que le signe du troisième terme doit être le produit de ceux des deux premiers restes; que le signe du quatrième doit être le produit de ceux des trois premiers restes, et ainsi de suite. Pour que la série n'ait que des termes positifs, il faudra que les divisions successives soient toutes en dehors.

Au reste, si l'on voulait avoir la série la plus convergente, il faudrait faire chaque division en dedans ou en dehors, suivant qu'elle donnera le reste le plus petit.

148. Comme cette manière de convertir une fraction en série est peu connue, et peut être utile dans beaucoup de cas, nous l'éclaircirons par quelques exemples.

Soit donc la fraction $\frac{887}{1103}$, et faisons les divisions en dedans, nous aurons ce tableau d'opérations, où on a écrit le diviseur à gauche du dividende, pour plus de commodité :

```
887|1103|1
   | 887|
    216|1103|5
       |1080|
         23|1103|47
           |1081|
             22|1103|50
               |1100|
                   3|1103|367
                    |1101|
                        2|1103|551
                         |1102|
                             1|1103|1103
                              |1103|
                                 0
```

Les restes sont 216, 23, 22, 3, 2, 1, et les quotiens, 1, 5, 47, 50, 367, 551, 1103, de sorte que l'on aura cette série alternative,

$$\frac{887}{1103} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5.47} - \frac{1}{5.47.50} + \frac{1}{5.47.50.367}$$
$$- \frac{1}{5.47.50.367.551} + \frac{1}{5.47.50.367.551.1103}.$$

Prenons la fraction qui exprime le rapport de la circonférence au diamètre, et qui est en décimales (112),

$$3{,}141592\ 653589\ 793238\ 462643\ 38 \text{ etc.}:$$

en opérant sur la fraction décimale réduite en fraction ordinaire, laquelle est

$$\frac{141592\ 653589\ 793238\ 462643\ 38, \text{ etc.}}{1000000\ 000000\ 000000\ 000000\ 00, \text{ etc.}};$$

et faisant les divisions en dedans ou en dehors, suivant qu'il sera nécessaire, on trouvera les quotiens 7, 113, 4739, 47051, 499762, et l'on aura la série très-convergente,

$$3+\frac{1}{7}-\frac{1}{7.113}-\frac{1}{7.113.4739}+\frac{1}{7.113.4739.47051}$$
$$+\frac{1}{7.113.4739.47051.499762}.$$

La somme des deux premiers termes donne le rapport $\frac{22}{7}$, trouvé par *Archimède*; et en y ajoutant le troisième, on a celui de *Métius* $\frac{355}{113}$.

Nous regrettons de ne pouvoir faire connaître en entier cet excellent écrit de *Lagrange*, dans lequel ce géomètre traite la question de réduire une fraction à d'autres fractions exprimées en moindres termes, et qui soient les plus approchantes qu'il est possible de la fraction donnée ; problème, ajoute-t-il, l'un des plus intéressans de l'arithmétique, soit par les artifices qu'il exige, soit par les usages dont il est susceptible.

149. Cependant nous ne pouvons nous dispenser de relater ici une démonstration de l'incommensurabilité de la circonférence avec le diamètre, laquelle m'a été communiquée par *Haros*, employé à l'ancien bureau du Cadastre, qui a fait sur plusieurs points d'analyse, des recherches intéressantes.

Reprenons le développement

$$\frac{B}{A}=\frac{m}{a}-\frac{n}{ab}+\frac{p}{abc}-\frac{q}{abcd}+\text{etc.}:$$

lorsque le rapport $\frac{B}{A}$ est rationnel, la série précédente se termine, parce que tous les restes C, D, etc. différens entr'eux, sont moindres que A ; donc toute série de cette forme qui aura un nombre infini de termes, ne pourra représenter qu'une quantité irrationnelle ou incommensurable. La formule suivante,

$$\sin x=x-\frac{x^3}{1.2.3}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5}-\frac{x^7}{1.2.3.4.5.6.7}+\text{etc.},$$

étant de même forme que la précédente, et le nombre des termes infini, il en résulte que si l'on prend pour x une quantité rationnelle, c'est-à-dire, une quantité qui ait un rapport fini avec le rayon ou l'unité, $\sin x$ sera incommensurable. Cette conclusion est encore due à M. *Lagrange*, et elle fournit à *Haros* la démonstration de l'énoncé.

En effet, celui qui prétendra avoir trouvé la quadrature du cercle, ou le rapport exact du diamètre à la circonférence, pourra toujours assigner le rayon et le quart de la circonférence d'un cercle par deux nombres entiers.

Soient donc R le rayon d'un cercle, et Q la longueur exacte du quart de la circonférence : d'après la formule ci-dessus, on aura pour le rayon R,

$$\sin x=\frac{x}{R}-\frac{x^3}{2.3R^3}+\frac{x^5}{2.3.4.5R^5}-\text{etc.},$$

et faisant $x=Q$, on aura

$$\sin\frac{\pi}{2}=\frac{Q}{R}-\frac{Q^3}{2.3R^3}+\frac{Q^5}{2.3.4.5R^5}-\text{etc.},$$

série de même forme que

$$\frac{B}{A}=\frac{m}{a}-\frac{n}{ab}+\frac{p}{abc}-\text{etc.}:$$

or le nombre des termes de cette série étant infini, et R et Q des nombres entiers, il faut en conclure que $\sin\frac{\pi}{2}$ est incommensurable, ce qui est absurde, puisque ce sinus est égal à R, nombre rationnel : donc l'hypothèse de Q rationnel ne peut être admise pour le cas où le rayon serait rationnel ; Q est donc une quantité incommensurable pour un rayon rationnel : il ne peut donc exister aucun rapport fini entre le diamètre et la circonférence.

CHAPITRE XXVII.

Développement de la théorie donnée par M. Laplace ; pour l'élimination au premier degré.

150. Ce chapitre dû, en partie, à M. *Gergonne*, est extrait du n° V du tome IV des *Annales Mathématiques*. Avant d'entrer en matière, ce géomètre s'exprime en ces termes : « *Cramer* est, » je crois, le premier qui ait remarqué la loi que suivent les » valeurs des inconnues dans les équations du premier degré, » et qui ait indiqué des méthodes pour construire ces valeurs, » sans passer par le calcul de l'élimination. Postérieurement » *Bezout*, dans sa *Théorie générale des Équations algébriques*, » a apporté quelques modifications à ces méthodes ; mais » quoiqu'il fût sur la voie d'une démonstration proprement » dite, elles sont demeurées entre ses mains comme entre » celles de *Cramer*, le résultat d'une simple induction.

» Ce n'est seulement qu'en 1772, que M. *Laplace*, dans » les *Mémoires de l'Académie des Sciences*, a démontré » pour la première fois, d'une manière générale et rigoureuse, » l'exactitude de ces formules. Mais soit que la précieuse » collection où la théorie de cet illustre Géomètre est expo- » sée, ne se trouve pas dans les mains de tout le monde, soit » plutôt que M. *Laplace* ne présentant, pour ainsi dire, » cette théorie qu'en passant, ne lui ait pas donné le dévelop- » pement suffisant pour la bien faire apprécier, on a toujours » continué depuis lors, dans tous les Traités d'Algèbre, à

» n'appuyer les méthodes de construction des valeurs générales des inconnues, que sur une simple induction (*). »

151. Dans ce qui va suivre, on appellera *nombres de même espèce*, deux nombres qui seront l'un et l'autre pairs, ou l'un et l'autre impairs : on changera donc l'espèce d'un nombre, en l'augmentaut ou en le diminuant d'une unité, ou plus généralement, d'un nombre impair quelconque d'unités; et, au contraire, on ne changera pas l'espèce d'un nombre en l'augmentant ou en le diminuant d'un nombre quelconque pair d'unités.

152. Il sera encore vrai de dire que si l'on change plusieurs fois de suite, l'espèce d'un nombre, elle se trouvera être ou n'être plus la même, suivant que le nombre des changemens sera pair ou impair.

153. Soient les lettres a, b, c......, toutes différentes les une des autres, au nombre de m, et concevons ces lettres écrites les unes à la suite des autres, dans un ordre arbitraire : si deux d'entr'elles, consécutives ou non dans l'arrangement total, ne suivent pas l'ordre alphabétique, nous dirons qu'elles forment *une inversion* : nous dirons donc que l'arrangement total offre autant d'inversions qu'il s'y rencontre de systèmes de deux lettres qui ne sont pas écrites suivant l'ordre alphabétique.

154. On voit donc que si les m lettres se trouvent écrites suivant l'ordre alphabétique, le nombre des inversions sera nul; et que si elles sont écrites dans un ordre absolument inverse de celui-là, elles n'offriront que des inversions dont le nombre sera $\frac{m(m-1)}{2}$: en effet, ce nombre des inversions est la moitié de celui des arrangemens deux à deux de

(*) J'avais donné la démonstration de M. *Laplace* dans la première édition de cette section.

m lettres, puisque, dans une moitié de ces arrangemens, les lettres se suivent dans l'ordre alphabétique, tandis que dans l'autre moitié elles sont dans un ordre contraire (*).

155. Soit M un arrangement quelconque des m lettres que nous considérons; permutons-y entr'elles deux lettres consécutives quelconques, sans toucher aux autres, et soit M' le nouvel arrangement qui en résulte : je dis que dans M et M', les nombres d'inversions sont d'espèces différentes. En effet, les deux lettres permutées devant nécessairement former une inversion dans l'un des arrangemens M et M', et n'en point former dans l'autre, et toutes les autres lettres demeurant, dans les deux arrangemens, disposées de la même manière, soit entr'elles, soit par rapport à celles-là, il s'ensuit que, soit en plus soit en moins, le nombre des inversions de M' diffère seulement d'une unité, du nombre des inversions de M : ces deux nombres sont donc d'espèces différentes.

156. Il suit de là que si l'on déplace une seule lettre d'une manière quelconque, l'espèce du nombre des inversions restera la même ou se trouvera changée, suivant que le nombre des places parcourues par cette lettre, sera pair ou impair. En effet, on peut concevoir que le déplacement ne s'opère que successivement, par la permutation continuelle de la lettre en question avec sa voisine, soit de droite, soit de gauche; or à chaque permutation partielle, l'espèce du nombre des inversions changera; donc quand la totalité des déplacemens de la lettre, sera effectuée, l'espèce du nombre des inversions se trouvera la même, ou elle sera changée, selon que le nombre des permutations partielles ou des places parcourues, sera pair ou impair.

(*) Pour que deux lettres soient dites *suivant l'ordre alphabétique*, il n'est pas nécessaire qu'elles soient consécutives dans cet ordre, il suffit que celle qui est à la droite de l'autre, dans la série des m lettres, soit aussi à sa droite dans l'alphabet.

157. Concluons de là que si l'on déplace deux lettres pour leur faire parcourir, en totalité, un nombre impair de rangs, l'espèce du nombre des inversions se trouvera nécessairement changée. Il est clair, en effet, qu'il faut pour cela que l'une des lettres parcoure un nombre pair de rangs, et que l'autre en parcoure ensuite un nombre impair, ce qui doit nécessairement changer l'espèce primitive du nombre des inversions.

158. Donc si l'on permute entr'elles deux lettres non consécutives, on changera nécessairement l'espèce du nombre des inversions; car soit n le nombre des lettres interposées : on pourra d'abord porter la lettre la plus à gauche, immédiatement à gauche de l'autre, ce qui lui fera parcourir n places ou intervalles; puis remettre cette dernière à la place de la première; et comme elle sera obligée de passer par-dessus celle-ci, elle se trouvera avoir parcouru $n+1$ places : le nombre total des places parcourues par les deux lettres étant $2n+1$, l'espèce du nombre des inversions se trouvera changée (156).

159. Appliquons maintenant ces principes.

Soit écrite successivement la lettre b à la gauche et à la droite de la lettre a, en changeant le signe au changement de place; on formera ainsi le binome,

$$ab - ba.$$

Soit introduite successivement, et en allant de gauche à droite, la lettre c dans chacun des termes de ce binome, en lui faisant parcourir dans chacun, toutes les places de droite à gauche, et changeant encore le signe à chaque changement de place : on formera ainsi le polynome

$$abc - acb + cab - bac + bca - cba.$$

Concevons que l'on en fasse de même successivement pour les lettres suivantes d, e, f, etc. jusqu'à la dernière inclu-

sivement, en suivant toujours exactement l'ordre alphabétique : on parviendra de cette manière à un polynome homogène P, de m dimensions ou du degré m, dont les termes au nombre de $1.2.3 \ldots m$ (Ire sect.), sont tous les arrangemens ou permutations dont m lettres sont susceptibles, en les faisant entrer toutes dans chaque arrangement. Je vais prouver que, d'après ce mode de génération, les termes de ce polynome auront le signe $+$ ou le signe $-$, suivant que le nombre des inversions qu'ils présentent, sera pair ou impair.

Il est d'abord aisé de voir que les deux résultats que nous venons de former, satisfont à cette loi : supposons qu'elle ait encore lieu dans l'avant-dernier polynome du degré $m-1$, de manière que chacun de ses termes, porte déjà le signe qui convient au nombre de ses inversions. L'introduction de la dernière lettre à la droite de l'un quelconque de ces termes, ne changera rien à cet état de choses, puisqu'elle n'en changera ni le signe, ni le nombre des inversions ; à mesure que cette lettre avancera vers la gauche, l'espèce du nombre des inversions se trouvera alternativement changée et rétablie (156) ; mais le signe se trouvant aussi, par hypothèse, alternativement changé et rétabli ; la loi dont il est question continuera donc à subsister dans le dernier polynome, si, comme nous le supposons, elle a lieu dans l'avant-dernier : puis donc qu'elle subsiste dans les deux premiers, il s'ensuit qu'elle est générale.

160. Concevons actuellement que, dans chacun des termes du polynome P, on affecte chaque lettre d'un indice égal au rang de cette lettre, en cette manière,

$$a_1b_2 - b_1a_2,$$

$$a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 + c_1a_2b_3 - b_1a_2c_3 + b_1c_2a_3 - c_1b_2a_3,$$

etc. :

on formera ainsi un nouveau polynome D qui n'aura plus de termes semblables. Je vais prouver que si, dans ce polynome D, on change une lettre quelconque en une autre, en laissant

d'ailleurs celle-ci telle qu'elle est, et à sa place, et sans toucher aux indices, tout le polynome s'anéantira.

Supposons, en effet, que l'on change h en g, sans toucher à g ni aux indices : soient, pour un terme pris au hasard dans le polynome, p et q les indices respectifs de g et h ; ce polynome renfermant toutes les permutations, doit avoir un autre terme ne différant uniquement de celui-là qu'en ce que h y porte l'indice p, et g l'indice q, et de plus ces deux termes doivent avoir des signes contraires (155) ; ils se détruiront donc, lorsqu'on changera h en g.

161. La lettre a devant se trouver dans tous les termes du polynome D, et ne pouvant se trouver qu'une seule fois dans chacun, ce polynome peut être ordonné suivant les indices de cette lettre ainsi qu'il suit :

$$D = A_1a_1 + A_2a_2 + A_3a_3 + \ldots\ldots + A_ma_m \ldots\ldots (1),$$

A_1, A_2, $A_3 \ldots\ldots$ étant des fonctions de b_1, c_1, d_1; b_2, c_2, $d_2 \ldots\ldots$, b_m, c_m, d_m : alors, d'après ce qui vient d'être dit, on devra avoir

$$\left.\begin{aligned} o &= A_1b_1 + A_2b_2 + A_3b_3 + \ldots\ldots + A_mb_m \\ o &= A_1c_1 + A_2c_2 + A_3c_3 + \ldots\ldots + A_mc_m \end{aligned}\right\} \ldots (2),$$

etc.,

et le polynome D ordonné par rapport à toute autre lettre, donnerait lieu à des conséquences analogues.

Ces principes posés, soient entre les m inconnues x, y, $\ldots\ldots z$, les m équations

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z + \ldots\ldots &= k_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z + \ldots\ldots &= k_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z + \ldots\ldots &= k_3 \\ &\vdots \\ a_mx + b_my + c_mz + \ldots\ldots &= k_m \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (3):$$

en prenant la somme de leurs produits respectifs par A_1, A_2, $A_3 \ldots\ldots A_m$, et ayant égard aux équations (1), (2), on aura

$$Dx = A_1k_1 + A_2k_2 + A_3k_3 + \ldots\ldots A_mk_m \ldots\ldots (4),$$

d'où

$$x = \frac{A_1k_1 + A_2k_2 + A_3k_3 + \ldots\ldots + A_mk_m}{A_1a_1 + A_2a_2 + A_3a_3 + \ldots\ldots + A_ma_m}.$$

En ordonnant le polynome D suivant les indices de b, et désignant alors les coefficiens par B_1, B_2, etc., on aura des équations analogues à (2), en changeant dans celles-ci, A_1, $A_2 \ldots\ldots$ en B_1, $B_2 \ldots\ldots$, b_1, b_2, en a_1, $a_2 \ldots\ldots$, et la valeur de y aura même dénominateur que celle de x : donc le dénominateur commun des valeurs des inconnues, n'est autre chose que le polynome D, et on en conclut le numérateur de la valeur de chacune d'elles, en y mettant la lettre qui représente le terme tout connu, à la place de celle qui représente le coefficient de cette inconnue, toujours sans toucher aux indices (Alg. I[re] sect.).

Pour trois équations entre trois inconnues, l'indice $m=3$, et on a (160)

$$D = A_1a_1 + A_2a_2 + A_3a_3, \quad A_1 = b_2c_3 - c_2b_3,$$
$$A_2 = c_1b_3 - b_1c_3, \quad A_3 = b_1c_2 - c_1b_2.$$

162. Si dans les équations (3) on change k_1, k_2, $k_3 \ldots k_{(m)}$ en $-k_1v$, $-k_2v$, $-k_3v \ldots\ldots -k_mv$, v étant une $(m+1)^{ième}$ inconnue, ces équations, toujours au nombre de m, deviendront

$$a_1x + b_1y + c_1z + \ldots\ldots + k_1v = 0,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + \ldots\ldots + k_2v = 0,$$
$$\text{etc.},$$

et donneront, par un semblable changement opéré dans l'équation (4),

$$Dx = -(A_1k_1 + A_2k_2 + A_3k_3 + \ldots\ldots + A_mk_m)v.$$

Or comme v, dans cette équation, demeure arbitraire, on pourra poser

$$v = -Du,$$

et on aura ainsi

$$x = (A_1k_1 + A_2k_2 + \ldots\ldots + A_mk_m)\,\omega,$$

formule dans laquelle ω reste indéterminée; on aurait des valeurs analogues pour y, z, etc.

Ainsi la même méthode qui a fait trouver les valeurs générales des inconnues, dans les problèmes déterminés du premier degré, nous donne encore les valeurs entières les plus générales des inconnues dans les problèmes indéterminés de ce degré; du moins lorsque les équations n'ont point de terme tout connu, et que le nombre des inconnues n'y surpasse que d'une seule unité le nombre de ces équations.

163. Mais de ce cas particulier on peut facilement passer aux autres. Si, en effet, le nombre des inconnues surpasse de n unités celui des équations, il ne s'agira que de joindre aux équations données, $n - 1$ autres équations de même forme, affectées de coefficiens arbitraires : la question se trouvera ramenée au cas que nous venons de considérer, avec cette différence qu'au lieu d'une seule arbitraire, les valeurs des inconnues, en contiendront plusieurs (25).

Enfin, la même méthode peut conduire encore aux équations de condition qui doivent avoir lieu entre les coefficiens, lorsque les équations sont en plus grand nombre que les inconnues. Soient, en effet, $m + n$ équations entre m inconnues : en tirant des m premières équations, les valeurs des m inconnues pour les substituer dans les n suivantes, on obtiendra ainsi les équations de condition demandées.

164. Nous ferons connaître la démonstration que M. *Laplace* a donnée à ce sujet, dans le mémoire ayant pour titre: *Recherches sur le Calcul Intégral et sur le Système du Monde* (*Mémoires de l'Académie* pour 1772, 2ᵉ partie), et dont la précédente n'est que le développement.

Je suppose que l'on ait entre les n inconnues μ, μ', μ'', etc.,

les n équations sans termes connus,

$$o = {}^1a.\mu + {}^1b.\mu' + {}^1c.\mu'' + \text{etc.},$$
$$o = {}^2a.\mu + {}^2b.\mu' + {}^2c.\mu'' + \text{etc.},$$
$$o = {}^3a.\mu + {}^3b.\mu' + {}^3c.\mu'' + \text{etc.},$$
$$\text{etc.};$$

les nombres 1, 2, 3, etc. placés à gauche des lettres a, b, c, etc. étant ce que je nommerai dans la suite *indices* de ces lettres : on déterminera ainsi l'équation de condition qui doit avoir lieu entre les coefficiens ${}^1a$, ${}^1b$, ${}^1c$, etc., ${}^2a$, ${}^2b$, ${}^2c$, etc., pour que trois équations soient satisfaites, autrement que par les valeurs $x = o$, $y = o$, $z = o$ (Ire sect., chap. XVII).

Lorsque dans un produit tel que ${}^1d.{}^2c.{}^3b.{}^4a$ dont les indices suivent la loi des nombres naturels 1, 2, 3, 4, une lettre telle que b précède une autre lettre dont elle est précédée dans l'ordre alphabétique, j'appelle cela *variation*, et un terme a d'autant plus de ces variations, que cette circonstance peut arriver de plus de manières : par exemple, dans le terme ${}^1d.{}^2c.{}^3b.{}^4a$, la lettre d précède c, b, a, dont elle est précédée dans l'ordre alphabétique, ce qui forme trois variations; c précède b et a, ce qui donne deux variations, et b précède a, d'où résulte encore une variation : ainsi ce terme renferme six variations. Cela posé, formez toutes les permutations possibles entre toutes les lettres a, b, c, d, e, etc, et, dans chaque permutation, donnez l'indice 1 à la première lettre, l'indice 2 à la seconde, l'indice 3 à la troisième, etc.; ensuite faites précéder chaque permutation du signe $+$, si le nombre des variations y est nul ou pair, et du signe $-$, si ce nombre est impair : égalant à zéro la somme de tous ces termes, vous aurez formé l'équation de condition demandée.

Cette règle est due à *Cramer;* mais elle peut être simplifiée par le procédé suivant donné par *Bezout.*

Ecrivez la lettre a, et avec cette lettre et la lettre b formez

toutes les permutations possibles, en écrivant d'abord la lettre b la dernière, ensuite l'avant-dernière, puis changeant de signe lorsque b change de place, et vous aurez $+ab-ba$.

Avec ces deux permutations et la lettre c, formez toutes les permutations possibles, en écrivant d'abord dans chaque terme la lettre c la dernière, puis l'avant-dernière, et enfin la première, puis changeant de signe toutes les fois que c change de place, et vous aurez

$$+abc-acb+cab-bac+bca-cba.$$

Combinez de la même manière toutes ces permutations avec la lettre d, et ainsi de suite, en employant autant de lettres qu'il y a d'inconnues μ, μ', etc.; cela posé, dans chaque terme, donnez l'indice 1 à la première lettre, l'indice 2 à la seconde, l'indice 3 à la troisième, etc.; égalant à zéro la somme de tous ces termes, vous aurez les équations de condition pour que deux, trois, etc. équations déterminées du premier degré à deux, à trois, etc. inconnues, soient possibles.

En effet, on a vu (Ire sect., chap. XVII) que les conditions

$$ab'-ba'=0,$$

$$ab'c''-ac'b''+ca'b''-ba'c''+bc'a''-cb'a''=0,$$

formées d'après cette règle, en changeant les indices en accens, résultaient comme conséquences des systèmes d'équations

$$1^{\circ}\ldots\ldots\begin{cases}ax+by=0\\ a'x+b'y=0:\end{cases}$$

$$2^{\circ}\ldots\ldots\begin{cases}ax+by+cz=0\\ a'x+b'y+c'z=0\\ a''x+b''y+c''z=0.\end{cases}$$

La règle que nous venons de prescrire est, comme l'on voit, d'un usage fort commode, et il est facile de s'assurer qu'elle

rentre dans celle de *Cramer*. Cela est d'abord évident pour les deux permutations $+ab - ba$: si on les combine avec la lettre c, il est aisé de voir qu'en écrivaut dans ces deux termes la lettre c la dernière, le nombre des variations dans chacun d'eux ne changera pas; aussi conservent-ils le même signe qu'ils avaient : mais si, dans ces termes, on écrit la lettre c l'avant-dernière, le nombre des variations est alors augmenté d'une unité; et, suivant la règle, ils changent de signe; d'où il suit généralement que les termes dont le nombre des variations sera zéro ou pair, auront le signe $+$, et les autres le signe $-$. D'ailleurs le nombre de termes dont est composée l'équation de condition, est, suivant les deux méthodes, égal à $1.2.3.\ldots\ldots n$, s'il y a n lettres, et tous ces termes sont différens les uns des autres; donc l'équation de condition sera la même dans les deux cas. Nous allons maintenant démontrer la règle de *Bezout*, comme étaut la plus simple.

165. Si au lieu de combiner la lettre a avec la lettre b, ensuite ces deux lettrès avec c, et ainsi de suite, c'est-à-dire, si au lieu de combiner les lettres a, b, c, d, e, etc. dans l'ordre a, b, c, d, e, etc., on les eût combinées dans l'ordre a, c, b, d, e, etc., ou a, d, b, c, e, etc., ou a, e, b, c, d, etc., ou etc.; je dis qu'on aurait toujours eu la même quantité, à la différence des signes près.

Pour démontrer ce théorème, nommons, en général, *résultante*, la quantité donnée par l'une quelconque de ces combinaisons, ensorte que la première résultante soit celle qui vient de la combinaison suivant l'ordre a, b, c, d, e, etc.; que la seconde résultante soit celle qui vient de la combinaison suivant l'ordre a, c, b, d, e, etc.; que la troisième résultante soit due à la combinaison suivant l'ordre a, d, b, c, e, etc., et ainsi de suite : cela posé, il est clair que toutes ces résultantes renferment le même nombre de termes, et précisément les mêmes, puisqu'elles sont composées de

tous les termes qui peuvent résulter de la combinaison des n lettres a, b, c, d, e, etc., disposées entr'elles de toutes les manières possibles; il ne peut donc y avoir de différence entre deux résultantes que dans les signes de chacun de leurs termes : or, il est visible que la première résultante donne la seconde, lorsqu'on change dans cette première b en c, et réciproquement ; mais ce changement ne peut qu'augmenter ou que diminuer d'une unité le nombre des variations de chaque terme (155) ; d'où il suit que, dans la seconde résultante, tous les termes dont le nombre des variations est impair, auront le signe $+$, et les autres le signe $-$; partant, cette seconde résultante n'est que la première prise négativement.

Il est visible pareillement que la seconde résultante donnera la troisième, en y changeant c en c, et réciproquement : or, ce changement ne peut qu'augmenter ou diminuer d'une unité, le nombre des variations de chaque terme ; donc les termes dont le nombre des variations est zéro ou pair dans la troisième résultante, auront le signe $+$, et les autres le signe $-$. De là on conclura généralement que si l'on nomme R la première résultante, R′ la seconde, R″ la troisième, etc., on aura

$$R' = -R, \quad R'' = R, \quad R''' = -R, \quad \text{etc.}$$

Il suit de là que si, dans la première résultante, on change a en b, et réciproquement, ou a en c, et réciproquement, ou a en d, et réciproquement, etc., on aura toujours la même résultante, à la différence des signes près. En effet, l'échange de a en b et de b en a, ne signifie autre chose, sinon qu'au lieu de combiner $+ab - ba$ avec les lettres c, d, e, etc., on combine $-ab + ba$ avec les mêmes lettres, ce qui donne la première résultante prise en $-$: pareillement l'échange de a en c et de c en a, indique qu'au lieu de combiner $+ac - ca$ avec les lettres b, d, e, etc., on combine $-ac + ca$ avec les mêmes lettres, ce qui donne la

seconde résultante prise en —, ou la première prise en +, et ainsi de suite.

Il suit encore du théorème précédent que si, dans la première résultante, on écrit b, ou c, ou d, etc. partout où est a, cette résultante sera identiquement nulle. En effet, par exemple, la première résultante est, d'après ce que nous venons de voir, égale à moins la seconde, c'est-à-dire, à moins celle qui résulte de la combinaison suivant l'ordre a, c, b, d, e, etc.; or en combinant d'abord les deux lettres a et c, on a $+ac - ca$: si l'on combine ces deux termes avec la lettre b, ensuite ceux-ci avec la lettre d, etc., il est visible que la quantité qui en résultera, deviendra identiquement nulle en écrivant c pour a et conservant c, puisqu'alors $ac - ca$ devient identiquement nul. Cette conclusion a été autrement établie (160).

166. Je suppose maintenant que l'on ait les trois équations

$$\begin{aligned} 0 &= {}^1a.\mu + {}^1b.\mu' + {}^1c.\mu'', \\ 0 &= {}^2a.\mu + {}^2b.\mu' + {}^2c.\mu'', \\ 0 &= {}^3a.\mu + {}^3b.\mu' + {}^3c.\mu'' : \end{aligned}$$

je forme d'abord la résultante des trois lettres a, b, c, suivant l'ordre a, b, c, ce qui donne

$${}^1a.{}^2b.{}^3c - {}^1a.{}^2c.{}^3b + {}^1c.{}^2a.{}^3b - {}^1b.{}^2a.{}^3c + {}^1b.{}^2c.{}^3a - {}^1c.{}^2b.{}^3a,$$

ou

$${}^1a[{}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b] + {}^2a[{}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c] + {}^3a[{}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b] :$$

je multiplie ensuite la première des équations ci-dessus par ${}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b$, la seconde par ${}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c$, la troisième par ${}^1b.{}^2c - {}^1c{}^2b$, et j'ajoute les produits, ce qui donne

$$\begin{aligned} 0 = \mu\,&[{}^1a({}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b) + {}^2a({}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c) + {}^3a({}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b)] \\ + \mu'&[{}^1b({}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b) + {}^2b({}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c) + {}^3b({}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b)] \\ + \mu''&[{}^1c({}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b) + {}^2c({}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c) + {}^3c({}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b)] : \end{aligned}$$

or il suit, de ce que nous avons dit plus haut, que les coefficiens de μ' et de μ'' sont identiquement nuls, puisqu'ils ne sont que la résultante des trois lettres a, b et c, dans laquelle on écrit b ou c partout où est la lettre a : donc on aura pour l'équation de condition demandée

$$o = {}^1a({}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b) + {}^2a({}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c) + {}^3a({}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b),$$

c'est-à-dire, la résultante de la combinaison des trois lettres a, b, c, égalée à zéro, en observant qu'aucune des racines μ, μ', μ'', etc. n'est égale à zéro. On démontrerait la même chose sur un nombre quelconque d'équations.

167. Pour démontrer l'analogie de ce qui vient d'être dit avec l'élimination des équations déterminées et complètes du premier degré, je suppose qu'on ait les trois équations

$$\begin{aligned} {}^1p &= {}^1a.\mu + {}^1b.\mu' + {}^1c.\mu'', \\ {}^2p &= {}^2a.\mu + {}^2b.\mu' + {}^2c.\mu'', \\ {}^3p &= {}^3a.\mu + {}^3b.\mu' + {}^3c.\mu''. \end{aligned}$$

Je multiplie, comme ci-dessus, la première par $({}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b)$, la seconde par $({}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c)$, la troisième par $({}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b)$, je les ajoute ensemble, et j'observe que le coefficient de μ' et celui de μ'' sont identiquement nuls dans l'équation qui en résulte, d'où je conclus

$$\mu = \frac{{}^1p({}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b) + {}^2p({}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c) + {}^3p({}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b)}{{}^1a({}^2b.{}^3c - {}^2c.{}^3b) + {}^2a({}^1c.{}^3b - {}^1b.{}^3c) + {}^3a({}^1b.{}^2c - {}^1c.{}^2b)}:$$

on voit donc que le numérateur de l'expression de μ se forme du dénominateur, en y changeant a en p : on aura ensuite μ' ou μ'', en changeant, dans l'expression de μ, a en b ou c, et réciproquement : mais en changeant dans le dénominateur de μ, a en b, et réciproquement, on a toujours, par ce qui précède, la même quantité, au signe près : donc la valeur de μ' sera $\frac{K}{-R}$, R étant le dénominateur de μ, ou, ce qui revient au

même, la première résultante des trois lettres a, b, c : K se formera de $-$ R, en y changeant b en p : donc

$$\mu' = \frac{K}{-R} = \frac{-K}{R}.$$

Ainsi l'expression de μ' est réduite au même dénominateur que celui de μ, et les numérateurs de ces expressions se forment du dénominateur commun R, en y changeant a en p pour μ, et b en p pour μ'. C'est effectivement par ce procédé qu'on passe de la valeur x à celle de y (Ire sect., ch. XVII). On démontrerait de la même manière que l'expression de μ'' a R pour dénominateur, et que son numérateur se forme de R, en y changeant c en p. Cette règle a généralement lieu, quel que soit le nombre des équations.

168. M. *Laplace* donne ensuite un procédé fort simple qui abrège considérablement le calcul de l'équation de condition, procédé sur lequel nous renvoyons au mémoire cité.

CHAPITRE XXVIII.

Recherche directe du terme général du développement d'une puissance quelconque d'un polynome, et méthode facile pour exécuter le développement de ces puissances.

169. QUOIQUE la question énoncée se trouve résolue dans les n.os 108 et 109 du chapitre XVIII, nous croyons cependant nécessaire de la reprendre ici pour la traiter d'une manière plus directe, plus étendue et plus appropriée aux nombreuses applications que nous devons en faire dans le chapitre suivant. Ce qui suit est tiré de deux mémoires, l'un de M. *Gergonne*, l'autre de M. *Lavernède*, consignés dans le n° VII du tome II des *Annales de Mathématiques*, collection précieuse par les excellens matériaux qu'elle contient.

On sait que le nombre des arrangemens de m lettres toutes différentes, est

$$1.2.3 \ldots\ldots\ldots (m-1)\, m.$$

Si plusieurs de ces lettres, au nombre de α, se changent toutes en a, il est clair que tous les arrangemens dans lesquels les lettres restantes seront disposées de la même manière, ou occuperont les mêmes places, se réduiront à un seul : or il y aura autant de ces arrangemens qu'il y a de manières de permuter entr'elles les lettres, qui d'inégales qu'elles étaient, sont devenues égales ; mais ce nombre est, d'après la formule pré-

cédente ; $1.2.3\ldots\ldots\alpha$, et doit conséquemment, dans le cas présent, devenir diviseur de la formule ci-dessus ; et comme le même raisonnement est applicable à tout autre groupe de lettres devenues égales, on peut établir que si l'on a α lettres égales à a, $\mathcal{C}$ lettres égales à b, γ lettres égales à c, etc., de manière qu'on ait,

$$\alpha+\mathcal{C}+\gamma+\text{etc.}=m,$$

le nombre des divers arrangemens dont ces m lettres seront susceptibles, aura pour expression,

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots(m-1)m}{1.2.3\ldots\ldots\alpha\times1.2.3\ldots\mathcal{C}\times1.2.3\ldots\gamma.\text{etc.}}\ldots\text{(A)},$$

nombre qui exprime de combien de manières on peut écrire, les uns à côté des autres, les facteurs du monome $a^{\alpha}b^{\mathcal{C}}c^{\gamma}\ldots$

Ces préliminaires posés, qu'il soit question d'assigner la forme du développement de $(a+b+c+\ldots\ldots+r)^m$, ou plutôt celle de son terme général. Le moyen le plus naturel de parvenir à ce développement, si l'indétermination de l'exposant m et du nombre des termes du polynome, ne le rendait pas impraticable, serait de multiplier le polynome par lui-même $m-1$ fois. Concevons néanmoins que l'on procède de cette manière, mais que, pour éviter les réductions qui ne laisseraient dans les coefficiens des termes réduits, aucune trace de leur origine, on convienne, dans le cours des multiplications de monome à monome, d'écrire constamment la lettre multiplicateur à la droite du terme multiplicande, comme on le ferait si l'emploi des exposans n'était pas connu, et qu'en outre on ignorât qu'il est permis, dans une multiplication, d'intervertir à volonté l'ordre des facteurs : alors comme on ne fera aucune réduction, il est aisé de voir qu'en désignant par n le nombre des termes de la racine, le premier produit aura n^2 termes de deux dimensions, le second en aura n^3 de trois dimensions, et ainsi de suite ; ensorte que la puissance cherchée sera un polynome homogène de m dimensions ayant n^m termes ;

sans coefficiens ni exposans, termes tous formés de lettres prises parmi celles du polynome proposé, et écrites une ou plusieurs fois. Je dis actuellement que ce produit contiendra une fois seulement chacun des arrangemens ou des mots de m lettres qu'il est possible de faire, en n'y employant que des lettres prises parmi celles du polynome proposé, et répétant chacune d'elles autant de fois qu'on voudra, sous l'hypothèse précédente. Soit, en effet,

$$dbba\ldots\ldots gacl$$

un pareil arrangement formé au hasard : d'après la manière dont on suppose que les résultats successifs ont été formés, pour que ce mot ne fît pas partie du dernier produit, ou qu'il s'y trouvât plusieurs fois, il faudrait que le mot

$$dbba\ldots\ldots gac$$

ne fît pas partie de l'avant-dernier produit, ou s'y trouvât plusieurs fois : par la même raison le mot

$$dbba\ldots\ldots\ldots ga$$

manquerait dans le précédent, ou s'y trouverait plusieurs fois; et en continuant ainsi de proche en proche, on serait conduit à conclure, contrairement à l'hypothèse, que la lettre d, par exemple, manque dans le polynome proposé, ou s'y trouve plusieurs fois. Rendons à chacun de ces termes la forme ordinaire; l'un quelconque deviendra $a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\ldots$ sous la condition $\alpha+\beta+\gamma+$ etc. $=m$; mais alors il ne sera plus seul de son espèce, parce que ceux qui jusque-là ne différaient de lui que par la disposition des lettres, lui deviendront absolument semblables; et comme le développement renfermait, avant d'avoir subi la modification dont il s'agit ici, tous les mots qui pouvaient être formés de cette manière, et ne renfermait chacun d'eux qu'une fois seulement, il s'ensuit que ce développement ainsi modifié, renfermera autant de termes pareils à celui que nous venons d'écrire, qu'il y a de manières

de disposer, les uns à côté des autres, les facteurs de différens groupes dont ce terme est composé; il faudra donc, pour faire la réduction des termes, n'en écrire qu'un seul, et lui donner pour coefficiens la formule (A). Le terme général cherché est donc

$$\frac{1.2.3\ldots.m}{1.2\ldots\alpha\times1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma\text{ etc.}}\,a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}\text{etc.}\ldots\ (\mathrm{B}),$$

et on en déduira tous les termes du développement de $(a+b+c+\ldots.+r)^m$, en admettant successivement pour α, β, γ, etc. tous les systèmes de valeurs entières et positives, y compris zéro, qui pourront satisfaire à la condition

$$\alpha+\beta+\gamma\ \ldots\ldots=m.$$

Si l'on suppose que le polynome $a+b+c+$ etc. se réduise au binome $x+a$, le terme général ci-dessus se réduira simplement à

$$\frac{1.2.3\ldots..m}{1.2\ldots.\alpha\times1\times2\ldots.\beta}\,x^{\alpha}a^{\beta},$$

sous la condition $\alpha+\beta=m$: soit changé β en n, et on aura $\alpha=m-n$, ensorte que ce terme général pourra être écrit comme il suit,

$$\frac{m(m-1)\,(m-2)\ldots.(m-n+1)\,(m-n)\ldots.3.2.1}{1.2.3\ldots.n.(m-n)\ldots.3.2.1}\,a^nx^{m-n},$$

ou, en réduisant,

$$\frac{m}{1}.\frac{m-1}{2}.\frac{m-2}{2}\ldots\ldots\frac{m-n+1}{n}.a^nx^{m-n},$$

formule connue.

Le terme général (B) revient à

$$\frac{1.2.3\ldots.\alpha\,(\alpha+1)\ \ldots(m-2)(m-1)m}{1.2\ldots\alpha\times1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma\times1.2\ldots\delta\text{ etc.}}\,a^{\alpha}b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\ldots.;$$

et, en réduisant,

$$\frac{m(m-1)\ldots\ldots(\alpha+2)(\alpha+1)}{1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma\times1.2\ldots\delta\ldots}\,b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\ldots a^{\alpha};$$

remplaçant α par $m-\beta-\gamma-\delta-$ etc., il se changera dans celui-ci,

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-\beta-\gamma-\delta-\text{etc.}+1)}{1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma\times1.2\ldots\delta\ldots}$$
$$\times\, b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\ldots\ldots a^{m-\beta-\gamma-\delta-\text{etc.}},$$

ce qui fournit la règle suivante :

Le coefficient d'un produit quelconque des lettres a, b, c, d, etc, *dans le développement de* $(a+b+c+d+\text{etc.})^m$, *est une fraction qui a pour numérateur le produit d'autant de termes consécutifs de la suite* m, m − 1, m − 2, *qu'il y a d'unités dans la somme des exposans des lettres qui multiplie* a, *et pour dénominateur le produit d'autant de termes consécutifs de la suite naturelle, à partir de l'unité, pour chaque lettre qui multiplie* a, *qu'il y a d'unités dans l'exposant de cette lettre.*

Concevons actuellement que le développement soit ordonné par rapport à a, et considérons comme un terme unique, l'ensemble de tous ceux qui sont affectés d'une même puissance de cette lettre. Dans le $n^{ième}$ terme, la puissance a^{m-n+1} sera multipliée par tous les produits de $n-1$ dimensions que l'on peut faire avec les lettres b, c, d, etc. : dans le $(n+1)^{ième}$, a^{m-n} sera multiplié par tous les produits de n dimensions que l'on peut faire avec ces mêmes lettres. Or en supposant déjà formés les produits de $n-1$ dimensions que peuvent fournir les lettres b, c, d, etc., abstraction faite des coefficiens numériques, il est évident qu'en les multipliant par b, on aura tous ceux de n dimensions qui doivent contenir cette lettre en facteur ; et on aurait de même tous ceux de n dimensions qui doivent renfermer la lettre c, en les multi-

pliant par cette dernière lettre, au lieu de les multiplier par b; mais comme parmi ces derniers, il y aurait des produits qui renfermeraient le facteur b, et que ceux-ci sont déjà donnés par la première multiplication, il est clair qu'en multipliant par c, il faudra opérer seulement sur les termes de $n-1$ dimensions qui ne contiennent pas le facteur b : réunissant donc les derniers résultats au premier, on aura ainsi tous ceux des termes de n dimensions, dans lesquels doivent entrer les lettres b et c. Par un semblable raisonnement, on trouvera qu'en réunissant à ces termes les produits par d de tous ceux des termes de $n-1$ dimensions qui ne renferment ni b ni c; les produits par e de tous ceux qui ne renferment ni b, ni c, ni d, et ainsi de suite, on parviendra à obtenir tous les produits de n dimensions qu'il est possible de faire avec les lettres b, c, d, e, etc.

Nous déduirons de là la règle suivante pour former le $(n+1)^{ième}$ terme de la $m^{ième}$ puissance du polynome $a+b+c+$ etc. ordonné par rapport à a, lorsque le $n^{ième}$ terme de cette puissance est déjà connu.

Multipliez par $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$ *tous les produits des lettres* a, b, c, etc. *qui entrent dans le* n^{me} *terme, par* $\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}$ *tous ceux de ces produits qui ne contiennent pas le facteur* b, *par* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{a}}$ *tous ceux de ces mêmes produits qui ne contiennent ni* b, *ni* c; *par* $\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{a}}$ *tous ceux qui ne contiennent ni* b, *ni* c, *ni* d, *et ainsi de suite; enfin, donnez à chacun de ces produits ainsi obtenus, le coefficient numérique que lui assigne la formule générale* (A).

Cette règle étant générale, et le premier terme du développement de $(a+b+c+d+\text{etc.})^m$ étant toujours connu et égal à a^m, il est évident que son application fera trouver successivement tous les autres.

Examinons plus particulièrement la loi que suivra le développement, et, à cet effet, considérons un produit quelconque $b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\ldots a^{m-\beta-\gamma-\delta\ldots}$, dans lequel β, γ, δ, etc. étant des nombres entiers ou zéro, on ait $\beta+\gamma+\delta\ldots < m$ ou $=m$. Si nous supposons cette somme $\beta+\gamma+\delta\ldots$ constante et égale à n, quelles que soient d'ailleurs les valeurs particulières des exposans β, γ, $\delta\ldots$, il est visible que $b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\ldots a^{m-n}$ sera l'expression générale des produits des lettres a, b, $c\ldots$ qui doivent entrer dans le terme du développement de $(a+b+c+\text{etc.})^m$ ordonné suivant a, et dont le rang est désigné par

$$\beta+\gamma+\delta+\text{etc.}\ldots+1=n+1.$$

Or nous avons vu plus haut que le coefficient de $b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\ldots a^{m-n}$, est

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots(m-2)(m-1)m}{1.2..\beta\times1.2\ldots\gamma\times\ldots\times1.2\ldots(m-n)},$$

ou, ce qui revient au même,

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(n+1)\,n(n-1)\ldots3.2.1}{1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma\times1.2\ldots\delta\times\ldots\times1.2\ldots(m-n)},$$

les facteurs du numérateur étant consécutifs; ou encore

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.3.2.1}{1.2\ldots\beta\times1.2\ldots\gamma\times1.2\ldots\delta\ldots}\times\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots.(m-n)};$$

et comme on a évidemment

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots.(m-n)}=\frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots.n},$$

comme on s'en assure par la réduction des deux fractions au même dénominateur, on pourra écrire encore

$$\frac{n(n-1)(n-2)\ldots.3.2.1}{1.2\ldots\ldots\beta\times1.2\ldots.\gamma\times1.2\ldots.\delta\ \text{etc.}}$$
$$\times\frac{m(m-1)(m-2)\ldots.(m-n+1)}{1.2.3\ldots.n};$$

d'où il suit que la formule

$$\frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots\beta \times 1.2\ldots\gamma \times 1.2\ldots\delta \text{ etc.}}\, b^{\beta}c^{\gamma}d^{\delta}\ldots$$
$$\times \frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdots\cdots\frac{m-n+1}{n}$$

représentera généralement les quantités monomes qui doivent composer le $(n+1)^{ième}$ terme du développement. Or, dans cette expression, le facteur $\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdots\frac{m-n+1}{n}$ est constant, et le facteur conjugué $\frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots\beta\times 1.2\ldots\gamma \text{ etc.}}$ qui est variable à cause des exposans variables α, β, γ, etc. est, d'après ce qu'on a vu précédemment, le terme général du développement de $(b+c+d\ldots)^n$; donc le $(n+1)^{ième}$ du développement de $(a+b+c+d\ldots)^m$, sera

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdots\cdots\frac{m-n+1}{n}(b+c+d\ldots)^n a^{m-n},$$

et conséquemment en posant $b+c+d+\ldots=s$, ce développement deviendra

$$a^m+\frac{m}{1}sa^{m-1}+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}s^2a^{m-2}$$
$$+\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}s^3a^{m-3}+\text{ etc.},$$

ce qu'on savait déjà.

Il résulte de ce qu'on vient de dire, que m étant un nombre entier positif, le développement de $(a+b+c\ldots)^m$ donné par la règle ci-dessus, revient à celui qu'on obtiendrait par l'application de la formule du binome; puis donc qu'il est démontré que cette formule a lieu, quel que soit l'exposant m, il paraît légi-

36..

time d'en conclure que la règle dont il s'agit, pourra être appliquée quel que soit le nombre *m*.

Il suit de tout ce qui vient d'être dit, 1°. que *p* exprimant le nombre des termes du polynome, et *m* un nombre entier positif, la somme des coefficiens numériques des monomes qui composent le développement de $(a+b+c.....)^m$, est p^m, conclusion qu'on obtient sur-le-champ en faisant $a=b=c=d=$ etc. $=1$; 2°. que lorsque l'on connaît, abstraction faite de leurs coefficiens, les monomes qui doivent composer le développement précédent, on en peut déduire ceux qui doivent entrer dans le développement de $(a+b+c....)^{m+1}$, toujours abstraction faite de leurs coefficiens, de manière qu'il ne restera plus qu'à affecter chacun des termes obtenus du coefficient numérique convenable.

Nous sommes donc conduits à nous occuper de la recherche des formules qui expriment les puissances entières et de degrés définis, d'un polynome $a+b+c.....$, quel que soit le nombre de ses termes. Ces formules peuvent être écrites d'une manière fort simple, et les considérations qui précèdent, fournissent un moyen facile de les construire.

Cela posé, désignons par $(\alpha\beta\gamma\delta....)$ la somme des produits des facteurs a, b, c, d, etc. et de leurs puissances, dans lesquels les exposans sont α, β, γ, $\delta....$, quelles que soient d'ailleurs les lettres que ces exposans affectent. Dans le développement de $(a+b+c.....)^m$, il y aura, outre la classe des produits comprise dans l'expression $(\alpha\beta\gamma\delta....)$, autant d'autres classes de produits qu'il y aura d'autres manières de satisfaire à la condition $\alpha+\beta+\gamma.....=m$, avec des nombres positifs entiers ou nuls, c'est-à-dire qu'il y aura de manières de former le nombre *m* par addition avec des nombres compris dans la suite naturelle, depuis 1 jusqu'à *m* inclusivement. Nous sommes donc conduits à cette question : *Trouver toutes les manières de former, par addition de nombres entiers positifs, un nombre donné* m.

Nous indiquerons, pour résoudre cette question, deux règles fort simples ; et d'abord, pour fixer les idées, nous prendrons le nombre 8. Toutes les manières de le former, sont comprises dans le tableau suivant, dans lequel les chiffres écrits les uns à côté des autres, sans aucune interposition de signe, doivent être considérés comme séparés entr'eux par le signe +, et conséquemment comme devant être ajoutés ensemble pour former le nombre demandé.

11111111	1111112	111122	11222	2222	224	26	8.
		111113	11123	1223	233	35	
			11114	1124	125	44	
				1133	134	17	
				1115	116		

La première colonne verticale à gauche, n'a qu'un seul terme, et quel que soit le nombre proposé, ce terme est toujours composé d'autant d'unités que le nombre en contient : quant aux autres colonnes, elles se déduisent successivement les unes des autres par la règle suivante.

Pour former la colonne du rang r, *changez deux unités en* 2 *dans les termes de la* (r — 1)^{me} *colonne, trois unités en* 3 *dans ceux de la* (r — 2)^{me} *colonne, qui ne renferment pas* 2, *quatre unités en* 4 *dans ceux de la* (r — 3)^{me} *colonne, qui ne renferment ni* 2 *ni* 3, *et ainsi de suite, jusqu'à ce que vous soyiez parvenu à la première colonne dans laquelle vous changerez* r *unités en* r.

Cette règle étant générale pour toutes les colonnes qui suivent la première, et celle-ci étant toujours connue, il est clair qu'elle fera trouver successivement toutes les colonnes qui doivent composer le tableau, et par conséquent toutes les manières de former par addition le nombre donné.

On peut encore disposer le tableau précédent comme il suit :



11111111	1111112	111122	11222	2222.
	111113	11123	1223	
	11114	1124	224	
	1115	125	233	
	116	26		
	17	1133		
	8	134		
		35		
		44		

Alors chaque colonne dépend uniquement de celle qui la précède, et on forme celle du rang r par la règle qui suit :

Changez dans les termes de la $(r-1)^{me}$ *colonne, deux unités en 2, puis trois unités en 3 dans tous ceux de ces termes qui ne renferment pas 2, puis quatre unités en 4 dans tous ceux qui ne renferment ni 2 ni 3, et ainsi de suite, et on formera tous les termes de la colonne* r.

On doit observer dans l'application de l'une ou l'autre règle, que si un terme d'une colonne sur laquelle on opère, ne contient pas le nombre d'unités requis pour faire l'échange prescrit, ce terme ne doit point être employé.

Lorsqu'on a obtenu toutes les différentes manières de faire par addition, le nombre m, on a, d'après la convention établie, toutes les classes de produits qui doivent entrer dans la $m^{ième}$ puissance du polynome $a+b+c+\ldots\ldots$; mais nous avons vu que tous les produits d'une même classe, doivent avoir le même coefficient ; on aura donc une formule qui exprimera le développement de $(a+b+c+\ldots\ldots)^m$, en donnant à chacune des manières de former le nombre m, le coefficient qui convient aux produits dont elle représente la somme. En posant, pour abréger,

$$a+b+c+d\ldots\ldots=\text{P},$$

et renfermant entre parenthèses, toutes les décompositions de

…es.

…e qui lui
…uit :

…nne, à
…eux de
…is en (à
…de sui

…ou l'on
…e on ope
…e l'écha

…es de la
…convent
…utre de
…… ; au
…e, dém
…rmule
…)",
…re »,
…ésente

…tions

$P^1=(1)$
$P^2=(2)+ 2(11)$
$P^3=(3)+ 3(12)+ 6(111)$
$P^4=(4)+ 4(13)+ 12(112)+ 24(1111)$
$+ 6(22)$
$P^5=(5)+ 5(14)+ 20(113)+ 60(1112)+$ 1
$+ 10(23)+ 30(122)$
$P^6=(6)+ 6(15)+ 30(114)+ 120(1113)+$ 3
$+ 15(24)+ 60(123)+ 180(1122)$
$+ 20(33)+ 90(222)$
$P^7=(7)+ 7(16)+ 42(115)+ 210(1114)+$ 8
$+ 21(25)+105(124)+ 420(1123)+$ 12
$+ 35(34)+140(133)+ 630(1222)$
$+210(223)$
$P^8=(8)+ 8(17)+ 56(116)+ 336(1115)+$ 16
$+ 28(26)+168(125)+ 840(1124)+$ 33
$+ 56(35)+280(134)+1120(1133)+$ 50
$+ 70(44)+420(224)+1680(1223)$
$+560(233)+2520(2222)$
$P^9=(9)+ 9(18)+ 72(117)+ 504(1116)+$ 30 11111)
$+ 36(27)+252(126)+1512(1125)+$ 75
$+ 84(36)+504(135)+2520(1134)+$100
$+126(45)+756(225)+3780(1224)+$151
$+630(144)+5040(1233)+$226
$+1260(234)+7560(2223)$
$+1680(333)$

et ainsi de suite.

l'exposant du polynome, en nombres entiers, formées par l'une ou l'autre des deux règles ci-dessus, et en dehors les coefficiens numériques déduits de la formule A, on aura les équations contenues dans le tableau ci-contre.

On peut appliquer ce qui précède à la recherche du coefficient de x^6 déja calculé (109) : à cet effet, on se proposera de calculer successivement les coefficiens de x^6 en a^5, a^4, a^3, a^2, a^1, a^0. Considérons, par exemple, le coefficient de x^6 en a^4. On ne devra prendre dans P^6 que les termes dans lesquels les parenthèses offrent le chiffre 4 exposant de a, lesquels sont 30(114), 15(24); ces termes au nombre de deux, annoncent deux termes en a^4, l'un multiplié par le produit de deux des lettres b, c, d, etc., sous les exposans 1 et 1, et l'autre par l'une de ces lettres sous l'exposant 2; de manière que, dans chacun de ces produits, l'exposant de x fasse 6 : ainsi ces termes seront a^4bf, a^4ce, a^4d^2, les deux premiers ayant le coefficient 30, et le dernier le coefficient 15.

Nous terminerons par les deux observations suivantes : p désignant le nombre des termes du polynome, m le degré de la puissance à développer, et n le nombre des lettres différentes qui doivent entrer dans une même série de termes, 1°. si l'on a $p < m$, toutes les classes dans lesquelles on a $n > p$, doivent être regardées comme nulles, parce que les produits qui leur appartiennent, doivent avoir zéro pour facteur; 2°. si dans une classe quelconque représentée par $(\alpha\alpha\ldots\mathcal{C}\mathcal{C}\ldots\gamma\gamma\ldots)$, les exposans α, $\mathcal{C}$, γ..... sont répétés des nombres de fois, exprimées respectivement par α', $\mathcal{C}'$, γ'....., le nombre des produits de cette classe aura pour expression

$$\frac{p(p-1)(p-2)\ldots(p-n+1)}{1.2\ldots\alpha'\times1.2\ldots\mathcal{C}'\times1.2\ldots\gamma'\times\text{etc.}}$$

Cette dernière remarque fondée sur la théorie des combinaisons, offre un moyen de s'assurer que l'on n'omet aucun des produits qui doivent entrer dans la puissance cherchée.

CHAPITRE XXIX.

Théorie élémentaire des Probabilités.

170. Pour donner une idée de l'importance de cette branche des mathématiques dont les auteurs d'Elémens n'ont rien dit jusqu'ici, nous résumerons le plus succinctement possible le discours qu'on trouve en tête de l'ouvrage de M. *Laplace*, ayant pour titre : *Théorie analytique des Probabilités*, et la notice historique qui se trouve à la fin d'un autre ouvrage du même Géomètre, intitulé *Essai philosophique sur les probabilités.* « Si » l'on considère les méthodes analytiques auxquelles la théorie » des probabilités a déjà donné naissance, et celles qu'elle peut » faire naître encore, la justesse des principes qui lui servent de » base, la logique rigoureuse et délicate qu'exige leur emploi » dans la solution des problèmes, les établissemens d'utilité » publique qui s'appuient sur elles ; si l'on observe ensuite » que, dans les choses mêmes qui ne peuvent être soumises » au calcul, cette théorie donne les aperçus les plus sûrs qui » puissent nous guider dans nos jugemens, et qu'elle apprend » à se garantir des illusions qui souvent nous égarent ; on verra » qu'il n'est point de science plus digne de nos méditations, » et dont les résultats soient plus utiles. La théorie des Proba- » bilités, n'est au fond, que le bon sens réduit au calcul : » elle fait apprécier avec exactitude ce que les esprits justes » sentent par une sorte d'instinct, sans qu'ils puissent souvent » s'en rendre compte. Cette théorie doit sa naissance à deux » géomètres français du dix-septième siècle, si fécond en grands » hommes et en grandes découvertes, et peut-être de tous les » siècles celui qui fait le plus d'honneur à l'esprit humain.

» *Pascal* et *Fermat* se proposèrent et résolurent quelques pro-
» blèmes sur les probabilités; *Huyghens* réunit ces solutions,
» les étendit et en ajouta de nouvelles dans un petit traité, le
» premier qui ait paru sur cette matière, et qui a pour titre :
» *De Ratiociniis in ludo aleæ*. Plusieurs géomètres s'en occu-
» pèrent ensuite; *Huddes* et le pensionnaire *Wit* en Hollande,
» et *Halley* en Angleterre, appliquèrent le calcul aux proba-
» bilités de la vie humaine, et *Halley* publia pour cet objet la
» première Table de Mortalité. Vers le même tems, *Jacques*
» *Bernoulli* proposa aux géomètres divers problèmes de proba-
» bilités dont il donna depuis des solutions; enfin il composa
» son bel ouvrage ayant pour titre : *Ars conjectandi* qui ne
» parut que sept ans après sa mort arrivée en 1706. Dans cet
» intervalle, *Montmort* et *Moivre* firent paraître deux traités
» sur le calcul des probabilités : celui de *Montmort* a pour
» titre : *Essai sur les jeux de Hasard* : il contient de nom-
» breuses applications de ce calcul aux divers jeux : le traité
» de *Moivre*, postérieur à celui de *Montmort*, parut dabord
» dans les Transactions Philosophiques de l'année 1711; en-
» suite l'Auteur le publia séparément, et il l'a perfectionné
» successivement dans les trois éditions qu'il en a données.
» Plusieurs savans parmi lesquels on doit distinguer *Deparcieux*,
» *Kersseboom*, *Wargentin*, *Dupré-de-Saint-Maure*, *Simpson*,
» *Sulmich*, *Price et Duvillard*, ont réuni un grand nombre
» de données précieuses sur les naissances, les mariages et la
» mortalité; ils ont donné des formules et des tables relatives
» aux rentes viagères, aux tontines, aux assurances, etc. On
» doit à *Daniel Bernoulli* la distinction des espérances mathé-
» matique et morale, le principe ingénieux pour soumettre
» celle-ci à l'analyse et l'Application heureuse du Calcul des Pro-
» babilités à l'Inoculation. On doit surtout placer au nombre des
» idées originales dans cette matière, la considération directe
» des possibilités des événemens, tirées des événemens observés :
» *Jacques Bernoulli* et *Moivre* supposaient ces possibilités
» connues, et ils cherchaient la probabilité que le résultat des
» expériences à faire, approchera de plus en plus de les repré-

» senter. *Bayes* dans les Transactions Philosophiques de l'an-
» née 1763, a cherché directement la probabilité que les possi-
» bilités indiquées par les expériences déja faites, sont com-
» prises dans des limites données, et il y est parvenu d'une ma-
» nière fine et très-ingénieuse quoiqu'un peu embarrassée. Cet
» objet se rattache à la théorie de la probabilité des causes et
» des événemens futurs, conclue des événemens observés. Enfin
» l'une des plus utiles applications du calcul des probabilités,
» concerne les milieux qu'il faut choisir entre les résultats
» des observations ; plusieurs géomètres s'en sont occupés, et
» *Lagrange* a publié dans les Mémoires de Turin, une belle
» méthode pour déterminer ces milieux quand la loi des erreurs
» des observations est connue. »

171. Supposons que sur trois ou un plus grand nombre d'événemens, un seul doive exister : si rien ne porte à croire que l'un d'eux arrivera plutôt que les autres, il est impossible de prononcer avec certitude sur leur existence : il est cependant probable qu'un de ces événemens, pris à volonté, n'arrivera pas, parce que sur divers cas pour nous également possibles, nous en voyons plusieurs qui excluent son existence, tandis qu'un seul la favorise.

172. La théorie des probabilités consiste à réduire tous les événemens du même genre qui peuvent avoir lieu, dans une circonstance donnée, à un certain nombre de cas également possibles, c'est-à-dire, tels que nous soyons également indécis sur leur existence, et à déterminer, parmi ces cas, le nombre de ceux qui sont favorables à l'événement dont on cherche la probabilité. *Le rapport de ce nombre des cas favorables à celui de tous les cas possibles, est la mesure de ce qu'on nomme* PROBABILITÉ, qui n'est conséquemment qu'une fraction dont le numérateur est le nombre des cas favorables, et le dénominateur le nombre des cas possibles.

173. La notion précédente de la probabilité suppose qu'en faisant croître dans le même rapport le nombre des cas favo-

rables et celui des cas possibles, la probabilité reste la même. Pour s'en convaincre, que l'on considère deux urnes A et B, dont la première contienne quatre boules blanches et deux noires, et dont la seconde ne renferme que deux boules blanches et une noire : on peut imaginer les deux boules noires de la première urne, attachées par un fil qui se rompt au moment où l'on saisit l'une d'elles, et les quatre boules blanches formant deux systèmes semblables. Toutes les chances qui feront saisir l'une des boules du système noir, amèneront une boule noire. Si l'on conçoit maintenant que les fils qui unissent les boules, ne puissent se rompre, il est clair que le nombre des chances possibles ne changera pas, non plus que celui des chances favorables à l'extraction des boules noires; seulement on tirera de l'urne deux boules à la fois au lieu d'une : la probabilité d'extraire une boule noire, sera donc la même qu'auparavant; mais alors on a évidemment le cas de l'urne B, avec la seule différence que les trois boules de cette dernière, sont remplacées par trois systèmes de deux boules invariablement unies. La probabilité de tirer une boule noire de l'urne A, lorsque le fil se rompt, est $\frac{2}{6}$, puisqu'il y a deux boules noires sur six boules; et celle de tirer une boule noire de l'urne B, est $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$.

174. Lorsque tous les cas possibles sont favorables à un événement, sa probabilité se change en certitude, et son expression devient égale à l'unité.

175. Dans les choses qui ne sont que vraisemblables, la différence des données que chaque homme a sur elles, est une des causes principales de la diversité des opinions qui ont lieu sur les mêmes objets. Supposons, par exemple, que l'on ait trois urnes A, B et C dont une ne contienne que des boules noires, tandis que les autres ne renferment que des boules blanches : on doit tirer une boule de l'urne C, et l'on demande la probabilité que cette boule sera noire : si l'on ignore quelle est celle des trois urnes qui ne renferme que des boules noires, ensorte que l'on n'ait aucune raison de croire qu'elle est plutôt C que B ou A, ces trois

hypothèses paraîtront également possibles; ensorte que la probabilité d'extraire une boule noire, est un tiers, puisque sur trois extractions d'une boule de chacune des urnes, il n'y en a qu'une qui amène une boule noire: ici le nombre des tirages est celui des cas possibles sur lesquels il n'existe qu'un seul cas favorable à l'événement que l'on considère. Mais si l'on sait que l'urne A ne contient que des boules blanches, l'indécision ne portera plus que sur les urnes B et C, et la probabilité que la boule extraite de l'urne C est noire, est un demi. Enfin, cette probabilité se change en certitude, si l'on est assuré que les urnes A et B ne contiennent que des boules blanches.

Nous allons poser les principes généraux du calcul des probabilités dont nous ferons ensuite l'application à une série de questions.

176. *Premier principe*. Le premier de ces principes est la difinition même de la probabilité qui, comme on l'a vu (127), *est le rapport du nombre des cas favorables à celui de tous les cas possibles;* l'énumération de ces deux espèces de cas peut présenter de grandes difficultés.

177. *Deuxième principe*. Ce que nous venons de dire suppose les différens cas également possibles: s'ils ne le sont pas, *on déterminera d'abord leurs possibilités respectives dont la juste appreciation est l'un des points les plus délicats de la théorie des hasards: alors la probabilité sera la somme des possibilités de chaque cas favorable.* Éclaircissons ce principe par un exemple.

Supposons que l'on projette en l'air une pièce large et très-mince dont les deux faces opposées que nous nommerons *croix* et *pile* soient parfaitement semblables. Cherchons la probabilité d'amener *croix* une fois, au moins, en deux coups. Il est clair qu'il peut arriver quatre cas également possibles: savoir *croix* au premier et au second coup; *croix* au premier coup et *pile* au second; *pile* au premier coup et *croix* au second; enfin *pile* aux deux coups. Les trois premiers cas sont favorables

à l'événement dont on cherche la probabilité qui par conséquent est égale à $\frac{3}{4}$, ensorte qu'il y a trois contre un à parier que *croix* arrivera, au moins, une fois en deux coups. On peut ne compter à ce jeu que trois cas différens, savoir : *croix* au premier coup, ce qui dispense d'en jouer un second; *pile* au premier coup et *croix* au second ; enfin *pile* au premier et au second coup : cela réduirait la probabilité à $\frac{2}{3}$, si l'on considerait ces trois cas comme étant également possibles. Mais il est visible que la probabilité d'amener *croix* au premier coup, est $\frac{1}{2}$. tandis que celle de chacun des deux autres est $\frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$. (IIIe Princ.). Maintenant, si, conformément au second principe, on ajoute la possibilité $\frac{1}{2}$ de *croix* au premier coup, à la possibilité $\frac{1}{4}$ de *pile* au premier coup et *croix* au second, on aura, comme ci-dessus, $\frac{3}{4}$ pour la probabilité cherchée. Nous avons ici réduit les divers cas à des cas également possibles.

178. *Troisième principe.* Un des points les plus délicats de la théorie des probabilités, et celui qui prête le plus aux illusions, est la manière dont les probabilités augmentent ou diminuent par leurs combinaisons mutuelles. *Si les événemens sont indépendans les uns des autres, la probabilité de leur existence simultanée, est le produit de leurs probabilités particulières.* Ainsi la probabilité d'amener un as avec un seul dé, étant un sixième, puisque sur ses six faces, il n'en est qu'une qui offre un as ; celle d'amener deux as, en projetant deux dés à la fois, est un trente-sixième : en effet, chacune des faces de l'un des dés, pouvant se combiner avec les six faces de l'autre, il y a trente six cas également possibles parmi lesquels un seul donne les deux as. La fraction $\frac{1}{36}$ est aussi la probabilité d'amener deux fois de suite un as avec un seul dé, lorsqu'on suppose les faces parfaitement égales : dans ce cas, la probabilité d'amener un as m fois de suite, est $\frac{1}{6^m}$. Généralement, *la probabilité qu'un événement simple et dans les mêmes circonstances, arrivera de suite un nombre donné de fois, est égale à la pro-*

babilité de cet événement simple, élevée à une puissance indiquée par ce nombre : or les puissances successives d'une fraction plus petite que l'unité, diminuant sans cesse, un événement qui dépend d'une suite fort grande de probabilités, peut devenir extrêmement peu vraisemblable.

179. *Quatrième principe. Lorsque deux événemens dépendent l'un de l'autre, la probabilité de l'événement composé est le produit de la probabilité du premier de ces événemens, par la probabilité que cet événement étant arrivé, l'autre aura lieu.*

Nommons p le nombre des cas possibles relatifs au premier événement, et p' celui des cas qui lui sont favorables : nommons q le nombre des cas possibles relatifs au second événement, qui correspondent à chacun des cas p, et q' le nombre des cas qui lui sont favorables : le nombre de tous les cas possibles relatifs à l'événement composé, sera évidemment pq, et le nombre des cas favorables à cet événement, sera $p'q'$: sa probabilité sera donc $\frac{p'q'}{pq}$ (176) ; or $\frac{p'}{p}$ est la probabilité du premier événement, et $\frac{p'q'}{p'q}$ est la probabilité que le premier événement étant arrivé, le second aura lieu, puisque le nombre des cas favorables à l'événement composé, étant $p'q'$, celui des cas possibles est $p'q$, en observant que le second événement n'est possible qu'autant que le premier a lieu ; mais la probabilité $\frac{p'q'}{pq}$ est le produit des deux fractions $\frac{p'}{p}$ et $\frac{p'q'}{p'q}$; donc, etc.

Ainsi, dans le cas précédent (175) des trois urnes A, B, C, dont deux ne contiennent que des boules blanches, et dont la troisième ne renferme que des boules noires, la probabilité de tirer une boule blanche de l'urne C, est $\frac{2}{3} = \frac{p'}{p}$, puisque deux des trois urnes ne contiennent que des boules de cette couleur ; mais lorsqu'on a extrait une boule blanche de l'urne C, l'indécision relative à celle des urnes qui ne renferme que des

boules noires, ne portant plus que sur les urnes A et B, la probabilité d'extraire une boule blanche de l'urne B, devient $\frac{1}{2}=\frac{q'}{q}$: le produit $\frac{p'q'}{pq}$ de $\frac{2}{3}$ par $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire, $\frac{1}{3}$, est donc la probabilité de tirer à la fois des urnes B et C deux boules blanches. On voit par cet exemple, l'influence des événemens passés sur la probabilité des événemens futurs; car la probabilité d'extraire une boule blanche de l'urne C, qui primitivement est $\frac{2}{3}$, se réduit à $\frac{1}{2}$, lorsqu'on extrait une boule blanche de l'urne B; elle se changerait en certitude, si l'on avait extrait une boule noire de la même urne. Ce cas revient à celui d'une seule urne renfermant deux boules blanches et une noire. En général, l'urne ne contenant qu'une boule noire sur un nombre quelconque de boules blanches, les chances pour et contre l'extraction d'une boule blanche, tendent vers l'égalité, à mesure qu'on extrait une boule blanche.

180. *Cinquième principe. La probabilité d'un événement futur, tirée d'un événement observé, est le quotient de la division de la probabilité de l'événement composé de ces deux événemens, et déterminé*, à priori, *par la probabilité de l'événement observé, déterminé pareillement* à priori.

En considérant comme événement composé, l'événement observé joint à l'événement futur, et désignant par Z la probabilité de l'événement composé, par X celle de l'événement observé, et par Y celle de l'événement futur, on a, d'après le principe précédent,

$$Z = X \times Y, \quad \text{d'où} \quad Y = \frac{Z}{X};$$

donc, etc.

Dans l'exemple précédent, la probabilité de l'événement composé, a été trouvée $=\frac{1}{3}=Z$; celle de l'événement observé est $\frac{2}{3}=X$, et on a $Y=\frac{Z}{X}=\frac{1}{2}$ qui est, en effet, la probabilité de l'événement futur, ou de l'extraction d'une boule blanche de l'urne B.

Nous appliquerons ce principe à la solution d'une seconde question.

Problème Ier. *Supposons qu'une urne renferme trois boules, parmi lesquelles il s'en trouve de blanches et de noires; qu'après avoir tiré une boule, on la remette dans l'urne, pour procéder à un nouveau tirage, et que sur* m *tirages, on n'ait amené que des boules blanches; on demande la probabilité de n'amener que des boules noires dans les* m' *tirages suivans?*

Il est clair qu'on ne peut faire ici que quatre hypothèses qui seront les causes de l'événement observé : les boules peuvent être on toutes blanches, ou deux blanches et une noire, ou une blanche et deux noires, ou enfin toutes noires. Considérons ces hypothèses comme autant de causes de l'événement observé, qui est l'extraction de boules blanches dans les m premiers tirages, et cherchons les probabilités de cet événement, relatives à chacune de ces causes : 1°. la probabilité relative à la première cause, est 1; 2°. celle d'amener une boule blanche sur deux blanches et une noire, est $\frac{2}{3}$, et la probabilité de l'amener m fois de suite, est $\frac{2^m}{3^m}$ (IIIe Princ.); 3° celle d'amener m fois de suite une boule blanche sur une blanche et deux noires, est $\frac{1}{3^m}$; 4°. celle enfin d'amener une boule blanche sur trois noires, est zéro. Ainsi les probabilités de l'événement observé, relatives aux causes ou hypothèses ci-dessus, sont

$$1, \quad \frac{2^m}{3^m}, \quad \frac{1}{3^m}, \quad 0.$$

Comme ces quatre hypothèses sont également possibles, le quart de leur somme, c'est-à-dire,

$$X = \frac{1}{4}\left(\frac{3^m + 2^m + 1}{3^m}\right),$$

sera la probabilité de l'événement observé, déterminé *à priori.*

Il faut donc maintenant chercher la probabilité de l'événement composé, c'est-à-dire, celle d'amener m boules blanches dans les m premiers tirages, et m' boules noires dans les m' tirages suivans, parce que, d'après le cinquième principe, en divisant la probabilité de l'événement composé par celle de l'événement observé, on obtient la probabilité de l'événement futur, c'est-à-dire, celle d'amener m' boules noires dans les m' tirages qui suivent les m premiers. Cherchons donc les probabilités d'amener m boules blanches dans les m premiers tirages, et m' boules noires dans les m' tirages suivans : on voit d'abord que ces probabilités sont nulles dans la première et la dernière hypothèse; que la probabilité d'amener, dans la seconde hypothèse, successivement m boules blanches et m' boules noires, est exprimée, d'après le quatrième principe, par

$$\frac{2^m}{3^m} \times \frac{1}{3^{m'}} = \frac{2^m}{3^{m+m'}},$$

et que la probabilité d'amener, dans la troisième hypothèse, m boules blanches et m' boules noires successivement, est, d'après le même principe, exprimée par $\frac{2^{m'}}{3^{m+m'}}$; ensorte que ces probabilités sont

$$0, \quad \frac{2^m}{3^{m+m'}}, \quad \frac{2^{m'}}{3^{m+m'}}, \quad 0;$$

et comme, *à priori*, les quatre hypothèses sont également possibles, la probabilité de l'événement composé, sera le quart de la somme des quatre probabilités précédentes, c'est-à-dire, $Z = \frac{1}{4}\left(\frac{2^m + 2^{m'}}{3^{m+m'}}\right)$; donc

$$Y = \frac{2^m + 2^{m'}}{3^{m'}\,(3^m + 2^m + 1)}$$

sera la probabilité cherchée.

Supposons quatre boules dans l'urne, en conservant toutes les autres données et conditions de la question. On ne peut

faire que ces quatre hypothèses : ou toutes les boules sont blanches, ou trois sont blanches et une noire, ou deux sont blanches et deux noires, ou une est blanche et trois sont noires, ou enfin les quatre boules sont noires. Les probabilités d'amener d'abord m boules blanches de suite dans les quatre hypothèses faites ci-dessus, sont

$$1, \quad \frac{3^m}{4^m}, \quad \frac{2^m}{4^m}, \quad \frac{1}{4^m}, \quad 0;$$

la probabilité de l'événement observé, déterminée *à priori*, sera donc

$$X = \frac{1}{5}\left(\frac{4^m + 3^m + 2^m + 1}{4^m}\right).$$

les probabilités d'amener d'abord m boules blanches, puis m' boules noires dans les quatre mêmes hypothèses, sont

$$0, \quad \frac{3^m}{4^{m+m'}}, \quad \frac{2^{m+m'}}{4^{m+m'}}, \quad \frac{3^{m'}}{4^{m+m'}}, \quad 0;$$

La probabilité de l'événement composé, sera le cinquième de la somme des cinq probabilités précédentes, c'est-à-dire,

$$Z = \frac{1}{5}\left(\frac{3^m + 2^{m+m'} + 3^{m'}}{4^{m+m'}}\right);$$

donc la probabilité cherchée sera

$$Y = \frac{3^m + 2^{m+m'} + 3^{m'}}{4^{m'}\,(4^m + 3^m + 2^m + 1)}.$$

Pour $m = 1$, cette formule devient

$$Y = \frac{3 + 2^{m'+1} + 3^{m'}}{10 \times 4^{m'}},$$

et elle exprime la probabilité de n'amener que des boules noires dans les m' tirages qui suivent le premier qui a donné une boule blanche.

Si le nombre des boules blanches égale celui des noires, la

probabilité de n'amener que des boules noires dans m' tirages, est $\frac{2^{m+m'}}{4^{m+m'}} \times \frac{4^m}{2^m} = \frac{1}{2^{m'}}$; elle surpasse la précédente, lorsque m' est égal ou moindre que 5; mais elle lui devient inférieure, lorsque m' surpasse 5, quoique la boule blanche extraite de l'urne au premier tirage, indique une supériorité dans le nombre des boules blanches. L'explication de ce paradoxe tient à ce que cette indication fournie par la première sortie d'une boule blanche, n'exclut point la supériorité des boules noires, elle la rend seulement moins probable; au lieu que la supposition d'une égalité parfaite entre le nombre des boules blanches et celui des noires, exclut cette supériorité : or cette supériorité, quelque petite que soit sa probabilité, doit rendre la probabilité d'amener de suite m' boules noires, plus grande que dans le cas de l'égalité des couleurs, lorsque m' est considérable.

Le principe suivant est relatif à la probabilité des causes, tirée des événemens observés.

181. *Sixième principe. Si un événement observé peut résulter de* n *causes différentes, la probabilité de l'existence d'une quelconque de ces causes, est une fraction dont le numérateur est la probabilité de l'événement, résultante de cette cause, et dont le dénominateur est la somme des probabilités semblables relatives à toutes les causes.*

Considérons, en effet, comme événement composé, l'événement observé résultant d'une des n causes : la probabilité de cet événement composé, probabilité que nous désignerons par E, sera, en vertu du quatrième principe, égale au produit de la probabilité F de l'événement observé, par la probabilité que cet événement ayant lieu, la cause dont il s'agit existe, probabilité qui est celle de la cause, tirée de l'événement observé, et que nous désignerons par P. On aura donc

$$E = F \times P, \quad \text{d'où} \quad P = \frac{E}{F}.$$

La probabilité E de l'événement composé, est le produit de la probabilité H de la cause par la probabilité que cette cause

ayant lieu, l'événement arrivera : or toutes les n causes étant, *à priori*, également possibles, la probabilité que l'une quelconque d'elles aura lieu, est $\frac{1}{n}$; on a donc

$$E = \frac{H}{n}; \quad \text{donc} \quad P = \frac{\frac{1}{n}H}{F}.$$

La probabilité F de l'événement observé, est la somme de tous les E relatifs à chaque cause; si donc on désigne par $S.\frac{H}{n}$ la somme de toutes les valeurs de $\frac{H}{n}$, on aura

$$F = S.\frac{H}{n};$$

ainsi l'équation $P = \frac{\frac{1}{n}H}{F}$ deviendra

$$P = \frac{\frac{1}{n}H}{S.\frac{H}{n}} = \frac{H}{S.H},$$

ce qui rend le principe énoncé.

Si les diverses causes considérées *à priori*, sont inégalement probables, *il faut au lieu de la probabilité de l'événement, résultante de chaque cause, employer le produit de cette probabilité par la cause elle-même.*

Ce sixième principe est le fondement de l'analyse des hasards, qui consiste à remonter des événemens aux causes.

Le principe suivant n'a besoin que d'être énoncé, et d'ailleurs l'application que nous en ferons à la solution du problème premier, en mettra la vérité dans toute son évidence.

182. *Septième principe. La probabilité d'un événement futur, est la somme des produits de la probabilité de chaque cause,*

tirée de l'événement observé, par la probabilité que cette cause existant, l'événement futur aura lieu.

Dans la question traitée (180), les probabilités de chaque cause, tirées de l'événement observé, et exprimées, d'après le sixième principe, par $P = \frac{H}{S.H}$, sont

$$\frac{3^m}{3^m+2^m+1}, \quad \frac{2^m}{3^m+2^m+1}, \quad \frac{1}{3^m+2^m+1}, \quad 0.$$

Les probabilités de l'événement futur, relatives à ces causes qui sont les quatre hypothèses faites plus haut, c'est-à-dire, celles de n'amener que des boules noires dans les m' tirages qui suivent les m premiers, sont zéro pour la première hypothèse, $\frac{1}{3^{m'}}$ pour la seconde, $\frac{2^{m'}}{3^{m'}}$ pour la troisième, et 1 pour la quatrième : ainsi les probabilités de l'événement futur, tirées de ces causes, sont

$$0, \quad \frac{1}{3^{m'}}, \quad \frac{2^{m'}}{3^{m'}}, \quad 1;$$

la somme des produits respectifs des probabilités précédentes par celles-ci, est

$$\frac{2^m + 2^{m'}}{3^{m'}(3^m + 2^m + 1)},$$

comme ci-dessus.

Problème II. *Soit une urne qui ne renferme que deux boules dont chacune puisse être ou blanche ou noire : on extrait une de ces boules que l'on remet ensuite dans l'urne, pour procéder à un nouveau tirage : supposons que, dans les deux premiers tirages, on ait amené des boules blanches ; on demande la probabilité d'amener encore une blanche au troisième tirage ?*

On ne peut faire ici que ces deux hypothèses : ou l'une des boules est blanche et l'autre noire, ou toutes deux sont blanches. Dans la première hypothèse qui est une cause, la probabilité H

de l'événement observé, est $\frac{1}{4}$, parce que celle d'amener une boule blanche au premier tirage, étant $\frac{1}{2}$, et cette probabilité restant la même en passant du premier au second tirage, devient $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$; H est l'unité ou la certitude dans la seconde hypothèse : ainsi en regardant ces hypothèses comme autant de causes, on aura, par le sixième principe, et en vertu de la formule $P = \frac{H}{S.H}$,

$$P = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{4}} = \frac{1}{5}, \quad P = \frac{1}{\frac{5}{4}} = \frac{4}{5}$$

pour leurs probabilités tirées de l'événement observé. Or si la première hypothèse a lieu, la probabilité d'extraire une boule blanche au troisième tirage, est $\frac{1}{2}$, puisque l'urne ne contient toujours qu'une boule blanche et une boule noire ; elle égale l'unité dans la seconde hypothèse : en multipliant ces dernières probabilités par celles des hypothèses correspondantes, la somme des produits qu'on trouve égale à $\frac{9}{10}$, mesure la probabilité d'extraire une boule blanche au troisième tirage.

Problème III. *On a extrait un numéro d'une urne qui en renferme mille : un témoin de ce tirage annonce que le n° 79 est sorti ; on demande la probabilité de cette sortie ?*

Supposons que l'expérience ait fait connaître que ce témoin trompe une fois sur dix, ensorte que la probabilité de son témoignage soit $\frac{9}{10}$. Ici l'événement observé est le témoin attestant que le n° 79 est sorti. Cet événement peut résulter des

deux hypothèses suivantes, savoir, que le témoin énonce la vérité ou qu'il trompe. Suivant le principe précédent sur la probabilité des causes tirée des événemens, il faut d'abord déterminer, *à priori*, la probabilité de l'événement dans chaque hypothèse qui est une cause. Dans la première, la probabilité que le témoin annoncera le n° 79, est la probabilité même de la sortie de ce numéro, c'est-à-dire $\frac{1}{1000}$: en la multipliant par la probabilité $\frac{9}{10}$ de la véracité du témoin, on aura $\frac{9}{1000}$ pour la probabilité de l'événement observé dans cette hypothèse. Si le témoin trompe, le n° 79 ne sera pas sorti, et la probabilité de cette non-sortie, est $\frac{999}{1000}$: mais pour annoncer la sortie de ce numéro, le témoin doit le choisir parmi les 999 numéros non-sortis ; et comme il est supposé n'avoir aucun motif de préférence pour les uns plutôt que pour les autres, la probabilité qu'il choisira le n° 79, est $\frac{1}{999}$: en multipliant donc cette probabilité par la précédente, on aura $\frac{1}{1000}$ pour la probabilité que le témoin annoncera le n° 79 dans la seconde hypothèse : il faut encore multiplier cette probabilité par la probabilité $\frac{1}{10}$ de l'hypothèse elle-même, qui est la probabilité que le témoin trompe, ce qui donnera $\frac{1}{10000}$ pour la probabilité de l'événement relative à cette hypothèse. Présentement si l'on forme une fraction dont le numérateur soit la probabilité relative à la première hypothèse, et dont le dénominateur soit la somme des probabilités relatives aux deux hypothèses ou aux deux causes, on aura la probabilité de la première hypothèse $= \frac{9}{10}$ qui est la probabilité même de la véracité du témoin, et, en même temps,

la probabilité de la sortie du n° 79. La probabilité du mensonge du témoin et de la non-sortie de ce numéro, sera $\frac{1}{10}$.

M. *Laplace* résout encore cette question : Une urne renferme 999 boules noires et une boule blanche : une boule en ayant été extraite, un témoin du tirage annonce que cette boule est blanche. M. *Laplace* fait ces quatre hypothèses qui sont quatre causes de l'événement observé, savoir, 1°. celle du témoin ne trompant point et ne se trompant point; 2°. celle du témoin ne trompant point et se trompant; 3°. celle du témoin trompant et ne se trompant point; 4°. celle du témoin trompant et se trompant.

183. La probabilité des événemens sert à déterminer l'espérance et la crainte des personnes intéressées à leur existence. Le mot *espérance* a diverses acceptions; il exprime généralement l'avantage de celui qui attend un bien quelconque, dans des suppositions qui ne sont que vraisemblables. Dans la théorie des hasards, cet avantage est le produit de la somme espérée, par la probabilité de l'obtenir : c'est la somme partielle qui doit revenir, lorsqu'on ne veut pas courir les risques de l'événement, en supposant que la répartition de la somme entière, se fasse proportionnellement aux probabilités. Cette manière de la répartir est la seule équitable, quand on fait abstraction de toute circonstance étrangère, parce qu'avec un égal degré de probabilité, on a un droit égal sur la somme espérée. Nous nommerons cet avantage *espérance mathématique*, pour le distinguer de *l'espérance morale* sur laquelle nous reviendrons bientôt.

184. *Huitième principe. Lorsque l'espérance mathématique dépend de plusieurs événemens, on l'obtient en prenant la somme des produits de la probabilité de chaque événement, par le bien attaché à son arrivée. Dans le cas le plus simple, cette espérance est le produit de la valeur absolue du bien espéré, par la probabilité de l'obtenir.*

Problème IV. *Supposons qu'au jeu de* croix *et* pile, *Paul reçoive deux francs, s'il amène* croix *au premier coup, et cinq francs, s'il ne l'amène qu'au second; on demande quelle est*

la somme que Paul doit donner d'avance à celui qui lui fait cet avantage, en observant que, pour l'égalité du jeu, la mise doit être égale à l'avantage qu'il procure ?

En multipliant 2^f par la probabilité $\frac{1}{2}$ du premier cas, et 5^f par la probabilité $\frac{1}{4}$ du second cas, la somme des produits est deux francs et un quart, mise cherchée.

Si *Paul* reçoit deux francs, en amenant *croix* au premier coup, et cinq francs en l'amenant au second coup, soit qu'il l'ait ou non amenée au premier, il faut alors distinguer quatre cas, savoir : *croix* au premier et au second coup ; *croix* au premier coup et *pile* au second ; *pile* au premier coup et *croix* au second ; enfin *pile* aux deux coups. *Paul* reçoit sept francs dans le premier cas, deux francs dans le second, cinq francs dans le troisième, et rien dans le quatrième. La probabilité de chacun des cas est $\frac{1}{4}$: en multipliant donc par $\frac{1}{4}$ la somme correspondante à chaque cas, et ajoutant ces produits, on aura trois francs et demi pour l'avantage de Paul, et conséquemment pour sa mise au jeu.

Paul joue à *croix* et *pile* avec la condition de recevoir deux francs s'il amène *croix* au premier coup, quatre francs s'il ne l'amène qu'au second, huit francs s'il ne l'amène qu'au troisième, et ainsi de suite ; sa mise au jeu doit être, par le principe précédent, égale au nombre des coups ; ensorte que si la partie continue à l'infini, la mise doit être infinie. Cependant aucun homme raisonnable ne voudrait exposer à ce jeu une somme même modique, 50 francs, par exemple. Il s'agit d'expliquer cette différence entre le résultat du calcul et l'indication du sens commun : on reconnaît bientôt qu'elle tient à ce que *l'avantage moral* qu'un bien nous procure, n'est pas proportionnel à ce bien, et qu'il dépend de mille circonstances souvent difficiles à définir, mais dont la plus générale et la plus importante est celle de la fortune. En effet, il est visible qu'un franc a beaucoup plus de prix pour celui qui n'en a que cent, que pour un millionnaire. On doit donc, dans le bien espéré, distinguer sa valeur absolue de sa valeur relative : celle-ci se règle sur les motifs qui la font desirer, au lieu que la première

en est indépendante. On ne pent pas donner de principe général pour apprécier cette valeur relative. En voici cependant un proposé par *Daniel Bernoulli*, et qui peut servir dans beaucoup de cas.

185. *Neuvième principe. La valeur relative d'une somme infiniment petite, est égale à sa valeur absolue divisée par le bien total de la personne intéressée.*

L'espérance morale sera le produit de la valeur relative du bien espéré, par la probabilité de l'obtenir.

186. *Dixième principe. Dans une série d'événemens probables dont les uns produisent un bien et les autres une perte, on aura l'avantage résultant, en faisant une somme des produits de la probabilité de chaque événement favorable par le bien qu'il procure, et en retranchant de cette somme celle des produits de la probabilité de chaque événement défavorable par la perte qui y est attachée. Si la seconde somme l'emporte sur la première, le bénéfice devient perte, et l'espérance se change en crainte.*

187. Ces principes posés, il nous reste à en faire des applications.

Problème V. *On projette trois dés sur une table : un joueur* A *parie que les trois points amenés seront différens, le joueur* B *parie qu'il y aura un double (deux points semblables) ; le joueur* C *parie pour un triplé (trois points semblables) : on demande quels doivent être les paris de* A, B, C *pour que le jeu soit égal?*

Les mises A, B, C doivent être proportionnelles aux nombres des coups simples, des donbles et des triples, que nous allons calculer. Chaque face d'un dé pouvant se combiner avec les six faces d'un autre dé, on voit que deux dés donnent trente-six coups possibles ; chaque coup du troisième dé pouvant se combiner avec les trente-six coups précédens, le nombre total des coups sera $6 \times 36 = 216$, nombre de tous les cas possibles : les triples sont évidemment au nombre de six. Pour

connaître le nombre des doublés, observons que toutes les faces semblables de deux des trois dés, doivent être combinées avec chacune des faces non semblables du troisième dé, ce qui donne $6 \times 5 = 30$ doublés; et comme les trois dés peuvent être pris deux à deux de trois manières, on aura en totalité $3 \times 30 = 90$ doublés. Ainsi le nombre des coups simples sera $216 - 96 = 120$. Il y a donc lieu à 120 coups simples, à 90 doublés, et à 6 triplés : on voit donc que les probabilités en faveur de A, B et C étant $\frac{120}{216}$; $\frac{90}{216}$, $\frac{6}{216}$, les mises de ces joueurs doivent être, pour l'égalité du jeu, :: 120 : 90 : 6 ou :: 20 : 15 : 1.

Problème VI. *Supposons que le nombre des numéros d'une loterie, soit* m, *et qu'il en sorte* n *à chaque tirage, on veut connaître*, 1°. *la probabilité qu'une combinaison* s *de ces numéros, sortira au premier tirage*; 2°. *la probabilité que les* s *numéros sortiront dans un ordre déterminé entr'eux*; 3°. *la probabilité que les* s *premiers numéros du tirage, seront ceux de la combinaison proposée*; 4°. *enfin la probabilité que les* s *numéros choisis sortiront les premiers dans un ordre déterminé?*

1°. Le nombre total des combinaisons (*) de m numéros pris

(*) En appelant *combinaisons* ce que nous nommions *produits différens* (Alg., Ire sér., chap. XII), le nombre total des combinaisons de m numéros pris n à n, est

$$\frac{m(m-1)(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots\ldots n}.$$

On aura le nombre total des combinaisons de m lettres prises une à une, deux à deux, jusqu'à m à m, en faisant $p=1$ dans le binome $(1+p)^m$, et retranchant l'unité. Supposons que, dans chaque combinaison, on ait égard non-seulement au nombre des lettres, mais encore à leur situation entr'elles : comme n lettres admettent $1.2.3\ldots\ldots n$ situations différentes que nous nommions *arrangemens*, il s'ensuit que le nombre total des combinaisons de m lettres n à n, lorsqu'on a égard aux différentes situations des n lettres, est la fraction ci-dessus, en supprimant son dénominateur.

n à n, est, comme on le sait,

$$\frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots.n}\ldots\ldots(1).$$

Pour avoir parmi ces combinaisons, le nombre de celles dans lesquelles s numéros sont compris, on observera que si l'on retranche ces s numéros de la totalité des numéros, et que l'on combine $n-s$ à $n-s$ le reste $m-s$, le nombre de ces combinaisons sera le nombre cherché, puisqu'en restituant les s numéros dans chacune de ces combinaisons, on aura les combinaisons n à n, dans lesquelles se trouvent les s numéros : ce nombre est donc, en changeant dans la formule ci-dessus m en $m-s$, et n en $n-s$,

$$\frac{(m-s)\,(m-s-1)\ldots\ldots(m-n+1)}{1.2\ldots\ldots(n-s)}\ldots\ldots(2),$$

formule qui compte le nombre des cas favorables à l'événement ; mais la première exprime le nombre de tous les cas possibles : qu'on divise (2) par (1), le quotient sera

$$\frac{(m-s)\,(m-s-1)\ldots\ldots(m-n+1).1.2.3\ldots\ldots n}{1.2.3\ldots(n-s)\,m\,(m-1)\ldots\ldots(m-n+1)};$$

en supprimant les facteurs communs aux deux termes, et observant que s est moindre que n, on obtiendra

$$\frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots\ldots\ldots(n-s+1)}{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots\ldots(m-s+1)}$$

pour la probabilité cherchée (Ier Princ.).

2°. En divisant la formule précédente par $1.2.3\ldots s$ qui compte le nombre total des arrangemens de s numéros, on aura la probabilité que les s numéros sortiront dans un ordre déterminé entr'eux.

3°. On aura la probabilité que les s premiers numéros du tirage, seront ceux de la combinaison proposée, en observant que cette probabilité revient à celle d'amener cette combinaison, en supposant qu'il ne sort que s numéros à chaque

tirage; il faut donc supposer $n = s$ dans la formule précédente qui devient alors

$$\frac{1.2.3.\dots.(s-2)(s-1)s}{m(m-1)(m-2)\dots\dots(m-s+1)}.$$

4°. Enfin, on aura la probabilité que les s numéros choisis sortiront les premiers dans un ordre déterminé, en divisant la dernière formule par $1.2.\dots.s$.

Le quotient de la mise, divisée par la probabilité de gagner, est ce que la loterie doit rendre au joueur: l'excédant de ce quotient sur ce qu'elle donne, est son bénéfice. En effet, si l'on nomme p la probabilité du joueur, m sa mise, et x ce que la loterie doit lui rendre pour l'égalité du jeu, $x-m$ sera la mise de la loterie; car ayant reçu la mise m, et rendant x au joueur, elle ne met au jeu que $x-m$: or, pour l'égalité du jeu, l'espérance mathémathique de chaque joueur doit être égale à sa crainte: son espérance est le produit de la mise $x-m$ de son adversaire par la probabilité de l'obtenir (VIII[e] Princ.): par une conséquence du même principe, sa crainte est le produit de sa mise m par la probabilité $1-p$ de la perte: on a donc

$$p(x-m) = m(1-p), \quad \text{d'où} \quad x = \frac{m}{p},$$

ce qui prouve la proposition.

On peut donc calculer les chances de la loterie de France, et en conclure ses bénéfices. Cette loterie est composée de 90 numéros dont cinq sortent à chaque tirage. La probabilité d'un extrait donné, est $\frac{5}{90} = \frac{1}{18}$: la loterie devrait donc, pour l'égalité du jeu, rendre 18 fois la mise: le nombre total des ambes est 4005, et il en sort dix à chaque tirage; ainsi la probabilité de la sortie d'un ambe donné, est $\frac{10}{4005}$; la loterie devrait donc, pour un ambe sorti, rendre quatre cents fois et demie la mise: on trouve pareillement qu'elle devrait rendre la mise 11848 fois pour un terne; 511038 pour un quaterne,

et 43949268 pour un quine. Or on sait que la loterie est loin de faire ces avantages au joueur.

Problème VII. *Une urne étant supposée renfermer* x *boules, on en tire une partie ou la totalité, et on demande la probabilité que le nombre des boules extraites sera pair?*

Le nombre des cas dans lesquels le nombre des boules est l'unité, est évidemment x, puisque chacune des boules peut être extraite : le nombre des cas dans lesquels celui des boules extraites, est 2, est la somme des produits différens de x lettres 2 à 2, c'est-à-dire, $\frac{x(x-1)}{2}$: le nombre des cas dans lesquels on tire trois boules, est la somme des produits différens de x lettres 3 à 3, c'est-à-dire, $\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}$, et ainsi de suite. Ainsi les termes successifs du développement de la fonction.... $(1+1)^x-1$, représenteront tous les cas dans lesquels le nombre des boules extraites, est successivement 1, 2, 3..... jusqu'à x, et conséquemment 2^x-1 sera le nombre de tous les cas possibles. Le nombre des cas relatifs aux nombres impairs de boules extraites, est

$$x+\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{2.3.4.5}+\text{etc.}$$
$$=\tfrac{1}{2}(1+1)^x-\tfrac{1}{2}(1-1)^x=2^{x-1},$$

et le nombre des cas relatifs aux nombres pairs de boules extraites, est

$$\frac{x(x-1)}{2}+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{2.3.4}+\text{etc.}$$
$$=\tfrac{1}{2}(1+1)^x+\tfrac{1}{2}(1-1)^x-1=2^{x-1}-1:$$

la réunion de ces deux sommes, c'est-à-dire, 2^x-1 est le nombre de tous les cas possibles. Ainsi la probabilité que le nombre des boules extraites, sera pair, est (I[er] Principe) $\frac{2^{x-1}-1}{2^x-1}$: et la probabilité que ce nombre sera impair, est,

d'après le même principe, $\frac{2^{x-1}}{2^x-1}$: il y a donc de l'avantage à parier avec égalité pour un nombre impair de boules.

On peut arriver à cette conclusion sans calcul. En effet, le nombre des boules étant pair, ou de la forme $2n$, il y a dans ces $2n$ nombres, autant de nombres pairs que de nombres impairs ; mais le nombre x étant impair, ou de la forme $2n+1$, le nombre des nombres impairs est plus grand d'une unité que celui des nombres pairs : ainsi lorsque le nombre des boules est quelconque, comme on le suppose dans l'énoncé, et qu'on peut les prendre toutes, il y a plus à parier qu'on en amènera un nombre impair qu'un nombre pair.

Problème VIII. *Une urne renferme un nombre* x *de boules blanches, et le même nombre de boules noires ; on demande la probabilité qu'en tirant un nombre quelconque pair de boules, on amènera autant de boules blanches que de boules noires, tous les nombres pairs pouvant être également amenés ?*

Le nombre des cas dans lesquels une boule blanche de l'urne, peut se combiner avec une boule noire, est évidemment $x.x$. Le nombre des cas dans lesquels deux boules blanches peuvent se combiner avec deux boules noires, est $\frac{x(x-1)}{2} \times \frac{x(x-1)}{2}$, en observant que le nombre des combinaisons ou produits différens, deux à deux, de x choses, est $\frac{x(x-1)}{2}$. On trouvera de même le nombre des cas dans lesquels trois, quatre, etc. boules blanches peuvent se combiner avec trois, quatre, etc. boules noires. Le nombre des cas dans lesquels on amènera autant de boules blanches que de noires, c'est-à-dire, le nombre des cas favorables, est donc

$$x^2+\left[\frac{x(x-1)}{2}\right]^2+\left[\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}\right]^2+\text{etc.};$$

c'est-à-dire, la somme des carrés des termes du développe-

ment de $(1+1)^x$ moins l'unité : or cette somme est celle des termes indépendans de a dans le développement de $\left(1+\frac{1}{a}\right)^x (1+a)^x$, ou dans le produit

$$\left\{1+x\times\frac{1}{a}+\frac{x(x-1)}{2}\times\frac{1}{a^2}+\frac{x(x-1)(x-2)}{2.3}\times\frac{1}{a^3}+\text{etc.}\right\}$$
$$\times\left\{1+x\times a+\frac{x(x-1)}{1.2}\times a^2+\frac{x(x-1)(x-2)}{2.2}\times a^3+\text{etc.}\right\};$$

mais comme

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)^x (1+a)^x = \frac{(1+a)^{2x}}{a^x},$$

le terme cherché est le coefficient du terme moyen, c'est-à-dire, du terme en a^x dans le développement de $(1+a)^{2x}$; on trouve pour ce coefficient

$$\frac{2x(2x-1)(2x-2)\ldots(2x-x+1)}{1.2.3\ldots\ldots x}=\frac{2x(2x-1)\ldots(x+1)}{1.2.3\ldots\ldots x}$$
$$=\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots 2x}{(1.2.3\ldots\ldots\ldots x)^2}.$$

Le nombre des cas dans lesquels on peut tirer de l'urne autant de boules blanches que de noires, est donc

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots\ldots 2x}{(1.2.3\ldots\ldots\ldots x)^2}-1.$$

Cherchons maintenant le nombre de tous les cas possibles. Puisqu'on ne doit prendre les boules qu'en nombre pair, le nombre cherché est la somme des termes de rang impair dans le développement du binome $(1+1)^{2x}$, moins le premier terme : cette somme est

$$\tfrac{1}{2}(1+1)^{2x}+\tfrac{1}{2}(1-1)^{2x}-1=2^{2x-1}-1:$$

divisant le nombre des cas favorables par celui de tous les cas possibles, on a pour l'expression de la probabilité

cherchée ;

$$\frac{\frac{1.2.3........2x}{(1.2.3.......x)^2}-1}{2^{2x-1}-1}$$

Problème IX. *On a des urnes en nombre* x + x′ ; *la première renferme* p *boules blanches et* q *boules noires ; la seconde*, p′ *boules blanches et* q′ *boules noires ; la troisième*, p″ *boules blanches et* q″ *boules noires, et ainsi de suite ; on demande la probabilité d'amener* x *boules blanches et* x′ *boules noires, en tirant successivement une boule de chaque urne ?*

Nous commencerons par rechercher le nombre des cas possibles.

Si l'on extrait une boule de chacune des $x+x'$ urnes, le nombre de tous les cas possibles relatifs à ce tirage, est évidemment $p+q$; car les boules qu'on tire une à une des $x+x'-1$ urnes, distraction faite de celle qui contient p boules blanches et q boules noires, peuvent être prises avec chacune des $p+q$ boules de cette urne : au second tirage, chacun des cas du premier, pouvant se combiner avec les $p'+q'$ boules de la seconde urne, on aura $(p+q)(p'+q')$ pour le nombre de tous les cas possibles relatifs aux deux premiers tirages : au troisième tirage, chacun de ces cas peut se combiner avec les $p''+q''$ boules de la troisième urne, ce qui donne $(p+q)(p'+q')(p''+q'')$ pour le nombre des cas respectifs aux trois premiers tirages. Ce produit, pour la totalité des urnes, sera composé de $x+x'$ facteurs. Calculons le nombre des cas favorables, c'est-à-dire, le nombre de ceux dans lesquels on peut extraire x boules blanches et x' boules noires : le nombre des cas dans lesquels on peut extraire x boules blanches de x urnes, est évidemment $p.p'.p''...$, le nombre de ces facteurs étant x, et le nombre de ceux dans lesquels on peut extraire x' boules noires de x urnes, est $q.q'.q''.....$, le nombre de ces facteurs étant x' : ainsi le nombre des cas favorables à l'extraction de x boules blanches et de x' boules noires de x et x' urnes, prises d'une

manière quelconque, sur les $x+x'$, est $p.p'.p''....q.q'q''....$, produit dont le nombre des facteurs est $x+x'$. Si l'on observe que les $x+x'$ urnes doivent être combinées x à x, et que les urnes restantes sont toutes les combinaisons en nombre x', ces combinaisons étant toujours des produits différens, on verra que, pour avoir la totalité des cas favorables, il faut prendre la somme de tous les produits de la forme $p.p'.p''$ $.....q.q'.q''.....$ qu'on peut faire avec p, p', p''.... lettres prises en nombre x, et les q, q', q''...... lettres prises en nombre x', en observant que les lettres p, p', etc., q, q', etc. sont en nombre $x+x'$: or cette somme est celle de tous les termes du développement des $x+x'$ facteurs $(p+q)$ $(p'+q')$ $(p+q'')$, etc., dans lesquels la lettre p avec ou sans accent, est répétée x fois, et la lettre q avec ou sans accent, est répétée x' fois (chap. XXVII).

Supposons p', p''.... égaux à p et q', q'', etc. égaux à q : le produit précédent deviendra $(p+q)^{x+x'}$: le terme multiplié par $p^x q^{x'}$ dans le développement de ce binome, est

$$\frac{(x+x')(x+x'-1).....(x+1)}{1.2.3.....x'}p^x q^{x'}$$

$$=\frac{1.2.3.......(x+x')}{1.2.3......x\times 1.2.3.......x'}p^x q^{x'}....(A):$$

le nombre de tous les cas possibles étant, sous les mêmes hypothèses, exprimé par $(p+q)^{x+x'}$, la probabilité d'amener x boules blanches et x' boules noires, est donc,

$$\frac{1.2.3.....(x+x')}{1.2.3....x\times 1.2.3....x'}\left(\frac{p}{p+q}\right)^x\left(\frac{q}{p+q}\right)^{x'},$$

où $\frac{p}{p+q}$ est la probabilité de tirer une boule blanche de l'une des urnes, et $\frac{q}{p+q}$ celle d'en tirer une noire.

Nous observerons qu'il est parfaitement égal de tirer x boules blanches et x' boules noires de $x+x'$ urnes qui

renferment chacune p boules blanches et q boules noires, ou d'une seule de ces urnes, pourvu que l'on remette dans l'urne la boule extraite à chaque tirage.

Si l'on a $x+x'+x''$ urnes dont la première renferme p boules blanches, q boules noires, r boules rouges, dont la seconde renferme p' boules blanches, q' boules noires, r' boules rouges, dont la troisième renferme p'' boules blanches, q'' boules noires, r'' boules rouges, etc., et qu'on raisonne comme on l'a fait dans le cas précédent, on trouvera sous les hypothèses $p=p'=p''$, etc., $q=q'=q''$, etc., $r=r'=r''$, etc., pour expression de la probabilité d'amener x boules blanches, x' boules noires, x'' boules rouges, en tirant successivement une boule de chaque urne,

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots(x+x'+x'')}{1.2.3\ldots\ldots x\times 1.2.3\ldots\ldots x'\times 1.2.3\ldots\ldots x''}\times\left(\frac{p}{p+q+r}\right)^{x}\left(\frac{q}{p+q+r}\right)^{x'}\left(\frac{r}{p+q+r}\right)^{x''},$$

Généralement, pour un nombre $x+x'+x''$, etc. d'urnes, l'expression de la probabilité d'amener x boules d'une couleur, x' boules d'une seconde couleur, x'' boules d'une troisième couleur, x''' boules d'une quatrième couleur, etc., p étant le nombre des boules de la première couleur, q celui des boules de la seconde, r, s, etc. ceux des boules de la troisième, de la quatrième, etc. couleur, sera

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots(x+x'+x''+\text{etc.})}{1.2\ldots x\times 1.2\ldots\ldots x'\times 1.2\ldots\ldots x''\times 1.2\ldots\ldots x'''\ \text{etc.}}\times\left(\frac{p}{p+q+r+\text{etc.}}\right)^{x}\left(\frac{q}{p+q+r+\text{etc.}}\right)^{x'}\left(\frac{r}{p+q+r+\text{etc.}}\right)^{x''}\times\left(\frac{s}{p+q+r+\text{etc.}}\right)^{x'''},\ \text{etc.}$$

Problème X. *Assigner la probabilité de tirer des urnes précédentes* x *boules blanches avant d'amener soit* x' *boules noires, soit* x'' *boules rouges, etc.?*

Le nombre des couleurs étant n, il faut que la condition soit remplie, au plus tard, après $x+x'+x''+\text{etc.}-n+1$ tirages : en effet, le nombre total des boules blanches extraites, étant égal ou moindre que x, celui des boules noires extraites, moindre que x', celui des boules rouges extraites, moindre que x'', etc., le nombre total des boules extraites, est égal ou moindre que $x+x'+x''+\text{etc.}-n+1$; et conséquemment, d'après l'énoncé, le nombre des tirages ne doit pas excéder $x+x'+x''+\text{etc.}-n+1$: on peut donc réduire le nombre des urnes à $x+x'+x''+\text{etc.}-n+1$.

Pour avoir le nombre des cas dans lesquels on peut amener x boules blanches au $(x+i)^{ième}$ tirage, il faut déterminer tous les cas dans lesquels $x-1$ boules blanches seront sorties au tirage $x+i-1$: à cet effet, il faudra, dans la formule (A), changer x en $x-1$, x' en $x'+x''+x'''+\text{etc}=i$, q en $q+r+s+\text{etc.}$, conséquemment, $x+x'$ en $x+i-1$; car il est clair que, dans l'hypothèse actuelle, la totalité des cas favorables, est la somme des termes du développement de $(p+q+r+\text{etc.})^{x-1+i}$, dans lesquels la lettre p est répétée $x-1$ fois.

Mais l'urne $x+i$ contenant aussi p boules blanches, le nombre des cas favorables, au $(x+i)^{ième}$ tirage, sera donné par le produit de la formule précédente par p, produit qui sera

$$\frac{1.2.3.\ldots\ldots(x+i-1)}{1.2.3.\ldots(x-1)\times 1.2.3.\ldots i}\,p^x(q+r+\text{etc.})^i,$$

et qu'il faut encore multiplier par le nombre de tous les cas favorables relatifs aux autres tirages en nombre $x'+x''+\text{etc.}-n-i+1$, qui, avec $x+i$, fait en effet le nombre total $x+x'+x''+\text{etc.}-n+1$ des tirages et des urnes : si l'on observe que, par rapport aux derniers tirages en nombre $x'+x''+\text{etc.}-n-i+1$, le nombre des favorables est le même que celui des cas possibles, puisqu'on a déjà la probabilité d'amener dans les tirages qui précèdent ceux-ci, x

boules blanches, avant d'amener, soit x' boules noires, soit, etc., on conclura que ce nombre de cas favorables, étant $(p+q+r+\text{etc.})^{x'+x''+\text{etc.}-n-i+1}$, on aura

$$\frac{1.2.3.\ldots.(x+i-1)}{1.2.3.\ldots.(x-1)\times 1.2.\ldots.i}p^x$$
$$\times(q+r+\text{etc.})^i(p+q+r+\text{etc.})^{x'+x''+\text{etc.}-n-i+1}$$

pour le nombre des cas dans lesquels l'événement peut arriver précisément au tirage $x+i$. Il faut cependant en exclure les cas dans lesquels q est élevé à la puissance x', ceux dans lesquels r est élevé à la puissance x'', etc.; car, dans tous ces cas, on aurait amené soit x' boules noires, soit x'' boules rouges, etc. avant d'amener x boules blanches. Ainsi, dans le développement du binome $(q+r+\text{etc.})^i$, il ne faut avoir égard qu'aux termes multipliés par $q^f.r^{f'}.s^{f''}.\text{etc.}$, dans lesquels f est moindre que x', f' moindre que x'', f'' moindre que x''', etc. Le terme multiplié par $q^f.r^{f'}.s^{f''}.\text{etc.}$ dans ce développement, est (chap. XXVII)

$$\frac{1.2.3.\ldots.i}{1.2.3.\ldots f\times 1.2.3.\ldots f'\times 1.2.3.\ldots f''\ \text{etc.}}$$

Ainsi en observant que $i=f+f'+f''+\text{etc.}$, les termes à considérer dans la formule précédente, sont

$$\frac{1.2.3.\ldots.(x+f+f'+f''+\text{etc.}-1)}{1.2.3.\ldots(x-1)\times 1.2.3.\ldots f\times 1.2.3.\ldots f'\times 1.2.3.\ldots f''\ \text{etc.}}$$
$$\times p^x.q^f.r^{f'}s^{f''}.\text{etc.}\,(p+q+r+\text{etc.})^{x'+x''+\text{etc.}-f-f'-\text{etc.}-n+1}.$$

En donnant, dans cette dernière formule, à f toutes les valeurs entières depuis $f=0$ jusqu'à $f=x'-1$, à f' toutes les valeurs depuis $f'=0$ jusqu'à $f'=x''-1$, et ainsi de suite, la somme de tous ces termes comptera le nombre de tous les cas dans lesquels l'événement en question peut arriver dans $x+x'+\text{etc.}-n+1$ tirages : il faut diviser cette somme par le nombre de tous les cas possibles, c'est-à-dire, par

$(p+q+r+\text{etc.})^{x+x'+\text{etc.}-n+1}$, et on a le quotient

$$\frac{1.2.3.\ldots(x+f+f'+\text{etc.}-1)}{1.2.3\ldots(x-1)\times 1.2.3\ldots f\times 1.2.3\ldots f'\ \text{etc.}}\times\frac{p^x.q^f.r^{f'}.\text{etc.}}{(p+q+r+\text{etc.})^{x+f+f'+\text{etc.}}}.$$

Si l'on désigne par p' la probabilité de tirer une boule blanche d'une quelconque des urnes, par q' celle d'en tirer une boule noire, par r' celle d'en tirer une boule rouge, etc., on aura

$$p'=\frac{p}{p+q+r+\text{etc.}},\ q'=\frac{q}{p+q+r+\text{etc.}},\ r'=\frac{r}{p+q+r+\text{etc.}};$$

d'où

$$p^x=p'^x(p+q+r+\text{etc.})^x,\quad q^f=q'^f(p+q+r+\text{etc.})^f,$$
$$r^{f'}=r'^{f'}(p+q+r+\text{etc.})^{f'},\quad \text{etc.}$$

Ainsi la formule précédente devient

$$\frac{1.2.3.\ldots(x+f+f'+\text{etc.}-1)}{1.2.3\ldots(x-1)\times 1.2\ldots f\times 1.2\ldots f'}p'^x.q'^f.r'^{f'},\ \text{etc.}$$

La somme des termes que l'on obtiendra, en donnant à f toutes les valeurs depuis $f=0$ jusqu'à $f=x'-1$, à f' toutes les valeurs depuis $f'=0$ jusqu'à $f'=x''-1$, etc. sera la probabilité d'amener x boules blanches avant x' boules noires, ou x'' boules rouges, ou etc.

Problème XI. *Deux joueurs dont chacun possède un nombre connu de jetons, et dont les adresses respectives sont* m *et* n, *conviennent de ne quitter le jeu que lorsque l'un d'eux aura gagné tous les jetons de l'autre; à chaque partie, le perdant donne un jeton au gagnant : on demande quelle est l'espérance de chaque joueur?*

Nous ferons précéder la solution de cette question, d'un principe dont la connaissance est indispensable et qui rentre dans le dixième.

Lorsque de deux chances données, une doit nécessairement arriver, que la première promet à un joueur une certaine somme, un certain droit; que la seconde promet au même

joueur, une autre somme ou un autre droit, et que ces deux chances ne sont pas également probables, la somme ou le droit que le joueur doit raisonnablement attendre, en vertu des deux chances données, équivaut à la somme ou au droit qu'apporterait la première chance multipliée par sa probabilité, plus la somme ou le droit qu'apporterait la seconde chance multipliée aussi par sa probabilité.

En effet, supposons, 1°. qu'il y ait dans une bourse deux billets, l'un de six francs, l'autre de douze francs, et qu'un joueur ait actuellement le droit de prendre, au hasard, l'un de ces deux billets : les probabilités étant égales, et exprimées l'une et l'autre par $\frac{1}{2}$, le droit réel du premier joueur équivaut à

$$6^f \times \frac{1}{2} + 12^f \times \frac{1}{2} = 9^f.$$

Supposons, 2°. qu'il y ait dans une bourse trois billets, savoir, deux de 12 francs et un de 6 francs, et qu'un joueur ait le droit de prendre au hasard un de ces trois billets, la probabilité qu'il tirera un des deux billets de 12 francs, étant exprimée par $\frac{2}{3}$, et la probabilité qu'il tirera celui de 6 francs, étant exprimée par $\frac{1}{3}$, la somme à laquelle il doit raisonnablement prétendre, sera

$$12^f \times \frac{2}{3} + 6^f \times \frac{1}{3} = 10^f.$$

Supposons, 3°. qu'il y ait dans une bourse quatre billets dont un donne droit de prendre au hasard, un des billets de la bourse du premier exemple, et dont chacun des trois autres donne droit de prendre au hasard, un des billets de la bourse du second exemple : l'espérance du joueur qui aura le droit de prendre au hasard, un de ces quatre billets, sera

$$9^f \times \frac{1}{4} + 10^f \times \frac{3}{4} = 9^f{,}75.$$

Passons à la solution de la question.

Soient A et B les deux joueurs, et convenons, en général, de désigner par A_p, B_q leurs états respectifs, lorsque le premier aura p jetons, et le second q : supposons, par exemple, que le premier ait deux fois plus d'adresse que le second, en-sorte qu'à chaque partie, il y ait deux à parier contre un qu'il

gagnera : alors leurs probabilités respectives de gagner une partie quelconque, seront $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$, puisque sur trois parties, le premier a la chance d'en gagner 2, et le second la chance d'en gagner une. Donnons enfin un jeton à A, et quatre à B, ce que nous exprimerons par A_1 et B_4. Les conditions du jeu étant celles de l'énoncé du problème, proposons-nous de trouver, sous ces données particulières, le droit des deux joueurs sur l'enjeu commun, ou leurs espérances mathématiquement calculées.

Soient désignées respectivement par x_1, x_2, x_3, x_4 les espérances du joueur A dans les hypothèses successives A_1 et B_4, A_2 et B_3, A_3 et B_2, A_4 et B_1, d'après quoi on aura $x_0=0$, $x_5=1$.

Il est évident que, suivant que A gagnera la première partie ou qu'il la perdra, il aura 2 ou 0 jetons, et son espérance deviendra x_2 ou $x_0=0$; que s'il la gagne, suivant qu'il gagnera ou qu'il perdra la seconde, son espérance deviendra x_3 ou x_1, et ainsi de suite : puis donc que les probabilités qu'il a de gagner ou de perdre chaque partie, sont respectivement $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$, on aura, en observant qu'on rentre ici dans le troisième des trois cas ci-dessus,

$$x_1=\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_0,$$

$$x_2=\frac{2}{3}x_3+\frac{1}{3}x_1,$$

$$x_3=\frac{2}{3}x_4+\frac{1}{3}x_2,$$

$$x_4=\frac{2}{3}x_5+\frac{1}{3}x_3;$$

comme les inconnues sont en même nombre que les équations, on pourra les évaluer, et conséquemment aussi on pourra assigner à chaque partie, les espérances respectives de chacun des joueurs.

Or en désignant par y_4, y_3, y_2, y_1 les espérances du joueur B dans les hypothèses A_1 et B_4, A_2 et B_3, A_3 et B_2, A_4 et B_1, ensorte que x_1 et y_4, x_2 et y_3, x_3 et y_2, x_4 et y

soient les espérances correspondantes, et observant que la somme des espérances des deux joueurs, est égale à l'unité, puisque ces espérances sont respectivement $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$, on aura

$$\text{pour}\begin{cases} A_1, B_4 \ldots\ldots & x_1 = \frac{16}{31}, \quad y_4 = \frac{15}{31}, \\ A_2, B_3 \ldots\ldots & x_2 = \frac{24}{31}, \quad y_3 = \frac{7}{31}, \\ A_3, B_2 \ldots\ldots & x_3 = \frac{28}{31}, \quad y_2 = \frac{3}{31}, \\ A_4, B_1 \ldots\ldots & x_4 = \frac{30}{31}, \quad y_1 = \frac{1}{31}. \end{cases}$$

Généralisons, et soit s le nombre total des jetons des deux joueurs : considérons les états successifs

A_1 et B_{s-1}, A_2 et B_{s-2}, A_3 et B_{s-3}.....
.....A_{s-3} et B_3, A_{s-2} et B_2, A_{s-1} et B_1,

et désignons respectivement par $x_1, x_2, x_3 \ldots x_{s-3}, x_{s-2}, x_{s-1}$; les espérances de A qui leur répondent : si m et n représentent toujours les adresses respectives des deux joueurs, la probabilité que A gagnera une partie quelconque, sera $\frac{m}{m+n}$, tandis que la probabilité qu'il la perdra, sera $\frac{n}{m+n}$: en raisonnant donc, comme ci-dessus, on obtiendra cette série d'équations,

$$x_1 = \frac{m}{m+n}\, x_2 + \frac{n}{m+n}\, x_0,$$

$$x_2 = \frac{m}{m+n}\, x_3 + \frac{n}{m+n}\, x_1,$$

$$x_3 = \frac{m}{m+n}\, x_4 + \frac{n}{m+n}\, x_2,$$

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

$$x_{s-3} = \frac{m}{m+n}\, x_{s-2} + \frac{n}{m+n}\, x_{s-4},$$

$$x_{s-2} = \frac{m}{m+n}\, x_{s-1} + \frac{n}{m+n}\, x_{s-3}\,;$$

$$x_{s-1} = \frac{m}{m+n}\, x_s + \frac{n}{m+n}\, x_{s-2}\,,$$

où $x_s = 1$, et ces équations seront encore en même nombre que les inconnues qu'elles renferment.

Si maintenant on suppose successivement $s = 2$, $= 3$, $= 4$, etc., ce qui réduira aussi à 2, 3, 4, etc., le nombre des équations, on trouvera, d'après la dernière formule, pour deux jetons,

$$x_1 = \frac{m}{m+n} = \frac{m(m-n)}{m^2-n^2}:$$

pour trois jetons, d'après les deux dernières formules,

$$x_1 = \frac{m^2}{m^2+mn+n^2} = \frac{m^2(m-n)}{m^3-n^3}\,,$$

$$x_2 = \frac{m(m+n)}{m^2+mn+n^2} = \frac{m(m^2-n^2)}{m^3-n^3}\,;$$

pour quatre jetons, d'après les trois dernières formules,

$$x_1 = \frac{m^3}{m^3+m^2n+mn^2+n^3} = \frac{m^3(m-n)}{m^4-n^4}\,,$$

$$x_2 = \frac{m^2(m+n)}{m^3+m^2n+mn^2+n^3} = \frac{m^2(m^2-n^2)}{m^4-n^4}\,,$$

$$x_3 = \frac{m(m^2+mn+n^2)}{m^3+m^2n+mn^2+n^3} = \frac{m(m^3-n^3)}{m^4-n^4}\,,$$

et ainsi de suite.

La loi de ces résultats est manifeste, et on en conclut facilement que x_p, y_q désignant respectivement les espérances de A et B qui répondent à l'état A_p, B_q, on doit avoir généralement, à cause de $x_p + y_q = 1$,

$$x_p = \frac{m^q(m^p-n^p)}{m^{p+q}-n^{p+q}}\,, \qquad y_q = \frac{n^p(m^q-n^q)}{m^{p+q}-n^{p+q}}\,.$$

Il faudra seulement avoir l'attention, dans le cas particulier de $m = n$, de délivrer ces formules du facteur $m - n$ qui affecte les deux termes.

Supposons que le joueur A ait six jetons, et que le joueur B en ait quatre : il faudra faire $p=6$, $q=4$; les deux formules précédentes deviendront

$$x_6=\frac{m^4(m^6-n^6)}{m^{10}-n^{10}}, \quad y_4=\frac{n^6(m^4-n^4)}{m^{10}-n^{10}}.$$

Si l'on suppose, en outre, que l'adresse de A soit double de celle de B, ce qui donnera $m=2$, $m=1$, il viendra

$$x_6=\frac{2^4(2^6-1)}{2^{10}-1}=\frac{1008}{1023}=\frac{336}{341},$$

$$y_4=\frac{2^4-1}{2^{10}-1}=\frac{15}{1023}=\frac{5}{341};$$

les espérances respectives de A et B seront donc dans le rapport de 336 à 5.

En délivrant les valeurs de x_p, y_q du facteur $m-n$ commun aux deux termes, et posant ensuite $m=n$, ces valeurs deviennent, après les réductions,

$$x_p=\frac{p}{p+q}, \quad y_q=\frac{q}{p+q}.$$

Ainsi lorsque deux joueurs sont d'égale adresse, leurs espérances respectives sont dans le rapport du nombre de leurs jetons, comme on pouvait le prévoir.

Mais il n'est pas réciproquement vrai que lorsque les jetons sont également répartis entre les deux joueurs, les espérances soient proportionnelles à leurs adresses respectives. En effet, pour $q=p$, on trouve

$$x_p=\frac{m^p}{m^p+n^q}, \quad y_q=\frac{n^p}{m^p+n^p};$$

d'où l'on conclut que leurs espérances sont dans le rapport de m^p à n^p, lequel ne devient celui de m à n que dans le cas particulier de $p=1$.

Plus le nombre m est grand par rapport à n, et p par rapport à q, plus la valeur de x^p approche de l'unité, et

conséquemment, plus l'espérance du premier joueur approche de la certitude.

Les résultats auxquels on vient de parvenir, servent à résoudre non-seulement la question proposée, mais encore les deux suivantes.

Problème XII. 1°. *Quelles doivent être les adresses respectives de deux joueurs, pour qu'en leur distribuant un nombre donné de jetons d'une manière déterminée, leurs espérances respectives soient proportionnelles à des nombres donnés?*

Problème XIII. 2°. *Les adresses respectives de deux joueurs étant connues, de quelle manière faut-il répartir entr'eux un nombre donné de jetons, pour que leurs espérances respectives soient proportionnelles à des nombres donnés?*

Nous donnerons un seul exemple de chacune de ces deux questions.

1°. On donne 4 jetons à A et 2 à B; quelles doivent être les adresses respectives de A et B, pour que l'espérance de A soit à celle de B dans le rapport de 850 à 81?

Faisons $x_p = X$, $y_q = Y$: on aura donc

$$X : Y :: 850 : 81, \quad \text{d'où} \quad X : 1 :: 850 : 850 + 81,$$

à cause de $X + Y = 1$, et conséquemment $X = \frac{850}{931}$: on a de plus

$$p = 4, \quad q = 2, \quad p + q = 6;$$

donc

$$X = \frac{m^q(m^p - n^p)}{m^{p+q} - n^{p+q}} = \frac{m^2(m^4 - n^4)}{m^6 - n^6} = \frac{m^2(m^2 + n^2)}{m^4 + n^2m^2 + n^4};$$

chassant les dénominateurs, transposant, réduisant et divisant par n^4, on obtient

$$81\left(\frac{m}{n}\right)^4 + 81\left(\frac{m}{n}\right)^2 - 850 = 0:$$

cette équation résolue donne

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{-81 \pm 531}{162}:$$

rejetant la racine négative qui rendrait $\frac{m}{n}$ imaginaire, on trouve

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{25}{9}; \quad \text{d'où} \quad \frac{m}{n} = \frac{5}{3};$$

donc l'adresse de A doit être à celle de B dans le rapport de 5 à 3.

2°. L'adresse de A étant à celle de B dans le rapport de 3 à 2, de quelle manière faut-il répartir 5 jetons, pour que leurs espérances soit dans le rapport de 135 à 76?

On a

$$X : Y :: 135 : 76, \quad \text{d'où} \quad X = \frac{135}{135+76};$$

$$m = 3, \quad n = 2, \quad p + q = 5, \quad \text{d'où} \quad q = 5 - p;$$

donc

$$\frac{135}{211} = \frac{m^q(m^p - n^p)}{m^{p+q} - n^{p+q}} = \frac{3^{5-p}(3^p - 2^p)}{3^5 - 2^5} = \frac{3^5 - 2^p \times 3^{5-p}}{211};$$

on tire de là

$$135 = 243 - 243\left(\frac{2}{3}\right)^p,$$

d'où

$$\left(\frac{2}{3}\right)^p = \frac{4}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2;$$

donc

$$p = 2, \quad q = 3:$$

il faut donc donner 2 jetons à A et 3 à B.

Problème XIV. *Soient deux joueurs* A *et* B *dont les adresses respectives sont* m *et* n, *et dont le premier ait* p *jetons et le second* q *jetons ; supposons qu'à chaque coup celui qui perd donne un jeton à son adversaire, et que la partie ne finisse que lorsque l'un des joueurs aura perdu tous ses jetons : on demande la probabilité que l'un des joueurs*, A, *par exemple, gagnera la partie avant ou au* r^{eme} *coup?*

M. *Laplace* résout ce problème qui a quelqu'analogie avec le précédent, par le procédé suivant qui est en quelque sorte mécanique.

Supposons q égal ou moindre que p, et considérons le développement du binome $(m+n)^q$: le premier terme m^q de ce développement, sera la probabilité de A pour gagner la partie au coup q (IIIe Prin.) ; on retranchera ce terme du développement, et l'on en retranchera pareillement le dernier terme n^q, si $q=p$, parce qu'alors n^q exprime la probabilité de B pour gagner la partie au coup q. Ensuite on multipliera le reste par $m+n$: le premier terme de ce produit aura pour facteur $m^q n$; et comme l'exposant q de m ne surpasse que de $q-1$ l'exposant de n, il en résulte que la partie ne peut pas être gagnée au coup $q+1$ par le joueur A, ce qui est visible, d'ailleurs ; car B ayant gagné un jeton dans les q premiers coups, et se trouvant conséquemment avoir, au moins, deux jetons après q coups, le joueur A ne peut gagner la partie qu'en $q+2$ coups. Mais si $p=q+1$, auquel cas on n'a pas dû précédemment, retrancher le dernier terme n^q du développement, on retranchera du produit son dernier terme n^{q+1} qui exprime la probabilité du joueur B pour gagner la partie au coup $q+1$. On multipliera de nouveau ce second reste par $m+n$; le premier terme de ce produit aura pour facteur $m^{q+1}n$; et comme l'exposant de m y surpasse de q celui de n, ce terme exprimera la probabilité de A pour gagner la partie au coup $q+2$: on retranchera ce premier terme et le dernier, si l'exposant de n y surpasse de p celui de m. On multipliera de nouveau ce troisième reste par $m+n$, et l'on continuera ces multiplications jusqu'au nombre de fois $r-q$, en retranchant à chaque multiplication, le premier terme, si l'exposant de m y surpasse de q celui de n, et le dernier terme, si l'exposant de n y surpasse de p celui de m. Cela posé, la somme des premiers termes ainsi retranchés, sera la probabilité de A pour gagner la partie avant ou au coup r, et la somme des derniers termes sera la probabilité semblable relative au joueur B.

Problème XV. *Une personne essaie de faire une chose*,

par exemple, d'amener un six avec un dé, ou un sonnez avec deux dés, ou carte blanche au piquet, etc.; cependant si elle ne réussit pas au premier coup, elle a la faculté d'en faire un second, un troisième, un quatrième, etc.: on demande en combien de coups elle peut parier à but de faire la chose?

Si l'on exprime par x l'espérance de Pierre, lorsqu'ayant manqué à gagner du premier coup, il va jouer son second coup; par y son espérance, lorsqu'ayant manqué le second coup, il va jouer le troisième, etc., et que l'on désigne par p le nombre des cas favorables à Pierre, et par q le nombre des cas contraires, et que l'on fasse $p + q = m$: la probabilité en faveur de Pierre, sera $\frac{p}{m}$, et la probabilité contre sera $\frac{q}{m}$. Soit S l'espérance de Pierre en commençant la première partie : il est clair que la probabilité de la perdre ou de faire un second coup, sera $\frac{q}{m}$, et que son droit à l'espérance x de gagner la seconde partie, sera $\frac{q}{m}x$: on aura donc (VIII[e] Princ.)

$$S = \frac{p}{m} + \frac{q}{m}x:$$

on trouvera de même,

$$x = \frac{p}{m} + \frac{q}{m}y,$$

$$y = \frac{p}{m} + \frac{q}{m}z,$$

etc.

et conséquemment,

$$S = \frac{p}{m} + \frac{pq}{m^2} + \frac{pq^2}{m^3} + \frac{pq^3}{m^4} + \text{etc.}$$

On conclura donc que Pierre peut parier, but à but, de

faire la chose en autant de coups qu'il faut employer de termes de cette suite pour avoir $S = \frac{1}{2}$.

La somme de cette suite infinie est toujours égale à l'unité; car s'il y a quelque possibilité que Pierre gagne au premier coup, il y a certitude qu'il gagnera après un nombre infini de coups. Cette certitude est représentée par l'unité, et en effet, la suite précédente est le développement de la fraction $\frac{p}{m-q}$, qui, pour la valeur $m = p + q$, devient l'unité.

Maintenant si l'on veut trouver en combien de coups on peut parier à bnt de faire une chose, sous des valeurs données pour p et q, il faudra sommer un nombre n des premiers termes de cette série, poser cette somme $= \frac{1}{2}$, et déduire de là la valeur de n.

On peut, par exemple, rechercher, 1°. en combien de coups on peut parier d'amener six avec un dé, auquel cas, on aura $m = 6$, $q = 5$, $p = 1$; 2°. en combien de coups on peut parier d'amener sonnez avec deux dés, ce qui donne $m = 36$, $q = 35$, $p = 1$. Ainsi la probabilité de cet événement est $\frac{1}{36}$ au premier coup; $\frac{1}{36} + \frac{35}{36.36}$ au second coup; $\frac{1}{36} + \frac{35}{36.36} + \frac{35.35}{36.36.36}$, etc. au troisième coup, etc. Ces différentes sommes de probabilités ne peuvent jamais devenir égales à l'unité, mais elles en approchent de plus en plus, de manière à n'en différer que d'une quantité moindre que toute fraction donnée. Un homme est donc moralement certain d'amener un certain coup en jouant toute sa vie au trictrac, certitude morale qu'il ne faut cependant pas confondre avec la certitude absolue qui résulterait d'une démonstration rigoureuse, distinction essentielle et qu'il ne faut pas perdre de vue. 3°. D'amener cartes blanches au piqnet, cas pour lequel on a

$$m = 578956, \quad q = 578633, \quad p = 323;$$

car on trouvera aisément que sur le nombre 225792840 qui

exprime en combien de manières on peut prendre 12 cartes sur 32, il y en a 125970 de tirer 12 cartes blanches, ce qui donne pour probabilité d'amener 12 cartes blanches au piquet $\frac{125970}{225792840}=\frac{323}{578956}$, ensorte qu'il y aurait de l'avantage à parier 1 contre 1792, et du désavantage à parier 1 contre 1791.

Problème XVI. *Pierre, Paul, Jacques et Jean jouent avec un dé, à qui amènera le plus tôt un as; comme ils jouent dans l'ordre où ils sont nommés, savoir, Pierre le premier, Paul le second, et ainsi de suite, et que les premiers auraient de l'avantage, si chaque joueur jouait un égal nombre de coups; on demande combien les derniers en doivent jouer de plus que les premiers, pour compenser l'avantage de la priorité?*

Soient n le nombre de coups que Pierre doit jouer, p le nombre des cas favorables, q le nombre des cas contraires: soient x, y, z, etc. le nombre de coups que doit jouer chacun des autres joueurs.

Dans le cas d'un dé, on a $p=1$, $q=5$. La probabilité de Pierre pour gagner au premier coup, sera $\frac{1}{6}$; pour gagner au second coup, elle sera (Probl. XV), $\frac{1}{6}+\frac{5}{6^2}=1-\frac{5^2}{6^2}$, pour gagner au troisième coup, elle sera

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{6^2}+\frac{5^2}{6^3}=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\left(\frac{1}{6}+\frac{5}{6^2}\right)=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\left(1-\frac{5^2}{6^2}\right)=1-\frac{5^3}{6^3}.$$

Ensorte que n étant le nombre de coups que Pierre doit jouer, la probabilité de gagner sera $1-\frac{5^n}{6^n}$.

Cherchons le sort du second joueur. Pierre n'ayant, par exemple, qu'un coup à jouer, auquel cas $n=1$, la probabilité en faveur de Paul, est $\frac{5}{6}$; et comme d'ailleurs Paul doit jouer x coups qui lui donnent la probabilité $1-\frac{5^x}{6^x}$, d'après ce qu'on a vu plus haut, la probabilité cherchée sera le produit

des deux, c'est-à-dire, $\frac{5}{6}-\frac{5^{x+1}}{6^{x+1}}$. Lorsque Pierre joue deux coups, ou pour $n=2$, la probabilité en faveur de Paul, après un coup, étant la précédente, après le second coup elle en sera les $\frac{5}{6}$, c'est-à-dire, $\frac{5^2}{6^2}-\frac{5^{x+2}}{6^{x+2}}$, et après n coups, elle deviendra $\frac{5^n}{6^n}-\frac{5^{x+n}}{6^{x+n}}$. Egalant les probabilités de Pierre et de Paul, on aura cette équation

$$1-\frac{5^n}{6^n}=\frac{5^n}{6^n}-\frac{5^{x+n}}{6^{x+n}},\quad \text{d'où}\quad \left(\frac{5}{6}\right)^{x+n}=2\left(\frac{5}{6}\right)^n-1;$$

d'où l'on tire facilement la valeur de x, en prenant les logarithmes de part et d'autre.

Pour avoir la valeur de y, il n'y a qu'à substituer dans l'expression $\frac{5^n}{6^n}-\frac{5^{x+n}}{6^{x+n}}$, pour n la somme des coups de Pierre et de Paul, c'est-à-dire, n plus la valeur de x déduite de la précédente équation, remplacer x par y et égaler le résultat à $1-\frac{5^n}{6^n}$. On trouverait de là même manière les valeurs de z, u, etc.

Problème XVII. *Etant donné un nombre quelconque de jetons ayant chacun deux faces, l'une blanche et l'autre noire; on propose de trouver toutes les combinaisons de faces blanches et noires qu'on peut amener en les jetant au hasard?*

Pour simplifier, supposons quatre jetons qui porteront conséquemment quatre faces blanches et quatre faces noires : il est clair que la question revient à compter les produits différens un à un, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre qu'on peut faire avec quatre choses. Si donc on désigne la face blanche par a, et la face noire par b, et qu'on face le développement de $(a+b)^4$, ce qui donne

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4;$$

on conclura, 1°. de chacun des termes a^4 et b^4, qu'il n'y a qu'une manière d'amener quatre faces blanches, et qu'une

manière d'amener quatre faces noires ; 2°. du terme $4a^3b$, qu'il y a quatre manières d'amener trois faces blanches et une noire ; 3°. du terme $4ab^3$, qu'il y a aussi quatre manières d'amener une face blanche et trois noires ; 4°. enfin du terme $6a^2b^2$, qu'il y a six manières d'amener deux faces blanches et deux noires.

En partant de cette propriété que les coefficiens numériques des termes équidistans des extrêmes dans le développement de $(x+a)^m$, sont les mêmes, on conclut 1° que le nombre des produits différens de m lettres deux à deux, est le même que celui des produits différens de m lettres $m-2$ à $m-2$; 2° que le nombre des produits m de lettres trois à trois est le même que celui du même nombre de lettres $m-3$ à $m-3$, et ainsi de suite ; ensorte que le nombre des faces blanches ou noires étant m, et les premières pouvant être amenées deux à deux de $\frac{m(m-1)}{2}$ manières différentes, les faces restantes en nombre $m-2$ pourront être amenées toutes ensemble d'autant de manières, et on en dira autant de pareil nombre de faces noires qui doivent être combinées avec les m faces blanches deux à deux. D'après cela b désignant une face noire et a une face blanche, si on développe $(a+b)^m$ et qu'on ordonne suivant b, les coefficiens numériques

$$m,\ \frac{m(m-1)}{2},\ \frac{m(m-1)(m-2)}{2.3}\ \text{etc.},$$

indiqueront en combien de manières on peut amener une, deux, trois, etc. faces noires sur m, et en même tems en combien de manières on peut amener $m-1$, $m-2$, $m-3$ etc. faces blanches sur m : on observera encore que les nombres de faces blanches amenées sont les exposans de a, et ceux des faces noires les exposans de b.

Problème XVIII. 1°. *Ayant* n *dés dont chacun ait* a *faces marquées d'un zéro*, b *faces marquées d'une unité positive, et* b *faces marquées d'une unité négative, trouver la probabilité qu'il y a d'amener zéro points, en jetant tous ces dés au hasard ?* 2°. *Ayant* n *dés dont chacun ait* a *faces marquées*

zéro, b *faces marquées* $+1$, *et* b *faces marquées* -1, *on demande la probabilité d'amener* $+\mu$ *ou* $-\mu$ *points*, *en projetant ces dés ?*

Ce problème est une généralité du précédent. 1°. On désignera par x^0 la face portant le numéro 0, par x^1 la face portant le numéro $+1$, et par x^{-1} la face portant le numéro -1. Or on sait par la théorie des combinaisons, que si on élève le trinome $ax^0+bx^1+bx^{-1}$ à la puissance n, le coefficient du terme absolu, c'est-à-dire, de la puissance 0 de x, dénotera le nombre des cas où la somme des points marqués par tous les dés, sera égale à zéro ; mais au lieu du trinome précédent élevé à la puissance n, on peut prendre $[a+b(x^1+x^{-1})]^n$. Donc en nommant A le coefficient de x, on aura pour la probabilité cherchée, $\frac{A}{(a+2b)^n}$, en observant que le nombre de tous les cas possibles, est $(a+2b)^n$. Tout se réduit donc à trouver le coefficient A qu'on peut obtenir de deux manières différentes :

1re *manière*. Si on développe la puissance $[a+b(x^1+x^{-1})]^n$, on aura

$$a^n+na^{n-1}b(x^1+x^{-1})+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2(x^1+x^{-1})^2+\text{etc.}:$$

or il est facile de voir que les puissances impaires du binome x^1+x^{-1} ne renferment aucun terme sans x, et que, dans les puissances paires, il y a toujours un terme sans x qui est celui du milieu, terme dans lequel les exposans de x^1 et x^{-1} sont les mêmes. Ainsi le terme sans x de $(x^1+x^{-1})^2$ sera 2, de $(x^1+x^{-1})^4$ sera $\frac{4.3}{1.2}$, de $(x^1+x^{-1})^6$ sera $\frac{6.5.4}{1.2.3}$, et ainsi de suite. Donc, on aura, en général,

$$A=a^n+\frac{2}{1}\cdot\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2+\frac{4.3}{1.2}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}a^{n-4}b^4$$
$$+\frac{6.5.4}{1.2.3}\cdot\frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-5)}{1.2.3.4.5.6}a^{n-6}b^6+\text{etc.};$$

c'est-à-dire,

$$A = a^n + n(n-1)\,a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.1.2}\,a^{n-4}b^4$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots(n-5)}{1.2.3.1.2.3}\,a^{n-6}b^6 + \text{etc.}$$

2ᵉ *manière.* Il est visible que le trinome $a + b(x^1 + x^{-1})$ peut se décomposer en ces deux binomes $\alpha + \beta x^1$, $\alpha + \beta x^{-1}$, ce qui donne, par la comparaison des termes,

$$\alpha^2 + \beta^2 = a, \quad \alpha\beta = b;$$

d'où l'on tire,

$$\alpha \pm \beta = \sqrt{a \pm 2b},$$

et de là,

$$\alpha = \frac{\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b}}{2},$$
$$\beta = \frac{\sqrt{a+2b} + \sqrt{a-2b}}{2};$$

on aura donc

$$[a + b(x^1 + x^{-1})]^n = (\alpha + \beta x^1)^n (\alpha + \beta x^{-1})^n$$
$$= \left(\alpha^n + n\alpha^{n-1}\beta x + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^{n-2}\beta^2 x^2 + \text{etc.}\right)$$
$$\times \left(\alpha^n + \frac{n\alpha^{n-1}\beta}{x} + \frac{n(n-1)}{2}\cdot\frac{\alpha^{n-2}\beta^2}{x^2} + \text{etc.}\right);$$

d'où il est facile de conclure qu'on aura

$$A = \alpha^{2n} + (n\alpha^{n-1}\beta)^2 + \left(\frac{n(n-1)\,\alpha^{n-2}\beta^2}{1.2}\right)^2$$
$$+ \left(\frac{n(n-1)(n-2)\,\alpha^{n-3}\beta^3}{1.2.3}\right)^2 + \text{etc.}$$

2°. Pour résoudre la seconde question, il n'y aura qu'à élever le trinome $a + b(x^1 + x^{-1})$ à la puissance n, et le coefficient de x^μ dénotera le nombre des cas où la somme de tous les points sera μ, de même que celui de $x^{-\mu}$ dénotera le nombre des cas où la somme des points sera $-\mu$. Ainsi la somme de ces deux coefficiens, divisée par $(a + 2b)^n$ qui est le nombre de tous les cas possibles, donnera la probabilité

cherchée. Or on a

$$[a+b(x^1+x^{-1})]^n = a^n + na^{n-1}b(x^1+x^{-1}) + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2(x^1+x^{-1})^2 + \text{etc.};$$

et de plus,

$$(x^1+x^{-1})^2 = x^2 + x^{-2} + 2,$$
$$(x^1+x^{-1})^3 = x^3 + x^{-3} + 3(x^1+x^{-1}),$$
$$(x^1+x^{-1})^4 = x^4 + x^{-4} + 4(x^2+x^{-2}) + \frac{4.3}{2},$$
$$(x^1+x^{-1})^5 = x^5 + x^{-5} + 5(x^3+x^{-3}) + \frac{5.4}{4}(x^1+x^{-1}),$$

et ainsi de suite. Donc si on suppose

$$[a+b(x^1+x^{-1})]^n = \mathrm{A} + \mathrm{B}(x^1+x^{-1}) + \mathrm{C}(x^2+x^{-2}) + \mathrm{D}(x^3+x^{-3}) + \text{etc.},$$

on aura

$$\mathrm{A} = a^n + \frac{2}{1}.\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{4.3}{1.2}.\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}a^{n-4}b^4 + \frac{6.5.4}{1.2.3}.\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-5)}{2.3.4.5.6}a^{n-6}b^6 + \text{etc.};$$

$$\mathrm{B} = na^{n-1}b + \frac{3}{1}.\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}a^{n-3}b^3 + \frac{5.4}{1.2}.\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2.3.4.5}a^{n-5}b^5 + \frac{7.6.5}{1.2.3}.\frac{n(n-1)\ldots\ldots\ldots(n-6)}{2.3\ldots\ldots\ldots\ldots7}a^{n-7}b^7 + \text{etc.};$$

$$\mathrm{C} = \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 + \frac{4}{1}.\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}a^{n-4}b^4 + \frac{6.5}{1.2}.\frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-5)}{2.5\ldots\ldots\ldots6}a^{n-6}b^6 + \frac{8.6.7}{1.2.3}.\frac{n(n-1)\ldots.(n-7)}{1.2\ldots\ldots.8}a^{n-8}b^8 + \text{etc.},$$

et ainsi de suite. Donc si on désigne par M le terme de la série A, B, C, etc. dont le quantième sera $\mu+1$, il est facile de voir qu'on aura

$$M = \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-\mu+1)}{1.2\ldots\ldots\mu} a^{n-\mu} b^{\mu}$$
$$+ \frac{\mu+2}{1} \cdot \frac{n(n-1)\ldots(n-\mu-1)}{1.2\ldots\ldots(\mu+2)} a^{n-\mu-2} b^{\mu+2}$$
$$+ \frac{(\mu+4)(\mu+3)}{1.2} \cdot \frac{n(n-1)\ldots(n-\mu-3)}{1.2\ldots\ldots(\mu+4)} a^{n-\mu-4} b^{\mu+4}$$
$$+ \text{etc.}$$

Or ce terme M est le coefficient de x^{μ} et de $x^{-\mu}$, de sorte qu'on aura $\frac{2M}{(a+2b)^n}$ pour l'expression de la probabilité cherchée.

A l'effet de faciliter le calcul des quantités A, B, C, etc., on a cherché à faire dépendre ces coefficiens les uns des autres, et en posant $\frac{a}{b} = K$, on trouve

$$C = \frac{nA - KB}{n+2},$$
$$D = \frac{(n-1)B - 2KC}{n+3},$$
$$E = \frac{(n-2)C - 3KD}{n+4},$$
etc.

Ainsi, connaissant les deux premiers termes A et B, on calculera facilement les autres.

Pour $a = b$, on a $K = 1$, et faisant successivement $n = 1$, $= 2$, $= 3$, etc., on trouvera

n	A	B	C	D	E	F	G
1	1	1	0	0	0	0	0
2	3	2	1	0	0	0	0
3	7	6	3	1	0	0	0
4	19	16	10	4	1	0	0
5	51	45	30	15	5	1	0
6	141	126	90	50	21	6	1.

La solution de cette question à laquelle on ramène la suivante, est due au célèbre *Lagrange*, qui l'a donnée dans un Mémoire inséré dans *les Mélanges de la Société Royale de Turin* pour les années 1770 — 1773, ayant pour titre : *De l'utilité de la méthode de prendre le milieu entre les résultats de plusieurs observations, etc.* On ne sera peut-être pas fâché de trouver ici l'introduction à ce beau Mémoire, l'un des premiers travaux de ce grand géomètre.

Lorsqu'on a plusieurs observations d'un même phénomène dont les résultats ne sont pas tout à fait d'accord, on est certain que ces observations sont toutes, ou au moins en partie, peu exactes, de quelque source que l'erreur puisse provenir : alors on a coutume de prendre le milieu entre tous les résultats, parce que de cette manière, les différentes erreurs se répartissant également dans toutes les observations, l'erreur qui peut se trouver dans le résultat moyen, devient aussi moyenne entre toutes les erreurs. Or quoique tout le monde reconnaisse l'utilité de cette pratique, pour diminuer autant qu'il est possible l'incertitude qui naît de l'imperfection des instrumens, et des erreurs inévitables des observations, il est cependant avantageux d'examiner et d'apprécier, par le calcul, les avantages qu'on peut espérer de retirer d'une semblable méthode. Je commencerai par supposer que les erreurs qui peuvent se glisser dans chaque observation soient données, et qu'on connaisse aussi le nombre des cas qui peuvent donner ces erreurs, c'est-à-dire, la facilité de chaque erreur : je supposerai ensuite que l'on connaisse seulement les limites entre lesquelles toutes les erreurs possibles doivent être renfermées, avec la loi de leur facilité, et je chercherai dans l'une et dans l'autre de ces hypothèses, quelle est la probabilité que l'erreur du résultat moyen soit nulle, ou égale à une quantité donnée, ou seulement comprise entre des limites données. Je ferai voir, en même temps, comment on peut déterminer, *à posteriori*, la loi même de la facilité des erreurs, et quelle est la probabilité que, dans cette détermination, on ne se trompera pas d'une quantité donnée. D'où je déduirai des règles assez simples

pour la correction des instrumens, par des vérifications réitérées. La difficulté consiste ici, comme dans toutes les questions de probabilité, dans l'énumération des cas favorables et possibles dont le quotient est la probabilité.

Nous passerons à la solution du premier problème, en supprimant même les remarques et le scholie qui nous mèneraient trop loin.

Problème XIX. *On suppose que dans chaque observation, on peut se tromper d'une unité tant en plus qu'en moins; mais que le nombre des cas qui peuvent donner un résultat exact, est au nombre des cas qui peuvent donner une erreur d'une unité, comme* a : 2b ; *on demande quelle est la probabilité d'avoir un résultat exact, en prenant le milieu entre les résultats particuliers d'un nombre* n *d'observations?*

Puisqu'il y a a cas qui donnent zéro d'erreur, et $2b$ cas qui donnent $+1$ et -1, c'est-à-dire, b cas qui donnent $+1$, et b cas qui donnent -1 d'erreur; il est clair par les règles ordinaires des probabilités (1er Prin.), que la probabilité que l'erreur soit nulle dans chaque observation particulière, sera exprimée par $\frac{a}{a+2b}$. Voyons quelle est la probabilité que l'erreur soit encore nulle, en prenant le milieu entre n observations. Il est facile de voir que cette question se réduit à celle-ci résolue précédemment: ayant n dés dont chacun ait a faces marquées d'un zéro, b faces marquées d'une unité positive et b faces marquées d'une unité négative, ensorte que le nombre total des faces soit $a+2b$, trouver la probabilité d'amener zéro, en jetant tous ces dés au hasard. On a vu que la probabilité cherchée est $\frac{A}{(a+2b)^n}$, et on a trouvé

$$A = a^n + n(n-1)a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.2}a^{n-4}b^4$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{2.3.2.3}a^{n-6}b^6 + \text{etc.},$$

$$A = a^{2n} + (na^{n-1}b)^2 + \left(\frac{n(n-1)a^{n-2}b^2}{1.2}\right)^2 + \left(\frac{n(n-1)(n-2)a^{n-3}b^3}{1.2.3}\right)^2 + \text{etc.}$$

Soit $a = b$, ce qui revient à supposer qu'il y ait un nombre égal de cas qui donnent o, ou $+1$, ou -1 d'erreur : la probabilité d'avoir un résultat exact dans chaque observation particulière, sera $\frac{1}{3}$, et celle d'avoir un résultat exact, en prenant le terme moyen entre les résultats de n observations, sera, suivant la première formule et après avoir divisé par a^n le haut et le bas de la fraction $\frac{A}{(a+2b)^n}$,

$$\frac{1 + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.2} + \frac{n(n-1)\ldots\ldots(n-5)}{2.3.2.3}}{3^n}.$$

Donc en faisant successivement $n = 1$, $= 2$, $= 3$, etc., on aura

pour	$n = 1$	probabilité	$= \frac{1}{3}$
	$n = 2$		$= \frac{1}{3}$
	$n = 3$		$= \frac{7}{27}$
	$n = 4$		$= \frac{19}{81}$
	$n = 5$		$= \frac{51}{243}$
	$n = 6$		$= \frac{141}{729}$
	etc.		etc.

On voit par cette table que la probabilité que l'erreur soit

nulle, diminue à mesure que l'on prend un plus grand nombre d'observations.

Soit maintenant $a = 2b$, ensorte que le nombre des cas qui donnent un résultat exact, soit égal au nombre de ceux qui peuvent donner une erreur de $+1$ et -1 : dans ce cas, il vaudra mieux se servir de la seconde formule ; car on aura $\alpha = \sqrt{b}$, $\beta = \sqrt{b}$, d'où $\beta = \alpha$, de sorte qu'à cause de $a + 2b = 4b$, on aura, en divisant le haut et le bas de la fraction $\frac{A}{(a+2b)^n}$ par b^n,

$$\frac{1 + n^2 + \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^2 + \left(\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\right)^2 + \text{etc.}}{4^n}.$$

pour la probabilité que l'erreur soit nulle en prenant le milieu entre n observations. Donc en faisant successivement $n = 1$, $= 2$, $= 3$, etc., on aura

$$\text{pour} \left\{ \begin{array}{l} n = 1 \\ n = 2 \\ n = 3 \\ n = 4 \\ \text{etc.} \end{array} \right\} \text{probabilité} \left\{ \begin{array}{l} = \frac{1}{2} \\ = \frac{3}{8} \\ = \frac{5}{16} \\ = \frac{35}{128} \\ \text{etc.} \end{array} \right.$$

Soit $b = 2a$, de manière que le nombre des cas qui peuvent donner une erreur d'une unité tant en plus qu'en moins, soit double de celui où on aurait un résultat exact. On aura pour la probabilité que l'erreur soit nulle, en prenant le milieu entre un nombre n d'observations,

$$\frac{1 + 4n(n-1) + \frac{16n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.2} + \frac{26n(n-1)\ldots(n-5)}{2.3.2.3}}{5^n}.$$

Donc faisant successivement $n=1, =2, =3$, etc., on aura

$$\text{pour}\left\{\begin{array}{l} n=1 \\ n=2 \\ n=3 \\ n=4 \\ \text{etc.} \end{array}\right\}\text{probabilité}\left\{\begin{array}{l} =\frac{1}{5} \\ =\frac{9}{25} \\ =\frac{1}{5} \\ =\frac{29}{125} \\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

Problème XX. *Un joueur jouant successivement contre tous ceux qui se présentent, estimer la probabilité de sa ruine, après un nombre quelconque de parties?*

L'expérience prouve sans réplique, que la passion du jeu conduit ceux qui s'y livrent à une ruine inévitable; mais cette triste vérité est perdue pour les joueurs, parce qu'ils s'accoutument à ne voir que l'effet du hasard dans les événemens du jeu, qui feraient peut-être plus d'impression sur leur esprit, si on leur démontrait qu'ils doivent les considérer comme une suite nécessaire de la combinaison des chances. Tel fut sans doute le motif qui engagea l'illustre *Buffon* à examiner cette question sous un point de vue purement mathématique, dans son *Essai d'Arithmétique morale* : on trouve dans cet ouvrage des idées qui auraient dû conduire l'auteur aux vrais principes de la théorie générale du jeu, qu'on ne doit pas confondre avec la théorie des différens jeux considérés chacun en particulier, laquelle a été l'objet des recherches de plusieurs géomètres et particulièrement de *Montmort.*

Avant d'entrer en matière, M. *Ampère* fait connaître les principaux résultats auxquels il a été conduit, et dont la démonstration est l'objet de son Mémoire.

1°. En écartant les considérations morales qui font varier la

valeur de l'argent suivant les circonstances où se trouvent les joueurs, il ne saurait y avoir aucun désavantage à jouer à jeu égal contre un adversaire également riche, puisque l'un ne peut perdre que l'autre ne gagne, et que tout est égal de part et d'autre ; 2°. la même chose peut se dire de deux joueurs de fortunes inégales, s'ils sont décidés à ne faire qu'un nombre déterminé de parties, et assez petit pour que l'un ni l'autre ne puisse perdre tout ce qu'il possède ; 3°. il n'en est plus ainsi lorsqu'il s'agit d'un nombre indéfini de parties ; la possibilité de faire face plus long-temps au jeu, donnant au plus riche des deux joueurs, un avantage qui croît en raison de l'excès de sa fortune sur celle de son adversaire ; 4°. cet avantage deviendrait infini, si l'une des fortunes pouvait l'être ; car alors la ruine du moins riche des joueurs serait certaine : d'où l'on doit conclure que c'est s'exposer à une ruine inévitable, que de jouer contre tous ceux qui se présentent : on peut, en effet, assimiler ce nombre indéfini de joueurs à un seul dont la fortune est indéfinie.

En représentant, comme on le fait ordinairement, par l'unité la certitude absolue, par exemple, celle qui résulte d'une démonstration rigoureuse, on pourra regarder comme une certitude morale toute fraction variable qui, sans devenir jamais égale à l'unité, en approche continuellement, et de manière à en différer d'aussi peu qu'on voudra (Probl. XV).

Toutes les fois que rien ne borne le nombre des coups qui doivent amener un événement, la probabilité de cet événement augmente avec les coups : mais il faut distinguer le cas où cette augmentation tend vers une limite déterminée, de celui que nous venons de faire remarquer, où elle n'a d'autre limite que la certitude. Pour donner un exemple du premier cas, supposons deux joueurs également riches jouant à jeu égal, jusqu'à ce que l'un d'eux soit ruiné : il est aisé de voir que rien alors ne détermine le nombre des parties que feront les deux joueurs, et que la probabilité que l'un d'eux se ruinera, augmente avec

le nombre des parties, sans pouvoir cependant jamais surpasser la limite $\frac{1}{2}$, puisque la probabilité de se ruiner, étant la même pour chacun d'eux, n'est plus que la moitié de la certitude. Quant à celui qui se livre à la passion du jeu, la probabilité de sa ruine croissant continuellement, finit par surpasser toute probabilité donnée.

Pour déterminer la limite des probabilités contraires au joueur, il faut trouver le terme général de la série qui les comprend toutes, c'est-à-dire, la probabilité que le joueur se ruinera à la dernière d'un nombre quelconque de parties; et nous supposerons que la somme jouée est la même à chaque partie, et qu'elle est une partie aliquote exacte de la fortune du joueur en entrant au jeu, supposition que nous pouvons faire tourner à son profit, en prenant cette partie aliquote moindre que les sommes successives qu'il hasarde à chaque partie.

Représentons par m le nombre de fois que cette partie aliquote est contenue dans la fortune du joueur : puisqu'il ne risque que $\frac{1}{m}$ de sa fortune, à chaque partie, il ne pourra se trouver ruiné avant la partie dont le rang est désigné par m : pour qu'il le fut, en effet, à cette partie, il faudrait qu'il la perdît après avoir perdu toutes les précédentes : s'il en gagne une et qu'il perde toutes les autres, il ne se trouvera ruiné qu'après $m+1$ parties, ce qui suppose $m+2$ parties : s'il en gagne une seconde, il ne pourra plus être ruiné qu'après $m+2$ parties, ce qui suppose $m+4$ parties, et il est aisé de voir, en général, que p étant un nombre quelconque, il faudra, pour qu'il ne reste rien au joueur, que le nombre de toutes les parties soit $m+2p$, le nombre des parties qu'il gagne étant p, et celui des parties qu'il perd étant $m+p$.

Soit $\frac{q}{1}$ le rapport, à chaque partie, entre le nombre des cas favorables et celui des contraires : la probabilité de gagner une

partie sera $\frac{q}{1+q}$, et la probabilité de la perdre, sera $\frac{1}{1+q}$. Si l'on veut avoir la probabilité que p parties gagnées et $m+p$ parties perdues se succéderont dans un ordre déterminé, il faudra, conformément au (III[e] Principe), faire le produit de p facteurs égaux à $\frac{q}{1+q}$, et de $m+p$ facteurs égaux à $\frac{1}{1+q}$, ce qui donnera $\frac{q^p}{(1+q)^{m+2p}}$.

Cette probabilité reste la même pour tous les arrangemens qu'on peut imaginer entre les parties gagnées et perdues ; et comme ils sont absolument indépendans, il est évident que la probabilité précédente doit être multipliée par le nombre de ces arrangemens, en observant qu'il faut faire abstraction de ceux qui n'auraient pas permis au joueur de parvenir à la partie que nous considérons, en le privant de sa fortune dès les parties précédentes. Soit $m+2r$ le rang d'une de ces parties : r étant $<p$, il faudra rejeter tous les arrangemens de p parties gagnées et de $m+p$ parties perdues, dont les $m+2r$ premières parties renfermeraient r parties gagnées et $m+r$ parties perdues, parce que ce sont ces arrangemens qui auraient ruiné le joueur après $m+2r$ parties.

Sans cette restriction, le nombre des arrangemens serait

$$\frac{m+2p}{1}\cdot\frac{m+2p-1}{2}\cdot\frac{m+2p-2}{3}\cdots\cdots\frac{m+p+1}{p}\cdots\cdots(1),$$

en observant que le nombre total des arrangemens de $m+2p$ choses, étant

$$1.2.3\ldots\ldots(m+p)\,(m+p+1)\ldots\ldots(m+2p),$$

il faut le diviser par le nombre des arrangemens des $m+p$ parties perdues, et encore par le nombre des arrangemens des p parties gagnées, pour n'avoir que le nombre des arrangemens entre les parties gagnées et perdues. Pour savoir ce qu'il

devient après la correction annoncée plus haut, exprimons en général par $A^{(t)}$ le nombre quelconque t de parties qui amènent la ruine du joueur précisément à la dernière t de ces parties, (t) étant un indice et non un exposant : d'après cette notation, le nombre dont nous cherchons la valeur, sera représenté par $A^{(m+2p)}$, et $A^{(m+2r)}$ rappellera le nombre des arrangemens de r parties gagnées et de $m+r$ parties perdues, qui auraient ruiné le joueur à une des parties précédentes dont le rang est, en général, désigné par $m+2r$, r étant $< p$.

Si l'on joint $p-r$ parties gagnées et autant de parties perdues à chacun de ces derniers arrangemens dont le nombre est $A^{(m+2r)}$, on en formera de p parties gagnées et de $m+p$ parties perdues, qui devront être retranchés de la formule (1), afin qu'après avoir donné à r toutes les valeurs possibles en nombres entiers, depuis $r=0$ jusqu'à $r=p-1$, il ne reste que les arrangemens dont le nombre est $A^{(m+2p)}$: or le nombre des arrangemens de $2p-2r$ choses est, d'après ce qu'on a dit précédemment,

$$\frac{2p-2r}{1}\cdot\frac{2p-2r-1}{2}\cdot\frac{2p-2r-2}{3}\cdots\cdot\frac{p-r+1}{p-r}$$

qu'il faut prendre $A^{(m+2r)}$ fois : on a donc pour le nombre des arrangemens à retrancher,

$$\frac{2p-2r}{1}\cdot\frac{2p-2r-1}{2}\cdot\frac{2p-2r-2}{3}\cdots\cdots\frac{p-r+1}{p-r}A^{(m+2r)}.$$

Faisant successivement $r=p-1$, $=p-2$, $=p-3$, etc., on trouvera pour les différentes valeurs de l'expression précédente,

$$\frac{2}{1}A^{(m+2p-2)},\quad \frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}A^{(m+2p-4)},\quad \frac{6}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{3}A^{(m+2p-6)},\quad \text{etc.},$$

d'où on conclura

$$(2)\ldots\mathrm{A}^{(m+2p)}=\frac{m+2p}{2}\cdot\frac{m+2p-1}{2}\cdot\frac{m+2p-2}{3}\cdots\frac{m+p+1}{p}$$

$$-\frac{2}{1}\mathrm{A}^{(m+2p-2)}-\frac{4}{1}\cdot\frac{3}{2}\mathrm{A}^{(m+2p-4)}-\frac{6}{1}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{3}\mathrm{A}^{(m+2p-6)}$$

. . . .

. . . .

$$-\frac{2p-2r}{1}\cdot\frac{2p-2r-1}{2}\cdot\frac{2p-2r-2}{3}\cdots\cdots\frac{p-r+1}{p-r}\mathrm{A}^{(m+2r)}-\text{etc.}$$

$$=\frac{m+2p}{1}\cdot\frac{m+2p-1}{2}\cdot\frac{m+2p-2}{3}\cdots\cdots\frac{m+p+1}{p}$$

$$-2\mathrm{A}^{(m+2p-2)}-2\cdot\frac{3}{1}\mathrm{A}^{(m+2p-4)}-2\cdot\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\mathrm{A}^{(m+2p-6)}$$

. . . .

. . . .

$$-2\cdot\frac{2p-2r-1}{1}\cdot\frac{2p-2r-2}{2}\cdot\frac{2p-2r-3}{3}\cdots\cdots\frac{p-r+1}{p-r-1}\mathrm{A}^{(m+2r)}-\text{etc.}$$

Pour avoir une valeur de $\mathrm{A}^{(m+2p)}$ indépendante des quantités $\mathrm{A}^{(m+2p-2)}$, $\mathrm{A}^{(m+2p-4)}$, $\mathrm{A}^{(m+2p-6)}\ldots\mathrm{A}^{(m+2r)}$, etc., on observera que le joueur ne peut se ruiner à la partie dont le rang est désigné par $m+2p$, à moins que, dans les $m+2p-1$ parties précédentes, il n'ait été réduit à la fraction $\frac{1}{m}$ de sa fortune primitive, puisque nous avons exprimé par cette fraction, la mise qu'il hasarde à chaque partie. Il est nécessaire pour cela que sur ces $m+2p-1$ parties, il y en ait p gagnées, et $m+p-1$ perdues. On voit d'ailleurs que le nombre des arrangemens différens qu'on peut donner à ces parties, sans supposer qu'aucune d'elles ait ruiné le joueur, doit être égal à celui des arrangemens de p parties gagnées et $m+p$ parties perdues, dont le nombre est représenté par $\mathrm{A}^{(m+2p)}$, puisque chacun de ceux-ci se forme d'un des premiers, en y ajoutant une partie perdue. Nous tirerons de cette considération

une autre valeur de $A^{(m+2p)}$ que nous égalerons à la précédente.

Le nombre des arrangemens qu'on peut faire avec $m+2p-1$ parties, est en général, d'après (1),

$$\frac{m+2p-1}{1}\cdot\frac{m+2p-2}{2}\cdot\frac{m+2p-3}{3}\cdots\cdots\frac{m+p}{p},$$

formule qui revient à celle-ci,

$$\frac{m+p}{1}\cdot\frac{m+2p-1}{2}\cdot\frac{m+2p-2}{3}\cdots\cdots\frac{m+p+1}{p}.$$

Il ne s'agit donc plus, pour avoir la valeur de $A^{(m+2p)}$, que de soustraire du nombre exprimé par cette formule, le nombre des arrangemens qui auraient ruiné le joueur dès les parties précédentes, lesquels, ainsi que nous l'avons vu précédemment, se forment évidemment des arrangemens de r parties gagnées et $m+r$ parties perdues, dont le nombre est représenté par $A^{(m+2r)}$, pris avec tous ceux de $2p-2r-1$ parties dont $p-r$ gagnées et $p-r-1$ perdues, et qui peuvent se faire de

$$\frac{2p-2r-1}{1}\cdot\frac{2p-2r-2}{2}\cdot\frac{2p-2r-3}{3}\cdots\cdots\frac{p-r+1}{p-r-1}\cdots\cdots(3)$$

manières différentes.

En raisonnant ici comme dans le calcul précédent, on verra que le nombre total des arrangemens à retrancher, se trouvera en donnant successivement à r toutes les valeurs possibles en nombres entiers, depuis $r=p-1$ jusqu'à $r=0$ dans la formule (3) multipliée par $A^{(m+2r)}$: si l'on réunit ensuite tous les résultats obtenus, savoir,

$$A^{(m+2p-2)},\quad \frac{3}{1}A^{(m+2p-4)},\quad \frac{5}{1}\cdot\frac{4}{2}A^{(m+2p-6)},\quad \text{etc.},$$

on aura



$$A^{(m+2p)} = \frac{m+p}{2} \cdot \frac{m+2p-1}{2} \cdot \frac{m+2p-2}{3} \cdots\cdots \frac{m+p+1}{p}$$

$$- A^{(m+2p-2)} - \frac{3}{1} A^{(m+2p-4)} - \frac{5}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{3} A^{(m+2p-6)}$$

. . . .

. . . .

$$- \frac{2p-2r-1}{1} \cdot \frac{2p-2r-2}{2} \cdot \frac{2p-2r-3}{3} \cdots \frac{p-r+1}{p-r-1} A^{(m+2r)}$$

— etc.

En doublant les deux membres de cette équation, on obtient la suivante,

$$(4) \ldots 2A^{(m+2p)} = \frac{2m+2p}{1} \cdot \frac{m+2p-1}{2} \cdot \frac{m+2p-2}{3} \cdots \frac{m+p+1}{p}$$

$$- 2A^{(m+2p-2)} - 2 \cdot \frac{3}{1} A^{(m+2p-4)} - 2 \cdot \frac{5}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{3}{3} A^{(m+2p-6)}$$

. . . .

. . . .

$$- 2 \cdot \frac{2p-2r-1}{1} \cdot \frac{2p-2r-2}{2} \cdot \frac{2p-2r-3}{3} \cdots \frac{p-r-1}{p-r-1} A^{(m+2r)}$$

— etc.,

et en retranchant l'équation (2) de cette équation (4), il vient pour différence,

$$(5) \ldots A^{(m+2p)} = \frac{m}{1} \cdot \frac{m+2p-1}{2} \cdot \frac{m+2p-2}{3} \cdots \frac{m+p+1}{p};$$

formule remarquable par son élégante simplicité, et qu'on aurait facilement obtenue par induction.

Substituons pour $A^{(m+2p)}$ cette valeur dans l'expression de la probabilité qui est $A^{(m+2p)} \times \frac{q^p}{(1+q)^{m+2p}}$, et nous aurons

$$(6) \ldots\ldots \frac{m}{1} \cdot \frac{m+2p-1}{2} \cdot \frac{m+2p-2}{3} \cdots \frac{m+p+1}{p} \cdot \frac{q^p}{(1+q)^{m+2p}}.$$

40..

En faisant successivement $p=0$, $p=1$, $p=2$, $p=3$, etc., on aura les probabilités suivantes que le joueur se ruinera :

A la partie $m^{ième}$......... $\frac{1}{(1+q)^m}$;

A la partie $(m+1)^{ième}$..... $\frac{m}{1}.\frac{m+2}{1}.\frac{q}{(1+q)^{m+2}}$;

A la partie $(m+2)^{ième}$..... $\frac{m}{1}.\frac{m+3}{2}.\frac{q^2}{(1+q)^{m+4}}$;

A la partie $(m+3)^{ième}$..... $\frac{m}{1}.\frac{m+5}{2}.\frac{m+4}{3}.\frac{q^3}{(1+q)^{m+6}}$?

etc.

Si dans la formule

$$\frac{m(m-1)(m-2)......(m-n+1)}{1.2.3...........n}$$

qui compte le nombre des produits différens de m lettres prises n à n, on fait $m=m'+2p$, $n=p$, on aura la suivante,

$$\frac{(m'+2p)}{1}.\frac{m'+2p-1}{2}.\frac{(m'+2p-2)}{3}......\frac{m'+p+1}{p},$$

qui ne diffère du second membre de (5) que par le premier facteur qui manque du terme $2p$; ensorte qu'en désignant par $P_{(m+2p),(p)}$ le nombre des produits différens de $m+2p$ lettres p à p, on a

$$\frac{P_{(m+2p),(p)}}{A^{(m+2p)}}=\frac{m+2p}{m},\quad \text{d'où}\quad \frac{m.P_{(m+2p),(p)}}{m+2p}=A^{(m+2p)},$$

et conséquemment l'expression (6) de la probabilité devient

$$A^{(m+2p)}\times\frac{q^p}{(1+q)^{m+2p}}=\frac{m.P_{(m+2p),(p)}}{m+2p}\times\frac{q^p}{(1+q)^{m+2p}}.$$

On pourrait maintenant restreindre la question précédente, et supposer que deux joueurs jouent constamment l'un contre l'autre. Il faudrait d'abord calculer la probabilité que l'un des joueurs se trouve ruiné à la dernière d'un nombre quelconque

de parties. Supposons encore, à l'effet de rendre le calcul plus simple, que la somme jouée soit la même à chaque partie, et qu'elle soit une aliquote exacte de la fortune de chaque joueur, contenue m fois dans la fortune du joueur B, et n fois dans celle du joueur C, m, n exprimant le rapport des deux fortunes. Il est évident que, dans cette supposition, le premier joueur ne se trouvera ruiné qu'après $m+2p$ parties dont p gagnées et $m+p$ perdues; d'où il suit qu'en représentant toujours par $\frac{q}{1}$ le rapport entre les chances favorables et les chances contraires à ce joueur, $\frac{q^p}{(1+q)^{m+2p}}$ exprimera toujours la probabilité que le joueur B perdra la totalité de sa fortune après $m+2p$ parties dans tous les arrangemens qu'on peut en faire. Cette probabilité est donc encore la même que dans le cas précédent; mais le nombre des arrangemens des $m+2p$ parties par lequel il faut la multiplier, ne sera pas le même, parce qu'il faudra exclure du nombre total des arrangemens de p parties gagnées et de $m+p$ parties perdues, non-seulement les arrangemens qui auraient ruiné le joueur B avant la partie dont le rang est désigné par $m+2p$, comme nous l'avons fait dans le cas précédent, mais encore ceux qui auraient amené la ruine de son adversaire avant la même partie, puisque le jeu cessant nécessairement dès que l'un des joueurs est ruiné, il n'aurait pas pu être continué dans ce cas jusqu'à la partie pour laquelle nous calculons la probabilité de la ruine du premier joueur.

Il suit de cette observation que la probabilité de la ruine de l'un des joueurs, ne peut être calculée indépendamment de la probabilité de celle de l'autre; mais comme l'analyse qui résout cette question est très-étendue, nous renverrons le lecteur au mémoire de M. *Ampère*, ou à l'ouvrage que nous nous proposons de publier incessamment sur cette matière, et nous nous bornerons ici à faire connaître les conclusions auxquelles ce géomètre est parvenu : il a trouvé que la limite des proba-

bilités contraires au joueur B, est

$$\frac{1+q+q^2+q^3+\ldots\ldots+q^{n-1}}{1+q+q^2+q^3+\ldots\ldots+q^{k-1}},$$

et que celle des probabilités contraires au joueur, est

$$\frac{q^n+q^{n+1}+q^{n+2}+\ldots\ldots+q^{k-1}}{1+q+q^2+q^3+\ldots\ldots+q^{k-1}},$$

en observant que $k=m+n$. La somme de ces deux limites est égale à l'unité qui exprime la certitude, ensorte qu'on ne peut douter que l'un des joueurs ne finisse par se ruiner. A l'égard de l'avantage que donne au plus riche, l'inégalité des fortunes, il faut, pour le déterminer, supposer tout le reste égal entre les deux joueurs, et par conséquent $q=1$. Le numérateur de la première fraction se réduit alors à n; le numérateur de la seconde et le dénominateur commun deviennent respectivement m et k, ensorte que les deux fractions se réduisent à

$$\frac{n}{m+n}; \quad \frac{m}{m+n}:$$

or $m:n$ est le rapport de la fortune du joueur B à celle du joueur C; d'où l'on conclut que la probabilité que chaque joueur, à jeu égal, ruinera son adversaire, est en raison directe de sa fortune.

Lorsque q est autre que l'unité, on peut réduire à deux termes le numérateur et le dénominateur de chaque fraction, en les multipliant par $q-1$; on a ainsi $\frac{q^n-1}{q^k-1}$ pour la probabilité que C ruinera B, et $\frac{q^k-q^n}{q^k-1}$ pour celle que B ruinera C.

En égalant les deux expressions ci-dessus, on est conduit à l'équation

$$q^{k-1}+q^{k-2}+q^{k-3}+\ldots+q^n-q^{n-1}-q^{n-2}-q^{n-3}\ldots-1=0,$$

qui donne q lorsqu'on connaît m et n, ou qui fait connaître le rapport qui doit exister, à chaque partie, entre les chances favorables à chaque joueur, pour qu'il en résulte en faveur du moins riche, un avantage qui tende à compenser l'inégalité des fortunes, sans lui donner plus d'espérance que n'en a son adversaire.

Si l'on suppose infinie la fortune du joueur C, par exemple, on a $n = \frac{1}{0}$: alors le nombre m restant fini, la fraction $\frac{m}{m+n}$ qui exprime la probabilité que ce joueur se ruinera, s'évanouit, et la probabilité $\frac{n}{m+n}$ qu'il ruinera son adversaire, devient égale à l'unité, ce qui équivaut à la certitude : le joueur B se trouve alors précisément dans le même cas que s'il jouait indéfiniment contre tout joueur.

En supposant toujours le jeu égal, et par conséquent $q = 1$, et faisant de plus $m = n$, pour dire que les deux joueurs sont également riches, les deux fractions $\frac{m}{m+n}$, $\frac{n}{m+n}$ deviennent égales et se réduisent l'une et l'autre à $\frac{1}{2}$: la probabilité de se ruiner est donc la même pour les deux joueurs.

Problème XXI. *Une loterie étant composée de* m *numéros* 1, 2, 3......m, *dont il sort* n *numéros à chaque tirage, quelle probabilité y a-t-il que parmi les* n *numéros d'un tirage, il ne se trouvera pas deux nombres consécutifs de la suite naturelle des nombres?*

On peut chercher directement le nombre des combinaisons de cette sorte; ou bien on peut, au contraire, chercher le nombre de celles qui renferment deux numéros consécutifs; car ce dernier nombre retranché du nombre total des combinaisons n à n, donnera pour reste le nombre des combinaisons cherché. Pour abréger le discours, nous appellerons *ambe successif*, l'assemblage de deux numéros se succédant consé-

cutivement dans la suite des nombres naturels, soit que ces numéros soient seuls, soit qu'ils fassent partie d'un plus grand nombre de numéros.

Première solution. Nous nous éleverons ici à la formule générale par la considération des cas particuliers.

1°. Dans le cas de $n=1$, le nombre des tirages qui donnent des ambes successifs, est

$$o=\frac{m}{1}-\frac{m}{1}.$$

2°. Dans le cas de $n=2$, le nombre des tirages qui donnent des ambes successifs, est évidemment $m-1$, puisqu'on ne peut combiner chacun des m numéros $1, 2, 3 \ldots m$, qu'avec son consécutif, et on a

$$\frac{m-1}{1}=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}-\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}.$$

3°. Soit $n=3$: si les numéros 1 et 2 font tous deux partie d'un même tirage, on pourra leur adjoindre l'un quelconque des $m-2$ numéros restans : si au contraire 1 doit faire partie d'un tirage, sans que 2 doive s'y trouver, il faudra lui adjoindre toutes les combinaisons 2 à 2 des $m-2$ numéros restans qui peuvent fournir des ambes consécutifs, et dont le nombre est, par ce qui précède, $m-3$. Ainsi le nombre des tirages ayant 1 pour plus petit numéro, et représentant des ambes successifs, sera $(m-2)+(m-3)$: pareillement le nombre de ceux qui auront 2 pour plus petit numéro, sera $(m-3)+(m-4)$: le nombre de ceux qui auront 3 pour plus petit numéro, sera $(m-4)+(m-5)$, et ainsi de suite jusqu'à l'anté-pénultième numéro. Il sera bon d'observer que, dans la combinaison 1, 2, 3 qu'on obtient en prenant, par exemple, 1 et 2 avec chacun des $m-2$ numéros restans, il y a les deux ambes successifs 1 et 2, 2 et 3 ; mais qu'on ne doit compter que le premier ambe, parce que le second est ensuite amené par les tirages de trois numéros ayant 2 pour plus petit numéro : nous ne

reviendrons plus sur cette observation. Ainsi le nombre total des tirages de trois numéros qui présentent des ambes successifs, sera

$$\begin{aligned}&[(m-2)+(m-3)]+[(m-3)+(m-4)]\\&+[(m-4)+(m-5)]+\ldots\ldots+(1+0)\\&=[(m-2)+(m-3)+(m-4)+\ldots\ldots+1]\\&+[(m-3)+(m-4)+(m-5)+\ldots\ldots+1]\\&=\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}+\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-3}{2}\\&=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}-\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-3}{3}\cdot\frac{m-4}{3},\end{aligned}$$

en observant que chacune de ces deux suites est une suite de termes par équi-différences dont le terme sommatoire est connu (Alg. 1re section).

4°. Soit $n=4$: si les nombres 1 et 2 doivent à la fois faire partie d'un même tirage, on pourra leur adjoindre chacune des $\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-3}{2}$ combinaisons 2 à 2 fournies par les $m-2$ numéros restans. Si au contraire 1 doit faire partie d'un tirage, sans que 2 doive s'y trouver, il faudra adjoindre à ce numéro, toutes celles des combinaisons 3 à 3 des $m-2$ numéros restans, qui présenteront des ambes successifs, et dont le nombre est, par ce qui précède,

$$\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}:$$

ainsi le nombre des tirages de quatre numéros qui, présentant des ambes successifs, auront 1 pour leur plus petit numéro, sera

$$\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-3}{2}+\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}.$$

Le nombre des tirages de cette sorte qui auront 2 pour leur plus

petit numéro, devra donc être

$$\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{6}.$$

Pareillement le nombre de ceux qui auront 3 pour leur plus petit numéro, sera

$$\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-7}{2},$$

et ainsi de suite.

Il résulte de là que le nombre total des tirages de quatre numéros, qui donneront des ambes successifs, sera

$$\begin{array}{l}
\left[\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-3}{2}+\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\right]\\
+\left[\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\right]\\
+\left[\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\right]\\
+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
+[\;6\qquad\quad+\;3\qquad\quad+\;1\qquad\quad]\\
+[\;3\qquad\quad+\;1\qquad\quad+\;0\qquad\quad]\\
+[\;1\qquad\quad+\;0\qquad\quad+\;0\qquad\quad],
\end{array}$$

les trois dernières lignes étant dues aux hypothèses successives $m=6$, $m=5$, $m=4$ dans l'expression

$$\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-3}{2}+\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}$$

obtenue plus haut : si l'on range horizontalement les lignes verticales de la formule précédente, on aura (ch. XXIII, n° 134)

$$\left[\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-3}{2}+\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\ldots\ldots+6+3+1\right]$$
$$+\left[\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\ldots\ldots+6+3+1\right]$$
$$+\left[\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-6}{2}+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-7}{1}\ldots\ldots+6+3+1\right]$$
$$=\frac{m-1}{1}\cdot\frac{m-2}{2}\cdot\frac{m-3}{3}+\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-3}{2}\cdot\frac{m-4}{3}$$
$$+\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}\cdot\frac{m-5}{3}$$
$$=\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdot\frac{m-3}{4}-\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}\cdot\frac{m-5}{3}\cdot\frac{m-6}{4};$$

en observant que lorsqu'on a trouvé le terme sommatoire de la première suite de nombres figurés,

$$1+3+6+\ldots+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-3}{2},$$

il suffit d'y changer m en $m-1$, en $m-2$ pour avoir ceux des nombres figurés qui forment les deux dernières lignes.

La loi des formules que nous venons d'obtenir, est facile à saisir ; et à raison de la marche uniforme du procédé, on en peut conclure celle qui donne le nombre des tirages de n numéros qui présentent des ambes successifs.

Seconde solution. Ainsi que nous l'avons dit ci-dessus, on peut chercher à calculer directement le nombre des chances favorables, c'est-à-dire, le nombre des tirages différens qui ne présentent pas de numéros consécutifs, n désignant le nombre des numéros qui sortent à chaque tirage, et en divisant le nombre des cas favorables par celui de tous les cas ou de toutes les chances possibles, qui est le nombre total des tirages possibles de n numéros parmi m, on aura la probabilité demandée par l'énoncé de la question.

Nous supposerons qu'on a fait des chances cherchées, divers groupes, en plaçant dans le premier groupe toutes celles dont le plus petit numéro est 1, dans le second toutes celles dont le plus petit numéro est 2; dans le troisième, toutes celles dont le plus petit numéro est 3; et ainsi de suite.

1°. Il est évident que s'il ne doit sortir qu'un seul numéro à chaque tirage, le nombre des chances favorables sera le nombre total des tirages, c'est-à-dire, m ou $\frac{m}{1}$.

2°. S'il doit sortir deux numéros à chaque tirage, celles des chances favorables dont le plus petit numéro sera 1, ne pourront être complétées que par quelqu'un des $m-2$ numéros $3, 4, 5 \ldots m$: le nombre de ces chances sera donc $m-2$. Celles des chances favorables dont le plus petit numéro sera 2, ne pourront être complétées que par quelqu'un des $m-3$ numéros $4, 5, 6 \ldots m$: le nombre de ces chances sera donc $m-3$. Celles des chances favorables dont le plus petit numéro sera 3, ne pourront être complétées que par quelqu'un des $m-4$ numéros $5, 6, 7 \ldots m$: le nombre de ces chances sera donc $m-4$; et ainsi de suite jusqu'à la chance favorable dont le plus petit numéro sera $m-2$, laquelle sera unique, puisqu'elle ne peut être complétée que par le seul numéro m.

Ainsi, dans le cas de $n=2$, le nombre total des chances favorables sera

$$(m-2)+(m-3)+(m-4)+\ldots\ldots+2+1=\frac{m-2}{1}\cdot\frac{m-1}{2},$$

c'est-à-dire, le $(m-2)^{me}$ nombre triangulaire (ch. XXIII, n° 132).

3°. S'il doit sortir trois numéros à chaque tirage, celles des chances favorables dont le plus petit numéro sera 1, ne pourront être complétées que par celles des combinaisons 2 à 2 des $m-2$ numéros $3, 4, 5 \ldots\ldots m$ qui ne présenteront pas de nombres consécutifs, et dont le nombre est, par ce qui précède,

$$\frac{(m-2)-2}{1}\cdot\frac{(m-1)-2}{2}=\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-3}{2},$$

Celles des chances favorables dont le plus petit numéro sera 2, ne pourront être complétées que par celles des combinaisons 2 à 2 des $m-3$ numéros $4, 5, 6 \ldots\ldots m$ qui ne présentent point de nombres consécutifs, et dont le nombre est, par ce qui précède,

$$\frac{(m-4)-1}{1}\cdot\frac{(m-3)-1}{2}=\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-4}{2}.$$

Celles des chances favorables dont le plus petit numéro sera 3, ne pourront être complétées que par celles des combinaisons 2 à 2 des $m-4$ numéros $5, 6, 7 \ldots\ldots m$ qui ne présentent point de nombres consécutifs, et dont le nombre est, par ce qui précède,

$$\frac{(m-5)-1}{1}\cdot\frac{(m-4)-1}{2}=\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2};$$

et ainsi de suite, jusqu'à la chance favorable dont le plus petit numéro sera $m-4$, laquelle sera unique, attendu qu'elle ne pourra être complétée que par les deux seuls numéros $m-2$ et m.

Ainsi, dans le cas de $n=3$, le nombre total des chances favorables, est

$$\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-3}{2}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\ldots\ldots+3+1$$
$$=\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-3}{2}\cdot\frac{m-2}{3},$$

c'est-à-dire, le $(m-4)^{me}$ nombre pyramidal.

4°. S'il doit sortir quatre numéros à chaque tirage, celles des chances favorables dont le plus petit numéro sera 1, ne pourront être complétées que par celles des combinaisons 3 à 3 des $m-2$ numéros $3, 4, 5 \ldots\ldots m$, qui ne présentent point de nombres consécutifs, et dont le nombre est, par ce qui précède,

$$\frac{(m-4)-2}{1}\cdot\frac{(m-3)-2}{2}\cdot\frac{(m-2)-2}{3}=\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}.$$

Celles des chances favorables dont le plus petit numéro sera 2, ne pourront être complétées que par celles des combinaisons 3 à 3 des $m-3$ numéros $4, 5, 6 \ldots\ldots m$ qui ne présentent point de nombres consécutifs, et dont le nombre est, par ce qui précède,

$$\frac{(m-6)-1}{1}\cdot\frac{(m-5)-1}{2}\cdot\frac{(m-4)-1}{3}=\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}.$$

Celles des chances favorables dont le plus petit numéro sera 3, ne pourront être complétées que par celles des combinaisons 3 à 3 des $m-4$ numéros $5, 6, 7 \ldots\ldots m$ qui ne présentent point de nombres consécutifs, et dont le nombre est, par ce qui précède,

$$\frac{(m-7)-1}{1}\cdot\frac{(m-6)-1}{2}\cdot\frac{(m-5)-1}{3}=\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3};$$

et ainsi de suite, jusqu'à la chance favorable ayant $m-5$ pour son plus petit numéro, laquelle sera unique, attendu qu'elle ne pourra être complétée que par les trois seuls numéros $m-3$, $m-2$, m.

Ainsi, dans le cas de $n=4$, le nombre total des chances favorables, est

$$\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}$$
$$+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}+\ldots.+4+1$$
$$=\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}\cdot\frac{m-3}{4};$$

c'est-à-dire, le $(m-6)^{me}$ nombre figuré du quatrième ordre.

La marche parfaitement uniforme de ce procédé, conduit à conclure, sans qu'il soit nécessaire de pousser l'induction plus avant, qu'en général n désignant le nombre des numéros qui sortent à chaque tirage, le nombre des tirages qui ne présentent

point de numéros consécutifs, est le $(m-2n+2)^{me}$ nombre figuré du $n^{ième}$ ordre, c'est-à-dire,

$$\frac{m-2n+2}{1}\cdot\frac{m-2n+3}{2}\cdot\frac{m-2n+4}{3}\cdots\cdots\frac{m-n+1}{n},$$

ce qu'il serait d'ailleurs facile d'établir par un raisonnement rigoureux.

Si présentement on considère que le nombre total des tirages possibles de n numéros parmi m, est

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\cdots\cdots\frac{m-n+1}{n};$$

on en conclura que la probabilité cherchée est

$$\frac{m-2n+2}{m}\cdot\frac{m-2n+3}{m-1}\cdot\frac{m-2n+4}{m-2}\cdots\cdots\cdots\frac{m-n+1}{m-n+1}.$$

Problème XXII. *Une loterie étant composée de* m *numéros* 1, 2, 3....m, *dont il sort* n *à chaque tirage, quelle probabilité y a-t-il que parmi les* n *numéros d'un tirage, il ne se trouvera pas* k *nombres consécutifs de la suite naturelle?*

On a résolu dans le problème précédent, le cas où parmi les nombres extraits, il y en a deux qui suivent l'ordre des nombres naturels, ou qui forment un ambe successif.

On demande le nombre des cas dans lesquels, parmi les numéros extraits, il y en a trois qui suivent l'ordre des nombres naturels ou qui forment un terne successif. Nous introduirons à la solution de cette question par des cas particuliers.

Ier cas. Que le nombre des numéros extraits soit trois : celui des ternes successifs sera évidemment $m-2$.

IIe cas. Que le nombre des numéros extraits soit quatre : 1°. si l'on a pris le numéro 1 avec les deux numéros suivans, à ce terne successif peut se joindre, un à un, chacun des

$m-3$ numéros restans ; le nombre des cas est donc $m-3$: au numéro 2 pris avec les deux consécutifs, on pourra joindre, un à un, chacun des $m-4$ numéros restans : pareillement au numéro 3, pris avec les deux suivans, on pourra joindre, un à un, chacun des numéros restans en nombre $m-5$, ce qui donnera cette première suite de ternes successifs,

$$(m-3)+(m-4)+(m-5)+\ldots+1=\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-2}{2}.$$

Revenons au numéro 1 : s'il est tiré avec le numéro 2 sans le numéro 3, puisque le terne successif 1, 2, 3 vient d'être compté, on n'a plus que $m-2$ numéros qu'on prend deux à deux, ce qui ne peut donner lieu à des ternes successifs. Si le numéro 1 est tiré sans le numéro 2, les $m-2$ numéros restans donnent lieu, d'après ce qui précède, à $m-4$ ternes successifs. Si le numéro 2 est tiré sans le numéro 3, les $m-3$ numéros restans donnent lieu à $m-5$ ternes successifs, et ainsi de suite. On aura donc cette autre série de ternes successifs,

$$(m-4)+(m-5)+(m-6)+\ldots+1=\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-3}{2}.$$

Ensorte que le nombre cherché de ces ternes successifs, sera

$$\frac{m-3}{1}\cdot\frac{m-2}{2}+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-3}{2}=(m-3)^2.$$

Les détails donnés sur ce cas, ne laissent pas de difficultés sur les suivans.

IIIe cas. Que le nombre des numéros extraits soit *cinq* : 1°. si le numéro 1 est tiré avec les deux numéros suivans, à ce terne successif peuvent se joindre, deux à deux, les $m-3$ numéros restans : le nombre des cas est donc $\frac{m-4}{2}\cdot\frac{m-3}{1}$. 2°. Si le numéro 1 est tiré avec le numéro 2 sans le numéro 3, puisqu'on vient déjà de supposer ce terne successif amené, il

reste $m-3$ numéros dont on en tire trois : le nombre des ternes successifs auxquels ces $m-3$ numéros donnent lieu, est $m-5$.

3°. Que le numéro 1 soit extrait sans le numéro 2, il reste $m-2$ numéros dont on en tire quatre : le nombre des ternes successifs auxquels ces $m-2$ numéros donnent lieu, est

$$\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}.$$

De là le nombre total des ternes successifs auxquels donne lieu l'extraction de cinq numéros sur m, est la somme des $m-5$ premiers nombres naturels, et celle des $(m-6)^{ième}$, $(m-5)^{ième}$ et $(m-4)^{ième}$ premiers nombres triangulaires. Ce nombre de cas est donc (chap. XXIII, n° 134)

$$\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-4}{2}+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}\ (*)$$
$$+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-4}{2}\cdot\frac{m-3}{3}$$
$$+\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-3}{2}\cdot\frac{m-2}{3}.$$

IVe cas. Que le nombre des numéros extraits soit *six* : 1°. que le numéro 1 soit tiré avec les deux numéros qui le

(*) En remontant aux formules trouvées (chap. XXIII, n° 134) pour la sommation d'une série de termes de l'une de ces formes

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2};\ \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3};\ \frac{m}{1}\cdot\frac{m+1}{2}\cdot\frac{m+2}{3}\cdot\frac{m+3}{4},\ \text{etc.}$$

on reconnaît que le terme sommatoire se compose toujours du plus grand des termes de la suite, c'est-à-dire, du premier terme, multiplié par un facteur consécutif au plus grand de ceux de son numérateur, et divisé par un facteur consécutif au plus grand de ceux de son dénominateur. Ainsi le terme sommatoire de la série de termes, qui commence par $\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}$ est $\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}$.

suivent : à ce terne successif peuvent se joindre les $m-3$ numéros suivans, pris trois à trois : le nombre des cas est donc

$$\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-4}{2}\cdot\frac{m-3}{3}.$$

2°. Que le numéro 1 soit amené avec le numéro 2 sans le numéro 3 : il reste $m-3$ numéros dont on en tire quatre; le nombre des ternes successifs auxquels ils donnent lieu est, par ce qui précède,

$$\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}.$$

3°. Que le numéro 1 soit tiré sans le numéro 2 : il reste $m-2$ numéros dont on en tire cinq; le nombre des ternes successifs auxquels ces $m-2$ numéros donnent lieu, est, d'après la formule précédente dans laquelle on change m en $m-2$,

$$\begin{aligned}\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\\ +\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}\\ +\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3};\end{aligned}$$

De là le nombre des ternes successifs auxquels l'extraction de six numéros sur m donne lieu, est

$$\begin{aligned}\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-4}{2}\cdot\frac{m-3}{3}\cdot\frac{m-2}{4}\\ +2.\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\\ +\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}\cdot\frac{m-4}{4}\\ +\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-5}{4}.\end{aligned}$$

V^e *cas*. Que le nombre des numéros extraits soit *sept* : 1°. que le numéro 1 soit tiré avec les deux numéros qui le

suivent : à ce terne successif peuvent se joindre les $m-3$ numéros suivans pris quatre à quatre : le nombre des cas est donc

$$\frac{m-3}{1}.\frac{m-4}{2}.\frac{m-5}{3}.\frac{m-6}{4}.$$

2°. Que le numéro 1 soit amené avec le numéro 2, sans le numéro 3 : il reste $m-3$ numéros dont on en tire cinq ; le nombre des ternes successifs auxquels donnent lieu ces $m-3$ numéros, est, en changeant m en $m-3$ dans la formule qui donne le nombre des ternes successifs qu'on peut faire avec cinq numéros,

$$\frac{m-8}{1}.\frac{m-7}{2}+\frac{m-9}{1}.\frac{m-8}{2}.\frac{m-7}{3}$$
$$+\frac{m-8}{1}.\frac{m-7}{2}.\frac{m-6}{3}$$
$$+\frac{m-7}{1}.\frac{m-6}{2}.\frac{m-5}{3};$$

3°. Que le numéro 1 soit tiré sans le numéro 2 : il reste $m-2$ numéros dont on en tire six ; le nombre des ternes successifs auxquels ces $m-2$ numéros donnent lieu, s'obtient en changeant m en $m-2$ dans la formule qui compte les ternes successifs auxquels donne lieu l'extraction de six numéros sur m, et on trouve

$$\frac{m-8}{1}.\frac{m-7}{2}.\frac{m-6}{3}+\frac{m-7}{1}.\frac{m-6}{2}.\frac{m-5}{3}.\frac{m-4}{4}$$
$$+2.\frac{m-9}{1}.\frac{m-8}{2}.\frac{m-7}{3}+\frac{m-8}{1}.\frac{m-7}{2}.\frac{m-6}{3}.\frac{m-5}{4}$$
$$+\frac{m-9}{1}.\frac{m-8}{2}.\frac{m-7}{3}.\frac{m-6}{4}$$
$$+\frac{m-10}{1}.\frac{m-9}{2}.\frac{m-8}{3}.\frac{m-7}{4}.$$

De là le nombre total des ternes successifs auxquels donne lieu l'extraction de sept numéros sur m, est

$$\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}\cdot\frac{m-4}{4}$$
$$+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}\cdot\frac{m-3}{4}\cdot\frac{m-2}{5}$$
$$+2.\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-5}{4}$$
$$+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}\cdot\frac{m-4}{4}\cdot\frac{m-3}{5}$$
$$+3.\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}\cdot\frac{m-6}{4}$$
$$+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-5}{4}\cdot\frac{m-4}{5}$$
$$+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}\cdot\frac{m-6}{4}\cdot\frac{m-5}{5}$$
$$+\frac{m-10}{1}\cdot\frac{m-9}{2}\cdot\frac{m-8}{3}\cdot\frac{m-7}{4}\cdot\frac{m-6}{5}.$$

Ces exemples paraissent suffire pour indiquer la marche à suivre dans cette recherche, et pour montrer que le cas proposé sur un certain nombre de numéros extraits, est toujours ramené aux deux cas dans lesquels le nombre des numéros extraits est inférieur d'une et de deux unités.

Recherchons le nombre des quaternes successifs auxquels donne lieu l'extraction de n numéros sur m numéros, et procédons encore par des cas particuliers.

Ier cas. Que le nombre des numéros extraits soit *quatre* : on forme les quaternes successifs, en prenant le premier numéro avec les trois suivans, le second avec les trois suivans, et ainsi de suite; et comme le dernier de ces quaternes est formé des $m-4$ derniers numéros, il est clair que le nombre total de ces quaternes successifs, est $m-3$.

IIe cas. Que le nombre des numéros extraits soit *cinq* : 1°. Que le numéro 1 soit tiré avec les trois numéros suivans :

à ce quaterne successif peuvent se joindre les $m-4$ numéros restans, pris un à un; le nombre des cas est donc $m-4$. Que le numéro 2 soit tiré avec les trois suivans : à ce quaterne successif peuvent se joindre les $m-5$ numéros restans, pris un à un, ce qui donne $m-5$ cas. Que le numéro 3 soit tiré avec les trois suivans, quaterne auquel on peut joindre les $m-6$ numéros restans, un à un, et on aura $m-6$ cas, e ainsi de suite, en finissant par 4, 3, 2, 1. 2°. Les numéros 1 et 2 étant amenés chacun sans aucun des deux suivans, les numéros consécutifs à ces derniers, sur lesquels on en tire trois, ne donnent pas lieu à des quaternes successifs. 3°. Le numéro 1 étant tiré sans le numéro 2, il reste $m-2$ numéros dont on en tire quatre; le nombre des quaternes successifs auxquels ces numéros donnent lieu, est $m-5$: le numéro 2 étant tiré sans le numéro 3, il en reste $m-3$ dont on tire quatre, ce qui donne lieu à $m-6$ quaternes successifs : le nombre 3 étant pris sans le nombre 4, on peut former $m-7$ quaternes successifs, et ainsi de suite jusqu'à 4, 3, 2, 1 quaternes successifs.

De là le nombre des quaternes successifs auxquels donne lieu l'extraction de cinq numéros sur m, est

$$\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-3}{2}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-4}{2}=(m-4)^2.$$

IIIe cas. Que le nombre des numéros extraits soit *six :* 1°. si le numéro 1 est tiré avec les trois numéros suivans, à ce quaterne successif peuvent se joindre les $m-4$ numéros suivans, pris deux à deux : le nombre des cas est donc

$$\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}.$$

2°. Si le numéro 1 est amené avec les numéros 2 et 3 sans le numero 4, les $m-4$ numéros suivans parmi lesquels on en tire trois, ne donnent pas lieu à des quaternes successifs. 3°. Qu'on amène les numéros 1 et 2 sans le numéro 3 : il reste $m-3$ numéros sur lesquels on doit en tirer quatre, et

qui donnent lieu à $m-6$ quaternes successifs. 4°. Que le numéro 1 soit amené sans le numéro 2 : il reste $m-2$ numéros qui doivent être tirés cinq à cinq, et qui donnent lieu à un nombre de quaternes successifs, exprimé par

$$\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}=(m-6)^2;$$

Partant, le nombre total des quaternes successifs auxquels donne lieu l'extraction des six numéros sur m, est

$$\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}+\frac{m-5}{1}\cdot\frac{m-4}{2}\cdot\frac{m-3}{3}$$
$$+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}$$
$$+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}.$$

IVe cas. Que le nombre des numéros extraits soit *sept* : 1°. que le numéro 1 soit tiré avec les trois suivans : à ce quaterne successif peuvent se joindre les $m-4$ numéros suivans, pris trois à trois ; le nombre des cas est donc

$$\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-6}{3}.$$

2°. Que le numéro 1 soit amené avec les deux numéros suivans sans le numéro 4 : il reste $m-4$ numéros dont on tire quatre, et qui donnent lieu à $m-7$ quaternes successifs. 3°. Que le numéro 1 soit tiré avec le numéro 2 sans le numéro 3 : il reste $m-3$ numéros dont on tire cinq, et qui donnent lieu à

$$\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}$$

quaternes successifs. 4°. Que le numéro 1 soit tiré sans le numéro 2 : il reste $m-2$ numéros qui, pris six à six, donnent lieu à un nombre de quaternes successifs, ex-

primé par

$$\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}$$

$$+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}$$

$$+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}.$$

Ainsi le nombre des quaternes successifs auxquels donne lieu l'extraction de sept numéros sur m, est

$$\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}$$

$$+\frac{m-6}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-4}{3}\cdot\frac{m-3}{4}$$

$$+2.\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}$$

$$+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}\cdot\frac{m-4}{4}$$

$$+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-5}{4}$$

$$+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}\cdot\frac{m-6}{4}.$$

V^e cas. Que le nombre des numéros extraits soit *huit* : 1°. le numéro 1 étant amené avec les trois numéros suivans, à ce quaterne successif peuvent se joindre les $m-4$ numéros suivans, pris quatre à quatre, ensorte que le nombre des cas est

$$\frac{m-4}{1}\cdot\frac{m-5}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-7}{4}.$$

2°. Le numéro 1 étant tiré avec les deux numéros suivans, sans le numéro 4, il reste $m-4$ numéros dont on tire cinq,

et qui donne lieu à

$$\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2},$$

quaternes successifs. 3°. Le numéro 1 étant amené avec le numéro 2 sans le numéro 3, il reste $m-3$ numéros qu'on peut prendre six à six, et qui donnent lieu à un nombre de quaternes successifs, exprimé par

$$\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}$$
$$+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}$$
$$+\frac{m-10}{1}\cdot\frac{m-9}{2}\cdot\frac{m-8}{3}.$$

4°. Le numéro 1 étant tiré sans le numéro 2, il reste $m-2$ numéros qui, pris sept à sept, donnent lieu à

$$\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}$$
$$+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-5}{4}$$
$$+2.\frac{m-10}{1}\cdot\frac{m-9}{2}\cdot\frac{m-8}{3}$$
$$+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}\cdot\frac{m-6}{4}$$
$$+\frac{m-10}{1}\cdot\frac{m-9}{2}\cdot\frac{m-8}{3}\cdot\frac{m-7}{4}$$
$$+\frac{m-11}{1}\cdot\frac{m-10}{2}\cdot\frac{m-9}{3}\cdot\frac{m-8}{4},$$

quaternes successifs.

Le nombre total des quaternes successifs auxquels donne lieu l'extraction de huit numéros sur m, est donc

$$\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-5}{4}$$

$$+\frac{m-7}{1}\cdot\frac{m-6}{2}\cdot\frac{m-5}{3}\cdot\frac{m-4}{4}\cdot\frac{m-3}{5}$$

$$+2.\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}$$

$$+2.\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}\cdot\frac{m-6}{4}$$

$$+\frac{m-8}{1}\cdot\frac{m-7}{2}\cdot\frac{m-6}{3}\cdot\frac{m-5}{4}\cdot\frac{m-4}{5}$$

$$+3.\frac{m-10}{1}\cdot\frac{m-9}{2}\cdot\frac{m-8}{3}\cdot\frac{m-7}{4}$$

$$+\frac{m-9}{1}\cdot\frac{m-8}{2}\cdot\frac{m-7}{3}\cdot\frac{m-6}{4}\cdot\frac{m-5}{5}$$

$$+\frac{m-10}{1}\cdot\frac{m-9}{2}\cdot\frac{m-8}{3}\cdot\frac{m-7}{4}\cdot\frac{m-6}{5}$$

$$+\frac{m-11}{1}\cdot\frac{m-10}{2}\cdot\frac{m-9}{3}\cdot\frac{m-8}{4}\cdot\frac{m-7}{5}.$$

Ces exemples suffisent pour indiquer la marche à suivre dans cette recherche qu'on pourrait étendre aux quines successifs qu'on peut faire avec m numéros.

Il est essentiel d'observer que le cas proposé sur un certain nombre de numéros, est toujours ramené à un certain nombre de cas semblables dans lesquels les nombres de numéros extraits sont moindres. Ainsi, par exemple, la recherche des quaternes successifs, quel que soit le nombre des numéros extraits, dépend de la même recherche sur $m-4$, sur $m-3$ et sur $m-2$ numéros.

Problème XXIII. *Étant donnés* m *numéros* 1, 2, 3...m, *formant une loterie dont on extrait* n *numéros à chaque tirage, déterminer,*

1°. *Quelle est la probabilité que les* n *numéros d'un tirage*,

formeront p *séries de nombres consécutifs de la suite naturelle ?*

2°. *Quelle est la probabilité que parmi ces séries, il s'en trouvera* α *composées d'un nombre déterminé de numéros,* β *composées d'un autre nombre déterminé de numéros,* γ *d'un troisième nombre déterminé de numéros, et ainsi de suite ?*

3°. *Quelle est enfin la probabilité que ces diverses séries considérées seulement par rapport au nombre des termes qui les composent, auront un ordre déterminé parmi les nombres de la suite naturelle ?*

Ces questions se résolvent en divisant par le nombre total des tirages, celui des tirages qui satisfont à leurs conditions, lequel nombre est exprimé par l'une des formules que nous allons chercher.

Ainsi nous allons procéder à la recherche des élémens qui servent à la solution de ces questions.

Des lettres $a, b, c, d \ldots\ldots$ au nombre de m, étant données, on sait que le nombre des produits différens n à n qu'elles peuvent fournir, est exprimé par

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\cdots\frac{m-n+1}{n}.$$

Concevons qu'on ait formé tous ces différens prodnits, et que, dans chacun d'eux, on ait disposé les facteurs suivant l'ordre alphabétique, de la première lettre à la dernière : comme dans chacun de ces produits, il manquera $m-n$ des lettres a, b, c, $d, \ldots$, les lettres qui les composeront, ne se succéderont pas toutes consécutivement, ensorte qu'un de ces produits, pris au hasard, pourra présenter d'abord un certain nombre de lettres consécutives, puis un autre nombre de lettres aussi consécutives entr'elles, mais non consécutives aux premières; puis encore un autre nombre de lettres consécutives entr'elles, mais

non consécutives à celles qui composent la seconde série, et ainsi de suite. Soit, par exemple, le produit *abdefhikl*: en l'écrivant ainsi,

ab.def.hikl,

on voit qu'il est composé de trois facteurs, lesquels sont eux-mêmes des produits dont les facteurs sont consécutifs.

Dans ce qui suit, nous considérerons comme produits *d'une même classe*, tous ceux qui, décomposés comme nous venons de le faire, présenteront le même nombre de séries de facteurs consécutifs; et un produit sera dit *de première classe*, si tous ses facteurs sont consécutifs; *de seconde classe*, s'il est formé de deux séries de facteurs consécutifs dans chaque série, mais non consécutifs de la première à la seconde série. Un produit sera dit *de troisième classe*, s'il présente trois séries de facteurs consécutifs, dans chacune d'elles, mais non consécutifs d'une série à l'autre, et ainsi de suite.

Nous diviserons ensuite les produits d'une même classe en *genres*, en appelant *produits d'un même genre*, ceux qui non-seulement renfermeront un même nombre de séries de facteurs consécutifs, mais qui de plus seront tels que chaque série dans l'un, aura autant de facteurs qu'une série de l'autre. D'après cette définition, les deux produits de même classe

ab.def.hikl, *abc.ef.hikl*

sont de même genre, parce que, dans chacun d'eux, il y a une série de deux facteurs, une série de trois, et une de quatre.

Enfin deux produits d'un même genre seront dits *de même espèce*, si les diverses séries de facteurs consécutifs qui les composent, considérées uniquement par rapport au nombre de leurs facteurs, y sont rangées dans le même ordre : tels sont, par exemple, les deux produits

ab.defg.ikl, *bc.efgh.klm*.

A l'avenir, pour plus de clarté et de simplicité, nous in-

diquerons les produits dans lesquels il se trouvera des séries de α, β, γ..... facteurs consécutifs, en écrivant les lettres α, β, γ..... séparées par des virgules, entre des crochets, et les plaçant suivant le rang des séries de la première à la dernière. Ainsi, par exemple, le symbole $[\gamma, \alpha, \theta, \lambda]$ désignera un produit de quatrième classe, dans lequel la première série aura γ facteurs, la seconde α, la troisième θ et la quatrième λ. On voit d'après cela que les produits

$$[\gamma, \alpha, \theta, \lambda], \qquad [\beta, \lambda, \delta, \varphi],$$

seront de même classe sans être de même genre : que les produits

$$[\gamma, \alpha, \theta, \lambda], \qquad [\lambda, \gamma, \alpha, \theta]$$

sont à la fois de même classe et de même genre; qu'enfin tous les produits désignés par l'expression symbolique

$$[\gamma, \alpha, \theta, \lambda],$$

sont à la fois de même classe, de même genre et de même espèce.

Ces préliminaires établis, l'objet que nous nous proposons ici, est de déterminer parmi tous les produits de n facteurs qu'on peut faire avec m lettres, 1°. le nombre de ces produits d'une classe déterminée quelconque; 2°. dans une même classe, le nombre de ces produits d'un genre déterminé quelconque; 3°. dans un même genre, le nombre de ces produits d'une espèce déterminée quelconque.

Occupons-nous d'abord de la recherche du nombre des produits d'une même classe. Désignons, en général, par Cp le nombre des produits de la classe p, c'est-à-dire, le nombre des produits dans lesquels il entre p séries de facteurs consécutifs.

D'abord pour les produits de première classe, ou de n lettres consécutives, on voit que chacune des lettres $a, b, c, \ldots$, à l'exception des $n-1$ dernières, peut être combinée avec les $n-1$ lettres qui la suivent immédiatement; ensorte qu'on

doit avoir

$$C_1 = \frac{m-(n-1)}{1} = \frac{m-n+1}{1}.$$

Pour parvenir à l'expression de C_2 qui rappelle le nombre des produits de la seconde classe, produits que nous désignerons par $(\alpha, n-\alpha)$, cherchons d'abord ceux d'entr'eux qui renferment la lettre a : pour les former, il faudra joindre à la lettre a les $\alpha-1$ lettres qui la suivent consécutivement ; et comme la lettre qui suivra immédiatement la dernière de ce produit, ne pourra être employée, on ne pourra lui adjoindre que les produits de première classe, qu'il sera possible de former avec les $m-\alpha-1$ lettres restantes prises $n-\alpha$ à $n-\alpha$: le nombre de ces derniers produits, qui sera le même que le nombre total des produits de deuxième classe, qui doivent renfermer la lettre a, se trouvera donc en changeant m en $m-\alpha-1$ et n en $n-\alpha$ dans la précédente formule, ce qui donnera $m-n$ pour le nombre des produits de la forme $[\alpha, n-\alpha]$ dans lesquels entre la lettre a : faisant successivement $\alpha=1, =2, =3$, etc. $=n-1$, le nombre total des produits de seconde classe dont a fait partie, sera exprimé par

$$(n-1)(m-n):$$

il est clair qu'on ne peut supposer $\alpha=n$, puisqu'à cette hypothèse répondraient des produits de première classe.

Ayant ainsi fait de la lettre a tout l'emploi que comporte la nature de la question, on déterminera le nombre des produits de seconde classe où a n'entre pas, mais où entre b, en cherchant combien on peut faire de produits de cette classe avec $m-1$ lettres, nombre qui sera

$$(n-1)(m-n-1):$$

on trouvera pareillement que le nombre de ceux dans lesquels il n'entre ni a ni b, mais qui contiennent e, est exprimé par

$$(n-1)(m-n-2),$$

et ainsi de suite. Ensorte qu'on aura pour le nombre total des produits de la seconde classe,

$$C_2=(n-1)[(m-n)+(m-n-1)+(m-n-2).....+3+2+1],$$

c'est-à-dire, en observant que la suite entre crochets, est une progression par différences égales,

$$C_2=\frac{(n-1)}{1}\cdot\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n}{2}.$$

Passons aux produits de troisième classe. Désignons toujours par α le nombre des facteurs qui composent la première série, et cherchons d'abord ceux de ces produits qui renferment la lettre a : il faudra, comme ci-dessus, écrire d'abord à la droite de cette lettre, les $\alpha-1$ lettres qui la suivent consécutivement, supprimer la $(\alpha+1)^{ième}$ lettre, et faire tous les produits de seconde classe que peuvent fournir les $m-\alpha-1$ lettres restantes, prises $n-\alpha$ à $n-\alpha$; changeant donc m en $m-\alpha-1$ et n en $n-\alpha$ dans l'expression de C_2, il viendra pour le nombre des produits de troisième classe, où entre a, et où la première série contiendrait α facteurs,

$$\frac{m-n}{1}\cdot\frac{m-n-1}{2}\cdot(n-\alpha-1):$$

faisant les hypothèses successives $\alpha=1,\ =2,\ =3....=n-2$, et observant que dans ces produits de troisième classe, le nombre des lettres facteurs dans l'une des séries, ne peut excéder $n-2$, on aura pour la totalité de ceux des produits de la troisième classe dont a fait partie,

$$\frac{m-n}{1}\cdot\frac{m-n-1}{2}[(n-2)+(n-3)+(n-4)+\ldots+3+2+1]$$
$$=\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{m-n}{1}\cdot\frac{m-n-1}{2}.$$

De cette formule on conclura le nombre des produits qui ne renfermant pas a, contiennent b; le nombre de ceux

qui ne renfermant ni a ni b, contiennent c; et ainsi de suite, en y changeant successivement, comme ci-dessus, m en $m-1$, en $m-2$, en $m-3\ldots$; et remarquant que le dernier de ces nombres, doit être $n+2$, parce qu'il faut, au moins, ce nombre de lettres, sous la condition d'en passer deux dans chaque produit de troisième classe : on trouvera ainsi

$$C_3=\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{1}{2}\left[(m-n)(m-n-1)+(m-n-1)(m-n-2)+\ldots\right.$$
$$\left.\ldots+4.3+3.2+2.1\right],$$

ou, en sommant la série comme on l'a vu plus haut,

$$C_3=\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n}{2}\cdot\frac{m-n-1}{3}.$$

On aperçoit facilement la loi de ces résultats, et l'induction conduit à poser généralement,

$$C_p=\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\ldots\ldots\frac{n-p+1}{p-1}\cdot\frac{m-n+1}{1}$$
$$\cdot\frac{m-n}{2}\ldots\ldots\frac{m-n-p+2}{p},$$

induction qui se vérifie d'ailleurs par un raisonnement très-usité en pareil cas.

Il est clair que le nombre total des produits différens n à n que peuvent fournir les m lettres a, b, c..., est égal à la somme des nombres qui expriment combien il y en a dans chaque classe ; ensorte qu'on a

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\ldots\ldots\frac{m-n+1}{n}$$
$$=C_1+C_2+C_3+\ldots\ldots+C_p+\ldots\ldots+C_n;$$

mettant dans cette équation pour C_1, $C_2\ldots\ldots C_p\ldots\ldots C_n$, leurs valeurs, on parviendra à ce résultat qui, indépendamment de la théorie des combinaisons, présente un fait analytique assez

remarquable :

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{m-1}{2}\cdot\frac{m-2}{3}\cdots\cdots\frac{m-n+1}{n}$$

$$=\frac{m-n+1}{1}$$

$$+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n}{2}$$

$$+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdot\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n}{2}\cdot\frac{m-n-1}{3}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{n-1}{1}\cdot\frac{n-2}{2}\cdots\frac{n-p+1}{p-1}\cdot\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n}{2}\cdot\frac{m-n-1}{3}\cdots\frac{m-n-p+2}{p}$$

$$+\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n}{2}\cdot\frac{m-n-1}{3}\cdots\cdots\frac{m-2n+2}{n},$$

en observant que C_n résulte de C_p en changeant p en n dans l'expression de C_p, et faisant les réductions.

Examinons combien il peut y avoir, dans chaque classe, de produits de chaque genre et de chaque espèce.

Convenons de désigner généralement par G_p le nombre des produits d'un genre donné qui se trouvent dans la classe p, et par E_p le nombre de ceux d'une espèce donnée qui se trouvent dans un genre donné appartenant à la même classe p.

Il est d'abord évident que tous les produits de la première classe, sont à la fois de même genre et de même espèce, ensorte qu'on a

$$G_1=\frac{m-n+1}{1},\quad E_1=\frac{m-n+1}{1}.$$

Passons aux produits de la seconde classe, et considérons en particulier ceux de l'espèce $[\alpha, n-\alpha]$: nous rechercherons d'abord combien il y a de ces produits qui renferment la lettre a. Cette lettre a, suivie des $\alpha-1$ qui lui succèdent

dans l'ordre alphabétique, devant être combinée avec les produits de $n-\alpha$ lettres consécutives, ou avec les produits de première classe que fournissent les $m-\alpha-1$ dernières lettres, prises $n-\alpha$ à $n-\alpha$, en observant que de α à $n-\alpha$, il y a une lettre passée, il faudra, pour avoir le nombre des produits de cette espèce, changer dans C_1, G_1 ou E_1, le nombre m en $m-\alpha-1$ et n en $n-\alpha$, ce qui donnera $m-n$ pour le nombre des produits de l'espèce $[\alpha,\ n-\alpha]$ qui renferment la lettre a, comme on l'a trouvé précédemment. Faisant successivement $m=m-1,\ =m-2\ldots=n+1$, pour avoir ceux de ces produits qui ne renfermant pas a, contiennent b, qui ne renfermant ni a ni b, contiennent c, etc., et sommant la série, on trouvera

$$E_2=\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n}{2}.$$

Pour passer de l'espèce E_2 au genre G_2, on remarquera qu'en général le nombre des produits de ce genre, est égal au nombre des arrangemens différens dont α et $n-\alpha$ sont susceptibles, nombre $=1.2$; on aura donc

$$G_2=1.2.E_2=1.2.\frac{m-n+1}{1}\cdot\frac{m-n}{2}.$$

Considérons ensuite les produits de troisième classe, et recherchons combien il s'en trouve, dans cette classe, de l'espèce $[\alpha,\ \beta,\ n-\alpha-\beta]$, parce que de là il sera facile de passer aux produits de troisième genre. Ne considérons d'abord que ceux des produits de troisième classe qui renferment la lettre a : cette lettre doit y être suivie des $\alpha-1$ lettres qui lui sont consécutives dans l'ordre alphabétique, et cette première série doit être combinée avec tous les produits de seconde classe, et de l'espèce $[\beta,\ n-\alpha-\beta]$ que peuvent fournir les $m-\alpha-1$ dernières lettres, prises $n-\alpha$ à $n-\alpha$: changeant donc dans E_2 les nombres m et n en $m-\alpha-1$ et $n-\alpha$, on aura pour le nombre des produits de cette espèce

qui renferment la lettre a,

$$\frac{m-n}{1} \cdot \frac{m-n-1}{2};$$

changeant successivement m en $m-1$, $m-2 \ldots\ldots n+2$ dans cette formule, et sommant la série résultante, il viendra

$$E_3 = \frac{m-n+1}{1} \cdot \frac{m-n}{2} \cdot \frac{m-n-1}{3}.$$

Quant à G_3, il est clair qu'il sera égal à E_3 multiplié par le nombre des arrangemens dont α, β, $n-\alpha-\beta$ sont susceptibles; et comme lorsque ces trois quantités sont différentes, le nombre des arrangemens est $1.2.3$, on aura

$$G_3 = 1.2.3.\frac{m-n+1}{1} \cdot \frac{m-n}{2} \cdot \frac{m-n-1}{3}.$$

On pourrait facilement poursuivre de cette manière; mais il est déjà facile d'apercevoir, et il est aisé de se convaincre par un raisonnement rigoureux, qu'on doit avoir, en général,

$$E_p = \frac{m-n+1}{1} \cdot \frac{m-n}{2} \cdot \frac{m-n-1}{3} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{m-n-p+2}{p},$$

$$G_p = 1.2.3\ldots p.\frac{m-n+1}{1} \cdot \frac{m-n}{2} \cdot \frac{m-n-1}{3} \ldots \frac{m-n-p+2}{p};$$

mais il est essentiel de remarquer que cette dernière formule n'est exacte, qu'autant que les nombres α, β, γ, etc. sont tous inégaux. Dans le cas où quelques-uns d'entr'eux sont égaux, il arrive, en effet, que le nombre des arrangemens dont ils sont susceptibles, se trouve diminué. Supposons donc que l'on ait α' nombres égaux à α, β' nombres égaux à β, γ' nombres égaux à γ, et ainsi de suite; ce qui donnera

$$\alpha' + \beta' + \gamma' + \ldots\ldots = p;$$

la valeur de G_p deviendra alors

$$G_p = \frac{1.2.3.\ldots.p}{1.2.\ldots.\alpha' \times 1.2.\ldots.6' \times 1.2.\ldots.\gamma' \times \ldots.} \times \frac{m-n+1}{1} \cdot \frac{m-n}{2} \ldots\ldots \frac{m-n-p+2}{p}.$$

Ces formules C_p, E_p, G_p sont celles qui, divisées par le nombre des tirages possibles, résolvent les questions énoncées.

Problème XXIV. On pourrait aussi demander : *Quelle est la probabilité que les numéros propres à former un tirage d'une classe, d'un genre, ou d'une espèce déterminés, sortiront dans un ordre déterminé ?*

On résoudra cette question en multipliant la probabilité que les numéros sortans satisferont à la première condition, par la probabilité que ces numéros y satisfaisant, auront un ordre de sortie conforme à la seconde.

Problème XXV. *Concevons dans une urne* r *boules marquées du n°.* 1, r *boules marquées du n°.* 2, r *boules marquées du n°.* 3, *et ainsi de suite jusqu'au n°.* n ; *ces boules étant bien mêlées dans l'urne, on les tire toutes successivement, et on demande la probabilité qu'il sortira, au moins, une de ces boules, au rang indiqué par son numéro.*

Une boule ne pouvant, suivant la condition énoncée, sortir à son rang que dans les n premiers tirages, on peut faire abstraction des tirages suivans.

Calculons le nombre de tous les cas possibles dans les n premiers tirages.

Considérons une des boules marquées du n°. 1, et supposons qu'elle sorte à son rang ou la première : il restera $rn - 1$ boules qui, dans les $n - 1$ tirages consécutifs, donneront lieu à

$$(rn-1)(rn-2)\ldots\ldots(rn-n+1)$$

arrangemens : comme cette supposition peut s'appliquer à chacune

42..

des r boules du n°. 1, on aura

$$r(rn-1)(rn-2)\ldots\ldots(rn-n+1)$$

pour le nombre des cas relatifs ou favorables à l'hypothèse qu'une des boules marquées n°. 1, sortira à son rang. Le même résultat ayant lieu sous l'hypothèse qu'une quelconque des rn boules, sortira au rang indiqué par son numéro, on aura

$$rn(rn-1)(rn-2)\ldots\ldots(rn-n+1)\ldots\ldots(a)$$

pour le nombre des cas dans lesquels une boule, au moins, sortira à son rang, pourvu qu'on en retranche les cas répétés, comme nous allons l'expliquer.

Pour déterminer ces cas, considérons une des boules du n°. 1 sortant la première, et une des boules du n°. 2 sortant la seconde : ce cas est compris deux fois dans la formule précédente ; car il est une fois dans le nombre des cas relatifs à la supposition qu'une des boules numérotées 1, sortira à son rang, et une seconde fois dans le nombre des cas relatifs à la supposition qu'une des boules numérotées 2, sortira à son rang ; et comme cette observation s'étend à deux boules quelconques sortant à leur rang, on voit qu'il faut, du nombre des cas précédens, retrancher tous les cas dans lesquels deux boules sortent à leur rang.

Le nombre des combinaisons de deux boules de numéros différens, est $\frac{n(n-1)}{2}r^2$: en effet, le nombre des numéros étant n, leurs combinaisons deux à deux sont en nombre $\frac{n(n-1)}{2}$, et dans chacune de ces combinaisons, qui se réduisent à des produits, on peut combiner les r boules marquées d'un numéro, avec les r boules marquées de l'autre numéro ; il faut donc multiplier la formule précédente par r^2. Pour chacune de ces combinaisons, le nombre de celles des $rn-2$

boules restantes, prises à $n-2$ $n-2$, est

$$(m-2)(m-3).\ldots.(m-n+1).$$

Ainsi le nombre des cas relatifs à la supposition que deux boules sortent à leur rang, est

$$\frac{n(n-1)}{2}r^2(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-n+1);$$

en le retranchant du nombre (a), on aura

$$nr(rn-1)(rn-2)\ldots\ldots\ldots\ldots(rn-n+1)$$
$$-\frac{n(n-1)}{2}r^2(rn-2)(rn-3)\ldots(rn-n+1)\ldots\ldots(a')$$

pour le nombre de tous les cas dans lesquels une boule, au moins, sortira à son rang, pourvu que l'on retranche encore de cette expression les cas répétés, et qu'on lui ajoute ceux qui manquent.

Ces cas sont ceux dans lesquels trois boules sortent à leur rang : en nommant k ce nombre, il est répété trois fois dans le premier terme de l'expression (a') ; car il peut résulter, dans ce terme, des trois suppositions de chacune des trois boules sortant à son rang : le même nombre k est pareillement compris trois fois dans le second terme de la même fonction ; car il peut résulter de chacune des suppositions relatives à deux quelconques des trois boules sortant à leur rang ; mais ce second terme étant affecté du signe —, le nombre k ne se trouve pas dans la fonction (a') ; il faut donc le lui ajouter, pour qu'elle contienne tous les cas dans lesquels une boule, au moins, sorte à son rang : le nombre des combinaisons de n numéros, pris trois à trois, est $\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}$, et comme on peut combiner les r boules d'un des numéros de chaque combinaison, avec les r boules du second numéro, et avec les r boules du troisième numéro, le nombre des combinaisons de trois boules de numéros différens,

sera $\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}.r^3$: d'ailleurs le nombre des combinaisons des $rn-3$ boules restantes, prises $n-3$ à $n-3$, est

$$(rn-3)(rn-4)\ldots\ldots(rn-n+1);$$

donc le nombre total des combinaisons dans lesquelles trois boules sortent à leur rang, est

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}r^3 \times (rn-3)(rn-4)\ldots\ldots(rn-n+1).$$

Si l'on ajoute ce produit à la fonction (a'), on aura

$$\begin{aligned}&nr(rn-1)(rn-2)\ldots\ldots\ldots(rn-n+1)\\ &-\frac{n(n-1)}{1.2}r^2(rn-2)(rn-3)\ldots\ldots(rn-n+1)\\ &+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}r^3(rn-3)(rn-4)\ldots\ldots(rn-n+1)\ldots\ldots(a''),\end{aligned}$$

fonction qui exprime le nombre de tous les cas dans lesquels une boule, au moins, sort à son rang, pourvu que l'on retranche encore les cas répétés, c'est-à-dire, ceux dans lesquels quatre boules, au moins, sortent à leur rang. Si l'on applique les raisonnemens précédens à la recherche de ces cas, on trouvera que leur nombre est

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}r^4(rn-4)(rn-5)\ldots\ldots(rn-n+1).$$

En continuant ainsi, on aura pour l'expression du nombre des cas dans lesquels une boule, au moins, sort à son rang,

$$\left.\begin{aligned}&nr(rn-1)(rn-2)\ldots\ldots\ldots(rn-n+1)\\ &-\frac{n(n-1)}{2}r^2(rn-2)(rn-3)\ldots\ldots(rn-n+1)\\ &+\frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}r^3(rn-3)(rn-4)\ldots\ldots(rn-n+1)\\ &-\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4}r^4(rn-4)(rn-5)\ldots(rn-n+1)\end{aligned}\right\}(A),$$

$+$ etc.,

la série étant continuée aussi loin qu'elle peut l'être. Dans cette fonction, chaque combinaison n'est pas répétée : ainsi la combinaison de s boules sortant à leur rang, ne s'y trouve qu'une fois ; car cette combinaison est comprise s fois dans le premier terme de la fonction, puisqu'elle peut résulter de chacune des s boules sortant à son rang : elle est retranchée $\frac{s(s-1)}{s}$ fois dans le second terme, puisqu'elle peut résulter des combinaisons deux à deux des s boules sortant à leur rang ; elle est ajoutée $\frac{s(s-1)(s-2)}{2.3}$ fois dans le troisième terme, puisqu'elle peut résulter des combinaisons des s boules, trois à trois, et ainsi de suite : elle est donc, dans la fonction (A), comprise un nombre de fois exprimé par

$$s-\frac{s(s-1)}{s}+\frac{s(s-1)(s-2)}{2.3}-\text{etc.}=1-(1-1)^s=1.$$

En divisant la fonction (A) par le nombre des cas possibles, exprimé par

$$rn(rn-1)(rn-2).\ \ldots\ldots\ (rn-n+1),$$

on aura pour expression de la probabilité qu'une boule, au moins, sortira à son rang,

$$1-\frac{(n-1)r}{2(rn-1)}+\frac{(n-1)(n-2)r^2}{2.3(rn-1)(rn-2)}$$
$$-\frac{(n-1)(n-2)(n-3)r^3}{2.3.4(rn-1)(rn-2)(rn-3)}+\text{etc.}\ldots\ldots(B).$$

M. *Laplace*, en généralisant ce problème, a cherché l'expression de la probabilité que s boules, au moins, sortiront à leur rang ; mais nous n'entrerons pas dans les détails de cette solution.

188. On a vu (183 et 184) la différence qui existe entre l'espé-

rance mathématique et l'espérance morale; l'espérance mathématique résultante de l'attente probable d'un ou de plusieurs biens, étant le produit de ces biens par la probabilité de les obtenir, elle peut être évaluée par l'analyse; l'espérance morale étant le produit de la fortune morale par la probabilité de l'obtenir, la difficulté est d'assigner cette fortune morale. A cet effet, x étant la fortune physique d'un individu, l'accroissement infiniment petit qu'elle reçoit et que nous nommerons dx, produit à l'individu un bien moral réciproque à cette fortune (185); l'accroissement de la fortune morale peut donc être exprimé par $\frac{kdx}{x}$, k étant une constante; ainsi en désignant par y la fortune morale correspondante à la fortune physique x, on aura (Calc. diff. et intég.),

$$y = \frac{kdx}{x}, \quad \text{d'où} \quad y = klx + lh,$$

h étant une constante arbitraire que l'on déterminera au moyen d'une valeur de y correspondante à une valeur donnée de x.

Problème XXVI. *Deux joueurs* A *et* B *jouent à* croix *et* pile, *avec la condition que* A *paie à* B *deux francs si* croix *arrive au premier coup; quatre francs si* croix *arrive au second coup; huit francs si* croix *arrive au troisième coup, et ainsi de suite jusqu'au* n^{me} *coup; on demande ce que* B *doit donner à* A *en commençant le jeu, pour l'égalité mathématique du jeu?*

Il est visible que l'avantage de B, relatif au premier coup, est un franc; car il a $\frac{1}{2}$ de probabilité de gagner 2^f à ce coup: son avantage relatif au second coup, est pareillement un franc; car il a $\frac{1}{4}$ de probabilité de gagner 4^f à ce coup, et ainsi de suite, ensorte que la somme des avantages relatifs aux n coups, est n francs que B doit donner à A pour l'égalité mathématique du jeu: cette somme devient infinie si le jeu continue à l'infini. Cependant personne ne risquera à ce jeu,

une somme même modique, telle que 100 francs. Pour peu que l'on réfléchisse à cette contradiction entre le résultat du calcul et l'indication du simple sens commun, on voit qu'elle tient à ce que si l'on suppose, par exemple, $n=50$, ce qui donne 2^{50} pour la somme que B peut espérer au 50ᵉ coup, cette somme immense ne produit point à B un avantage moral proportionnel à sa grandeur; car il y a pour lui un désavantage moral à exposer 50 francs pour obtenir 2^{50} avec la probabilité extrêmement petite $\frac{1}{2^{50}}$ de réussir.

Nous allons reprendre la solution de cette question, en faisant entrer la formule morale en considération, d'après le principe précédemment établi.

Nommons a la fortune de B avant le jeu, et x ce qu'il donne au joueur A; la fortune de B devient $a-x+2$, si *croix* arrive au premier coup; elle devient $a-x+2^2$, si *croix* arrive au second coup, et ainsi de suite jusqu'au coup n, où elle devient $a-x+2^n$, si *croix* n'arrive qu'au $n^{ième}$ coup. Mais la fortune de B est $a-x$, si *croix* n'arrive pas dans les n coups après lesquels la partie est supposée finie, événement dont la probabilité est $\frac{1}{2^n}$. En multipliant les logarithmes de ces diverses fortunes par leurs probabilités respectives et par k, puis à cette somme ajoutant lh, d'après la formule précédente, on aura la fortune morale de B, en vertu des conditions du jeu, égale à

$$\frac{1}{2}kl\,(a-x+2)+\frac{1}{2^2}kl\,(a-x+2^2)\ldots.$$
$$\ldots.+\frac{1}{2^n}kl(a-x+2^n)+\frac{1}{2^n}kl\,(a-x)+l.h.$$

Mais, avant le jeu, la fortune morale de B était $kl.a+l.h$; égalant donc ces deux formules, pour que B conserve toujours la même fortune morale, on aura d'abord, après avoir divisé

par k et supprimé de part et d'autre $l.h$,

$$l(a-x+2)^{\frac{1}{2}}(a-x+2^2)^{\frac{1}{2^2}}\ldots\ldots(a-x+2^n)^{\frac{1}{2^n}}(a-x)^{\frac{1}{2^n}}=la.$$

Faisons $a-x=a'$, d'où $a=a'+x$, et nous aurons

$$l(a'+2)^{\frac{1}{2}}(a'+2^2)^{\frac{1}{2^2}}\ldots\ldots(a'+2^n)^{\frac{1}{2^n}}a'^{\frac{1}{2^n}}=l(a'+x).$$

Maintenant, on peut passer des logarithmes au nombre, ce qui donnera

$$(a'+2)^{\frac{1}{2}}(a'+2^2)^{\frac{1}{2^2}}\ldots(a'+2^n)^{\frac{1}{2^n}}a'^{\frac{1}{2^n}}=(a'+x)\ldots(1):$$

faisons de plus $\frac{1}{a'}=\alpha$, et cette formule deviendra

$$a'^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}}(1+2\alpha)^{\frac{1}{2}}(1+2^2\alpha)^{\frac{1}{2^2}}\ldots(1+2\alpha)^{\frac{1}{2^n}}=a'(1+\alpha x):$$

les facteurs $(1+2\alpha)^{\frac{1}{2}}$, $(1+2^2\alpha)^{\frac{1}{2^2}}$, etc., vont en diminuant sans cesse, et leur limite est l'unité; car en considérant deux de ces facteurs consécutifs, on a

$$(1+2^i\alpha)^{\frac{1}{2^i}}>(1+2^{i+1}\alpha)^{\frac{1}{2^{i+1}}}.$$

En effet, en élevant de part et d'autre à la puissance 2^{i+1}, ce qui revient à multiplier le premier membre par $(1+2^i\alpha)^{\frac{1}{2}}$, on aura

$$1+2^{i+1}\alpha+2^{2i}\alpha^2>1+2^{i+1}\alpha,$$

et sous cette forme, l'inégalité devient évidente. De plus, le logarithme de $(1+2^i\alpha)^{\frac{1}{2^i}}$

$$=\frac{1}{2^i}l(1+2^i\alpha)=\frac{1}{2^i}\left[l\,2^i+l\left(\alpha+\frac{1}{2^i}\right)\right]$$
$$=\frac{i.l2}{2^i}+\frac{1}{2^i}l\left(\alpha+\frac{1}{2^i}\right),$$

et il est visible que cette fonction devient nulle dans le cas de i infini, ce qui exige que, dans ce cas, $(1+2^i\alpha)^{\frac{1}{2^i}}$ soit l'unité.

Soit n infini dans l'équation (1), ce qui est le cas le plus avantageux à B, puisqu'alors la partie se prolonge à l'infini; sous cette hypothèse, et en remplaçant a' par sa valeur $a-x$, et supposant $a-x=100$, l'équation (1) deviendra

$$(100+2)^{\frac{1}{2}}(100+4)^{\frac{1}{4}}(100+8)^{\frac{1}{8}}+\text{etc.}=a,$$

d'où il s'agit de déduire la valeur numérique de a; mais d'après l'observation précédente, il faudra employer un très-grand nombre de facteurs, et j'ai trouvé qu'en prenant vingt de ces facteurs, la somme de leurs logarithmes était 2,0322928, qui répond au nombre 107,719, ou à peu près $107^f,72$, et qu'alors on n'est pas même certain des dixièmes. Pour pouvoir compter sur le chiffre des centièmes, il faut pousser le calcul beaucoup plus loin, et on est conduit à cette valeur $a=107,89$. Ainsi la fortune physique de B étant primitivement de $107^f,89$, il ne doit risquer prudemment que $7^f,89$ au lieu de la somme infinie que le résultat du calcul indique, lorsqu'on fait abstraction des considérations morales. Ayant ainsi la valeur de a relative à $a'=100$, il est facile d'en conclure sa valeur relative à $a'=200$: en effet, on a, dans ce dernier cas, et en observant que le nombre des facteurs est infini,

$$a=(200+2)^{\frac{1}{2}}(200+4)^{\frac{1}{8}},\text{etc.}=2(100+1)^{\frac{1}{2}}(100+2)^{\frac{1}{4}}(100+4)^{\frac{1}{8}},\text{etc.}$$

Mais on vient de trouver

$$(100+2)^{\frac{1}{4}}(100+4)^{\frac{1}{8}}\text{ etc.}=(107,89)^{\frac{1}{2}};$$

donc

$$a = 2\sqrt{101.107,89} = 208^{f},78.$$

Ainsi la fortune physique de B étant primitivement $208^{f},78$, il ne peut risquer prudemment à ce jeu au-delà de $8^{f},78$.

Nous nous bornerons ici à la solution de ces questions, nous réservant de reprendre cette matière, et d'en faire le sujet d'un traité particulier, à la portée de ceux des lecteurs qui n'auraient étudié que nos deux sections de l'Algèbre.

FIN.



1830.

LIBRAIRIE

POUR LES MATHÉMATIQUES, LA MARINE ET LES SCIENCES EN GÉNÉRAL.

EXTRAIT DU CATALOGUE

Des Livres qui se trouvent chez Bachelier (Succ[r] de feu M[me] veuve Courcier), *libraire, quai des Augustins, n° 55.*

TABLES DE LOGARITHMES, de LALANDE, étendues à **SEPT DÉCIMALES**, par Marie, précédées d'une Instruction, dans laquelle on fait connaître les limites des erreurs qui peuvent résulter de l'emploi des Logarithmes des nombres et des lignes trigonométriques; par le Baron Reynaud, examinateur des candidats pour l'École Polytechnique, etc. 1829, 1 vol. in-12, 3 fr. 50 c.

OUVRAGES ADOPTÉS PAR L'UNIVERSITÉ DE FRANCE,

POUR L'ENSEIGNEMENT DANS LES COLLÉGES, etc., etc.

Ouvrages de M. LACROIX, *Membre de l'Institut et de la Légion-d'Honneur, Doyen des Sciences à l'Université, Professeur au Collége de France, etc.*

COURS DE MATHÉMATIQUES à l'usage de l'École centrale des Quatre-Nations, Ouvrage adopté par le Gouvernement pour les Lycées, Écoles secondaires, Colleges, etc., 10 vol. in-8., 49 fr.

Chaque volume du Cours de M. Lacroix *se vend séparément, savoir :*

Traité élémentaire d'Arithmétique, 18e édition, 1830, 2 fr.
Élémens d'Algèbre, 14e édition, 1825, 4 fr.
Élémens de Géométrie, 14e édition, 1830, 4 fr.
Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'Application de l'Algèbre à la Géométrie, 8e édit., 1827, 4 fr.
Complément des Élémens d'Algèbre, 5e édit., 1825, 4 fr.
Complément des Élémens de Géométrie, ou Élémens de Géométrie descriptive, 6e édition, 1829, 3 fr.
Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral, 4e édit., 1827, 8 fr.
Essais sur l'enseignement en général, et sur celui des Mathématiques en particulier, ou Manière d'étudier et d'enseigner les Mathématiques; 1 v. in-8.; troisième édition, revue et augmentée, 1828, 5 fr.
Traité élémentaire du Calcul des Probabilités, in-8., 2e édition, 1822, avec une planche, 5 fr.
Introduction à la Géographie mathématique et physique. 2e édit., in-8., avec cartes, 1811, 10 fr.

TRAITÉ COMPLET DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL, 3 vol. in-4., 66 f.

Le *Traité élémentaire d'Arithmétique*, les *Élémens d'Algèbre*, qui ne contiennent que les principes et les méthodes d'une application usuelle; les *Élémens de Géométrie*, où l'Auteur a tâché de concilier les rigueurs des démonstrations avec l'ordre naturel des propositions; et le *Traité élémentaire de Trigonométrie et d'Application de l'Algèbre à la Géométrie*, composent un Cours élémentaire après lequel on peut passer immédiatement au *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral*. L'Auteur a évité l'emploi des formules de l'Algèbre supérieure, afin de ne pas retarder l'entrée des Élèves dans la Mécanique et ses applications, qui sont ordinairement le but principal de l'étude des Mathématiques. Il n'a cessé, à chaque édition, de perfectionner les détails de ses ouvrages et de veiller à leur correction.

BOURDON, *Inspecteur de l'Université de Paris, Examinateur des Aspirans à l'École polytechnique.* ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE, 1 vol. in 8., 7e édit., 1830, 5 fr.

— ÉLÉMENS D'ALGÈBRE, 5e édit. fort vol. in-8°., 1828, 7 fr. 50 c.

BOURDON. APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE; 2e édition, 1 fort vol. in-8., avec 15 planches, 1828, 7 fr. 50 c.

BIOT, Membre de l'Institut, Professeur au Collége de France, etc. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'ASTRONOMIE PHYSIQUE, destiné à l'enseignement dans les Colléges, etc.; 3 forts vol. in-8., 1810. 30 fr.

— PHYSIQUE MÉCANIQUE, traduite de l'allemand de Fischer, avec notes; 4e édition, considérablement augmentée, in-8, 1830. 7 fr. 50 c.

— ESSAI DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre; in-8., avec 10 pl., 1826, 7e éd., *rev. corr. et augm.* 6 f. 50 c.

— NOTIONS ÉLÉMENTAIRES DE STATIQUE destinées aux jeunes gens qui se préparent pour l'École Polytechnique et qui suivent les Cours de l'École de Saint-Cyr; 1 vol. in-8., 1828, 3 fr. 75 c.

LEFEBVRE DE FOURCY, Examinateur des Aspirans à l'École royale Polytechnique, docteur ès-sciences, etc. LEÇONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, données au Collége royal de Saint-Louis, dans lesquelles on traite des Problèmes déterminés, de la ligne droite et des lignes du second ordre; 1 vol. in-8. 5 fr. 50 c.

— THÉORIE DU PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ALGÉBRIQUE et de l'élimination entre deux équations à deux inconnues. In.8. br., 1827, 1 fr. 50 c.

BEZOUT. TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE à l'usage de la Marine et de l'Artillerie, avec des Notes fort étendues et des Tables de logarithmes, pour les Élèves qui se destinent à l'École Polytechnique; par A.-A.-L. REYNAUD, Examinateur des Candidats à l'École Polyt., etc.; in-8., 13e édit., stéréot., 1828, 3 fr. 50 c.

Le *texte pur* se vend séparément, 2 fr.

Les Notes se vendent aussi séparément, 2 fr. 50 c.

— ALGÈBRE et Application de cette science à l'Arithmétique et à la Géométrie, nouvelle édition, revue et augmentée de Notes fort étendues; par A.-A.-L. REYNAUD, Examinateur des Candidats à l'École Polytechnique, etc.; in-8., 1829, 6 fr.

Le *texte pur* se vend séparément, 4 fr.

Les Notes se vendent aussi séparément, 4 fr.

— GÉOMÉTRIE contenant la Trigonométrie rectiligne et la Trigonométrie sphérique; Notes sur la Géométrie, Élémens de Géométrie descriptive et Problèmes; par REYNAUD; 7e édit. avec 21 planches, 1829, 6 fr.

Le *texte pur* se vend séparément, 4 fr.

Les *Notes* se vendent aussi séparément, 4 fr.

DEMONFERRAND, Professeur de Mathématiques et de Physique au Collége de Versailles, Examinateur à l'École Polytechnique. MANUEL D'ÉLECTRICITÉ DYNAMIQUE, ou Traité sur l'Action mutuelle des conducteurs électriques et des aimans, et sur la nouvelle Théorie du Magnétisme, *pour faire suite à tous les Traités de Physique élémentaire*; in-8., 1823, avec 5 planches, 4 fr.

HAUY. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE PHYSIQUE, adopté par le Conseil royal de l'Instruction publique pour l'enseignement dans les Colléges; troisième édition, considérablement augmentée, 2 vol. in-8., avec 19 pl., 15 fr.

MONGE. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE STATIQUE, à l'usage des Écoles de la Marine; sixième édition, in-8., revue par M. Hachette, ex-Instituteur de l'École Polytechnique, Professeur de Mathématiques, etc., 1826, 3 fr. 50 c.

LEROY (Professeur à l'École Polytechnique. COURS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE. ANALYSE APPLIQUÉE A LA GÉOMÉTRIE DES TROIS DIMENSIONS, contenant les surfaces du 2e ordre, avec la théorie générale des surfaces courbes et des lignes à double courbure; in-8., 1829, 5 fr.

OUVRAGES DESTINÉS AUX CANDIDATS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE ET DES ÉCOLES MILITAIRES.

Ouvrages de M. le Baron REYNAUD, *Examinateur des Candidats de l'École Polytechnique et de l'École spéciale militaire.*

1°. ARITHMÉTIQUE, à l'usage des élèves qui se destinent à l'École Polytechnique et à l'École militaire; 15e édition, augmentée d'une table des Logarithmes des nombres entiers, depuis un jusqu'à dix mille, 1 vol. in-8., 1829, 4 fr. 50 c.

2°. ÉLÉMENS D'ALGÈBRE, à l'usage des Élèves qui se destinent à l'École royale Polytechnique et à l'École spéciale militaire; 1 vol. in-8., 7e édit., 1828, 7 fr. 50.

3°. ALGÈBRE, anc. édit., 2e section, 1 vol. in-8., 1810, 5 fr.

4°. TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE, troisième édition, suivie des TABLES DES LOGARITHMES des nombres et des lignes trigonométriques de LALANDE; in-18, avec figures, 1818, 3 fr.
Les Tables de Logarithmes de LALANDE seules, sans la Trigonométrie, se vendent séparément, 2 fr.
5°. TRAITÉ D'APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE ET DE TRIGONOMÉTRIE, à l'usage des élèves qui se destinent à l'École Polytechnique, etc.: 1 vol. in-8., avec 10 planches, 1819, 6 fr.
6°. COURS ÉLÉMENTAIRE DE MATHÉMATIQUES, DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE, *suivi* de quelques notions d'Astronomie, à l'usage des Élèves qui se destinent à subir les examens pour le Baccalauréat ès-lettres, 1 vol. in-8. avec 14 planches, 2e édition, *sous presse*.
Ce Cours est entièrement conforme au programme qui a été publié par ordre de l'Université, dans le Manuel pour le Baccalauréat ès-lettres.
7°. REYNAUD ET DUHAMEL. Problèmes et Développemens sur diverses parties des Mathématiques, in-8., 1823, avec 11 planches, 6 fr.
8°. ARITHMÉTIQUE à l'usage des Ingénieurs du Cadastre, in-8., 5 fr.
9°. MANUEL de l'Ingénieur du Cadastre; par MM. Pommiés et Reynaud, in-4., 12 fr.
10°. TRAITÉ DE TRIGONOMÉTRIE de Lagrive, avec les Notes de Reynaud, in-8., 7 fr.
—— ET NICOLLET. COURS DE MATHÉMATIQUES à l'usage des Écoles de Marine et des Aspirans à ces Écoles; 3 vol. in-8.
1er vol. Arithmétique et Algèbre, par M. Reynaud. 6 fr.
2e vol. Géométrie et Trigonométrie, par M. Nicollet. 7 fr.
3e vol. Statique et Équilibre des Machines, *sous presse*.

Notes sur Bezout, par Reynaud.

11°. NOTES SUR L'ARITHMÉTIQUE, 13e édit., in-8., 1826, 2 fr. 50 c.
12°. —— SUR LA GÉOMÉTRIE, in-8., 7e édit., 1828, 4 fr.
13°. —— SUR L'ALGÈBRE et Application de l'Algèbre à la Géométrie, in-8., 1822, 4 fr.

Ouvrages de M. GARNIER, ex-Professeur à l'École Polytechnique, Docteur de la Faculté des Sciences de l'Université, Professeur de Mathématiques à l'École royale militaire.

TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE, deuxième édit., in-8., 1808, 2 fr. 50 c.
—— ÉLÉMENS D'ALGÈBRE, à l'usage des Aspirans à l'École Polytechnique; troisième édit., in-8., 1811, revue, corrigée et augmentée, 6 fr.
—— Suite de ces Élémens, 2e partie. ANALYSE ALGÉBRIQUE, nouv. édit., considérablement augmentée, in-8., 1814, 7 fr.
—— GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, ou application de l'Algèbre à la Géométrie; seconde édition, revue et augm., 1 vol. in-8., avec 14 pl., 1813, 6 fr.
—— LES RÉCIPROQUES de la Géométrie, suivies d'un Recueil de Problèmes et de Théorèmes, et de la construction des Tables trigonométriques, in-8., 2e édit., considérablement augmentée, 1810.
—— ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE, contenant les deux Trigonométries, les élémens de la Polygonométrie et du levé des Plans, et l'Introduction à la Géométrie descriptive, 1 vol. in-8., avec pl., 1812, 5 fr.
—— LEÇONS DE STATIQUE, à l'usage des Aspirans à l'École Polytechnique; un vol. in-8., avec 12 pl., 1811, 5 fr.
—— LEÇONS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL, 3e édition, 1 vol. in-8., avec 4 pl., 1811, 7 fr.
—— LEÇONS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL, 1 vol. in-8., avec 4 planches, 1811 et 1812, 14 fr.
—— TRISECTION DE L'ANGLE, suivie de recherches analytiques sur le même sujet, in-8., 1809, 2 fr. 50 c.
—— DISCUSSION DES RACINES des Équations déterminées du premier degré à plusieurs inconnues, et élimination entre deux équations de degrés quelconques à deux inconnues; deuxième édition, 1 vol. in-8., 1 fr. 80 c.
FRANCŒUR, Professeur de la Faculté des Sciences de Paris, ex-Examinateur des Candidats de l'École Polytechnique, etc. COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES PURES, dédié à S. M. Alexandre Ier, Empereur de Russie; Ouvrage destiné aux Élèves des Écoles Normale et Polytechnique, et aux Can-

didats qui se préparent à y être admis, etc.; troisième édition, revue et augmentée, 2 vol. in-8., avec figures, 1828, 15 fr.

— URANOGRAPHIE ou TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'ASTRONOMIE, à l'usage des personnes peu versées dans les Mathématiques, accompagné de planisphères, etc.; 4e édit., considérabl. augm. 1 v. in-8., avec pl., 1828, 9 fr. 50 c.

FRANCŒUR. TRAITÉ DE MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE, 5e édit., 1825, 7 fr. 50 c.

SUZANNE, Docteur ès-Sciences, Professeur de Mathématiques au Lycée Charlemagne, à Paris. DE LA MANIÈRE D'ÉTUDIER LES MATHÉMATIQUES; Ouvrage destiné à servir de guide aux jeunes gens, à ceux surtout qui veulent approfondir cette Science, ou qui aspirent à être admis à l'École Normale ou à l'École Polytechnique; 3 gros vol. in-8., avec figures,

Chaque partie se vend séparément, savoir :

— Première partie, PRÉCEPTES GÉNÉRAUX et ARITHMÉTIQUE; seconde édit., considérablement augmentée, in-8., 6 fr.

— Seconde partie, ALGÈBRE, *épuisée*.

— Troisième partie, GÉOMÉTRIE, in-8., 6 fr. 50 c.

BOUCHARLAT, Professeur de Mathématiques transcendantes aux Écoles militaires, Docteur ès-Sciences, etc. ÉLÉMENS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL et de Calcul intégral; 3e édit., revue et augmentée, in-8., avec pl., 1826, 6 fr.

— THÉORIE DES COURBES et des Surfaces du second ordre, précédée des principes fondamentaux de la Géométrie analytique; 2e éd., augm., in-8., 6 fr.

— ÉLÉMENS DE MÉCANIQUE, in-8. 2e édition, revue et considérablement augmentée, avec planches, 1827, 7 fr.

POISSON, Membre de l'Institut, Professeur à l'École Polytechnique et à la Faculté des Sciences de Paris, et Membre adjoint du Bureau des Longitudes. TRAITÉ DE MÉCANIQUE, 2 v. in-8., de plus de 500 pag. chacun, avec 8 pl., 1811, 12 fr.

Ce Traité de Mécanique, le plus complet qui existe, a été adopté par l'École Polytechnique pour l'instruction des Élèves. Il renferme, en outre, les notions de Statique élémentaire qu'on exige des Candidats qui se destinent pour ladite École.

POINSOT, Membre de l'Institut. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE STATIQUE, adopté pour l'instruction publique, in-8, 5e édit., 1830, avec pl., 5 fr.

DELAMBRE, Membre de l'Institut. ABRÉGÉ D'ASTRONOMIE, ou Leçons élémentaires d'Astronomie théorique et pratique données au Collège de France, 1 vol. in-8., 2e édit., *sous presse*.

LAPLACE (M. le marquis de), Membre de l'Institut. EXPOSITION DU SYSTÈME DU MONDE, 5e édit., 1824, in-4., avec portrait, 15 fr.

— Le même, 2 vol. in-8., 1824.

— ESSAI PHILOSOPHIQUE SUR LES PROBABILITÉS, in-8., 5e éd., 1825, 4 f.

MONGE, Membre de l'Institut, etc. GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, 5e édition, augmentée d'une Théorie des Ombres et de la Perspective, extraite des papiers de l'Auteur; par M. BRISSON, ancien élève de l'École Polytechnique, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées; 1 vol. in-4., avec 28 pl., 1827, 12 fr.

LE FRANÇAIS. Essai de Géométrie analytique, 2e édit., revue et augm., 2 fr. 50 c.

TREUIL. Essais de Mathématiques, contenant quelques détails sur l'Arithmétique, l'Algèbre, la Géométrie et la Statique, in-8., 1819, 2 fr.

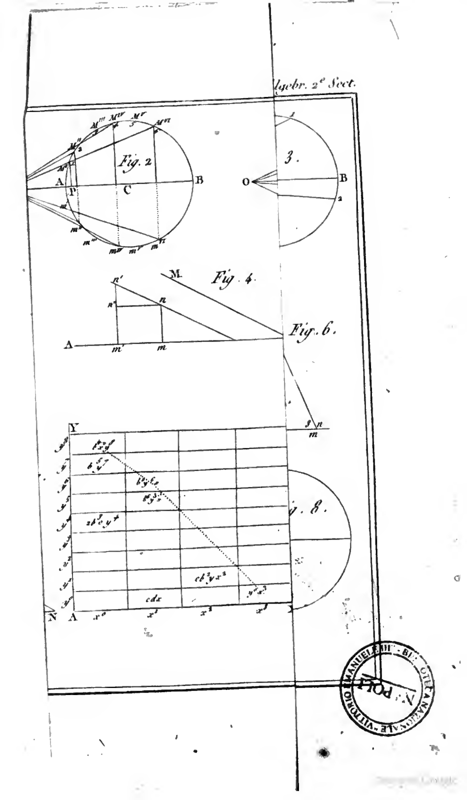
TRAITÉ DE LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMÉRIQUES de tous les degrés, avec des Notes sur plusieurs points de la Théorie des Équations algébriques; par LAGRANGE, Membre de l'Institut, Grand-Officier de la Légion-d'Honneur, etc.; 3e édition, in-4., 1826, 15 fr.

DE STAINVILLE, Répétiteur à l'École Polytechnique. MÉLANGES D'ANALYSE ALGÉBRIQUE ET DE GÉOMÉTRIE, 1 vol. in-8., avec planches, 1815, 7 fr. 50 c.

LAGRANGE, Membre de l'Institut. LEÇONS SUR LE CALCUL DES FONCTIONS, nouvelle édition, in-8., 6 fr. 50 c.

DUBOURGUET. TRAITÉS ÉLÉMENTAIRES DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DE CALCUL INTÉGRAL, 2 vol. in-8., 1810 et 1811, 16 fr.

Imprimerie de HUZARD-COURCIER, rue du Jardinet Saint-André-des-Arcs, n° 12.



lgebr. 2e Sect.
Fig. 2
A
P
C
B
3.
O
B
Fig. 4.
M
A
m'
m
n
Fig. 6.
Y
N
A
cdx

